

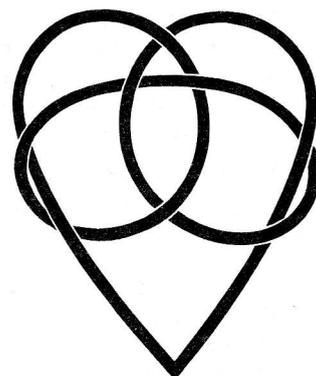
NŒUDS ET ENTRELACS

Claude PAGANO - La Seyne-sur-Mer

S

auriez-vous citer tous les sports, tous les corps de métiers qui actuellement font des nœuds ?

Le marin, bien sûr, le pêcheur aussi, l'alpiniste, sont les plus connus avec la couturière, le cordonnier et, plus précis encore, le chirurgien. En voyez-vous d'autres ? Le mathématicien en a fait, il y a une centaine d'année, un sujet d'étude qui est loin d'être clos.



«... un certain M. Klein affirme avoir prouvé que les nœuds ne peuvent exister dans un espace à quatre dimensions. Voilà qui est déjà assez dur ; mais s'il se trouvait encore quelqu'un pour prouver que le paradis n'existe pas en trois dimensions, quel serait l'avenir de l'expert en nœuds ?

Clifford W. Ashley dans « Le grand livre des nœuds »

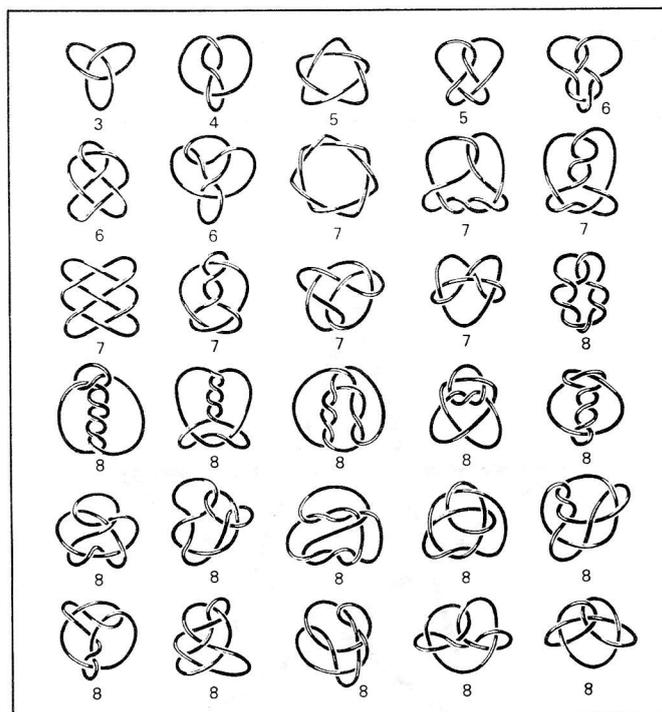
Pour étudier les nœuds et les classer, les mathématiciens utilisent la topologie. Cette branche récente de la géométrie est moins élaborée que la géométrie projective ou la géométrie différentielle. C'est un outil plus sommaire fait pour étudier l'espace. En topologie il n'y a pas de droites perpendiculaires ou parallèles, de points alignés ou de distance. On dit que la topologie est la géométrie de la membrane de caoutchouc.

La théorie des nœuds et entrelacs est, en quelque sorte, l'étude du (ou des) bord de cette membrane.

D'abord qu'est-ce qu'un nœud pour un mathématicien ?

Prenez une ficelle en nylon de préférence ou un tuyau comme dans l'exposition. Faites un nœud usuel et devenez mathématicien en... joignant les deux bouts (en les soudant par exemple). Vous obtenez alors une « courbe fermée sans points d'intersection » qui est une définition mathématique d'un nœud (1). Et un entrelac ? C'est une figure formée de 2, 3 (ou plus) nœuds disjoints, emboîtés ou non.

Nœud « premiers » avec leurs nombres de croisement



(1) Brochure expo « H.M. » Nœuds et entrelacs à la portée de tous.

J.-Y. Le Dimet, irem de Nantes 1985.

Il y a une véritable théorie mathématique des nœuds. Elle est née il y a cent ans environ. Elle utilise de nos jours ce que les mathématiciens appellent la topologie. Dans la pratique, on convient que les extrémités libres de la corde

sont attachées 2 à 2. Un nœud simple ne comporte qu'un seul brin pour sa fabrication. Un point de croisement est un point où se croisent deux morceaux de la courbe qui représente le nœud. Si, sur une ficelle, apparaissent deux nœuds côte à côte, A et B, le nœud obtenu est le nœud produit $A \# B = C$. On dit alors que A divise C (ou B divise C). Un nœud « premier » est un nœud qui n'est divisible que par le nœud « simple » bien connu.

En quoi consiste l'étude mathématique des nœuds ?

Les géomètres sont des maniaques. Leur obsession est de « classer » les objets géométriques, c'est-à-dire de dresser des listes de ces objets en fonction de leurs propriétés, sans omissions ni redondances. Pour arriver à ses fins, dans le cas des nœuds en particulier, le géomètre doit pouvoir décider si deux nœuds donnés sont semblables, si non dire ce qu'ils ont de commun.

Dans ce but, les mathématiciens ont créé des outils appelés « invariants de nœuds ». Un invariant de nœuds est, grosso modo, une fonction f qui assigne à chaque nœud A un objet $f(A)$ raisonnablement calculable — par exemple un nombre entier, un polynôme — de sorte que, si A et B sont des nœuds semblables, les objets $f(A)$ et $f(B)$ soient égaux.

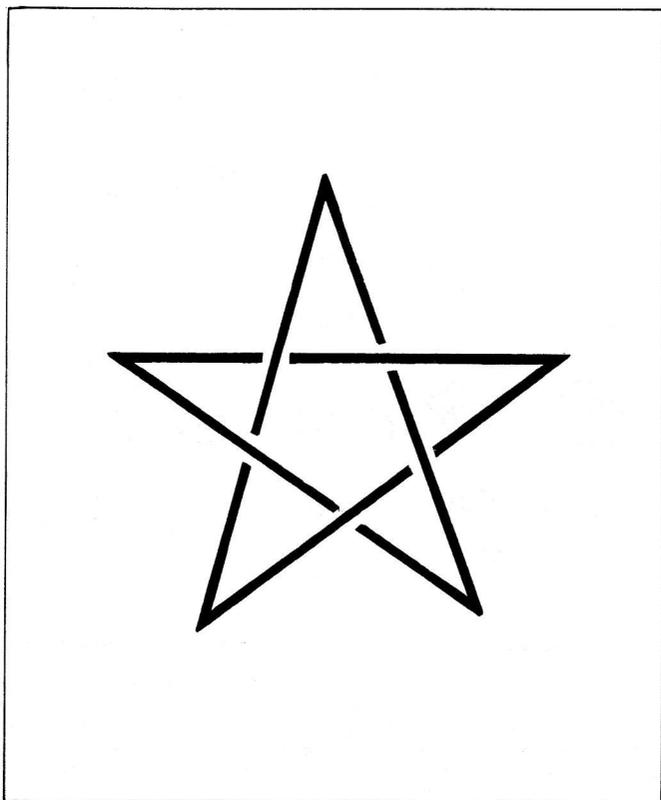
Il existe un grand nombre d'invariants de nœuds. Citons :

- 1 - Le nombre de croisements
 - 2 - L'indice de pont
 - 3 - L'indice gordien
 - 4 - Le genre du nœud
 - 5 - Le groupe du nœud
 - 6 - L'invariant de Arf. Kervaire
 - 7 - La signature
 - 8 - Le polynôme d'Alexander
 - 9 - L'invariant de Casson-Gordon
- 6, 7, 8 et 9 sont des outils beaucoup plus sophistiqués.

Usage des nœuds

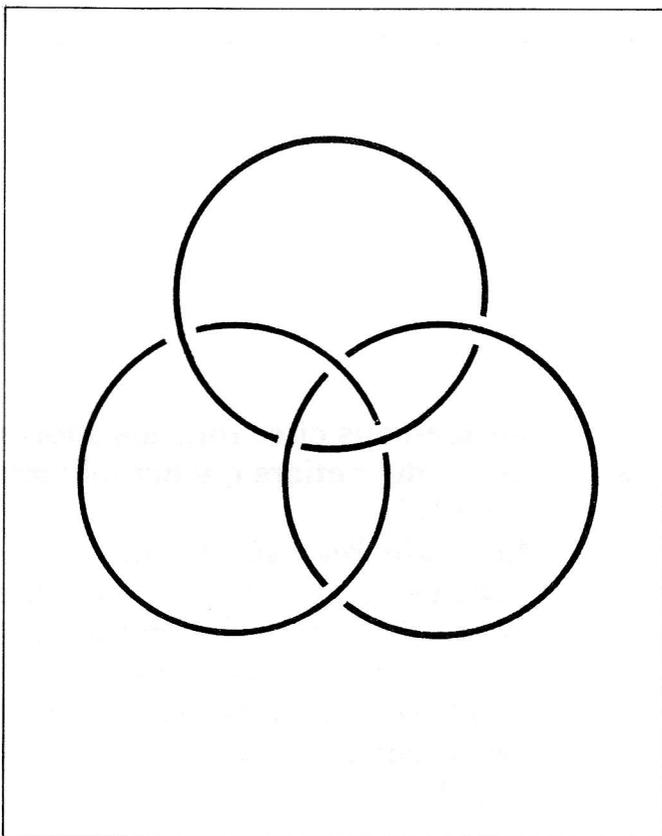
L'étoile de l'Islam n'est que le nœud 5_1 du mathématicien.

Pour le musulman, elle symbolise les cinq piliers de la foi.

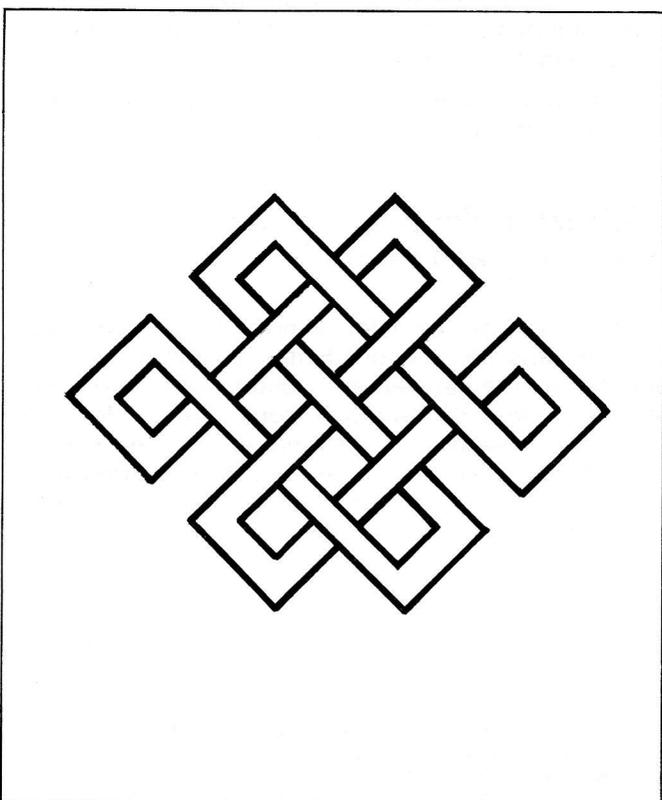


Un entrelac

Les anneaux boroméens : cet emblème figure dans les armoiries de la famille italienne Boromé. Il symbolise l'union des trois branches de la famille : si l'on oublie un des anneaux, les deux autres se détachent.



Ce nœud, 7_4 dans la table, est l'un des huit emblèmes du bouddhisme tibétain. De même qu'un nœud n'existe pas sans référence à l'espace ambiant, cet emblème rappelle l'interdépendance des choses de ce monde.

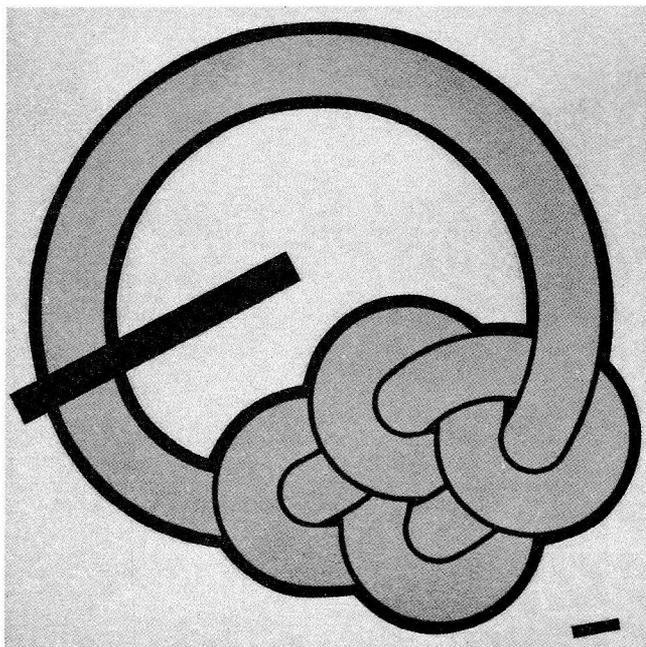
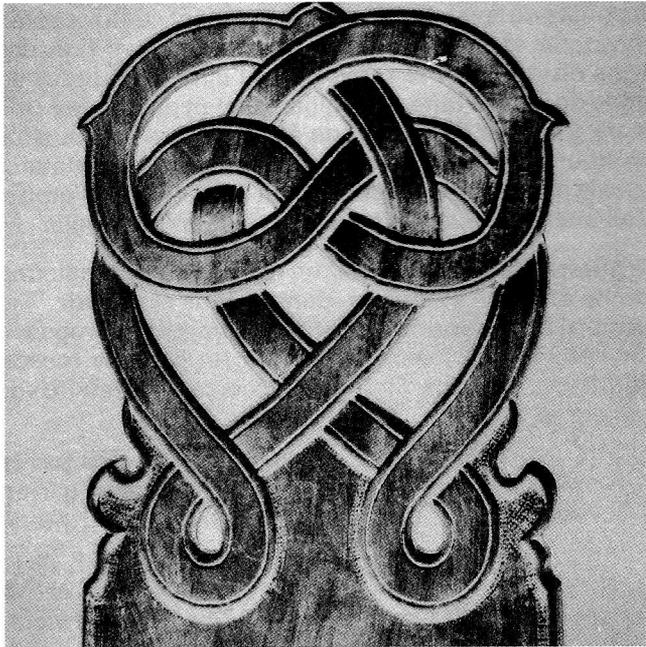


Utilisation dans la classe

Les nœuds donnent lieu à beaucoup d'activités que je n'hésite pas à faire dans les classes de mon collège.

Ces activités n'exigent pas d'acquis antérieur, mais développent plusieurs types de réflexion. Exemples de travail :

Les courbes fermées, ce sont celles que l'on trace sans lever le crayon du papier et en revenant au point de départ sans passer plus de deux fois par le même point. Activités de dénombrements des croisements, des axes, des croisements conjectures sur les relations entre les trois éléments.



Faire un nœud avec une ficelle et savoir le dessiner. Et inversement à partir du dessin d'un nœud savoir faire le nœud correspondant.

Un nœud n'ayant pas une unique représentation plane. A partir d'un nœud à n croisements, essayer de le

modifier jusqu'à reconnaître un nœud repéré sur le tableau des nœuds à n croisements. Exemple :

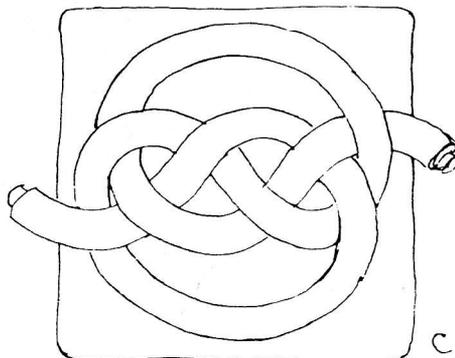
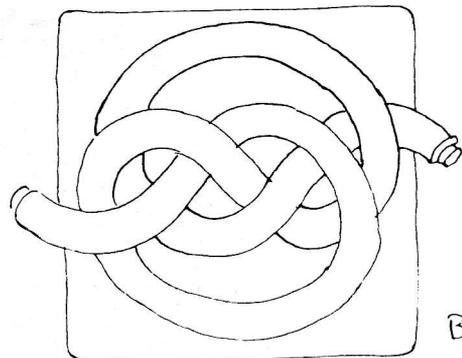
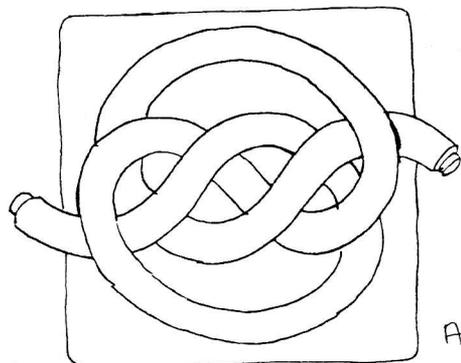


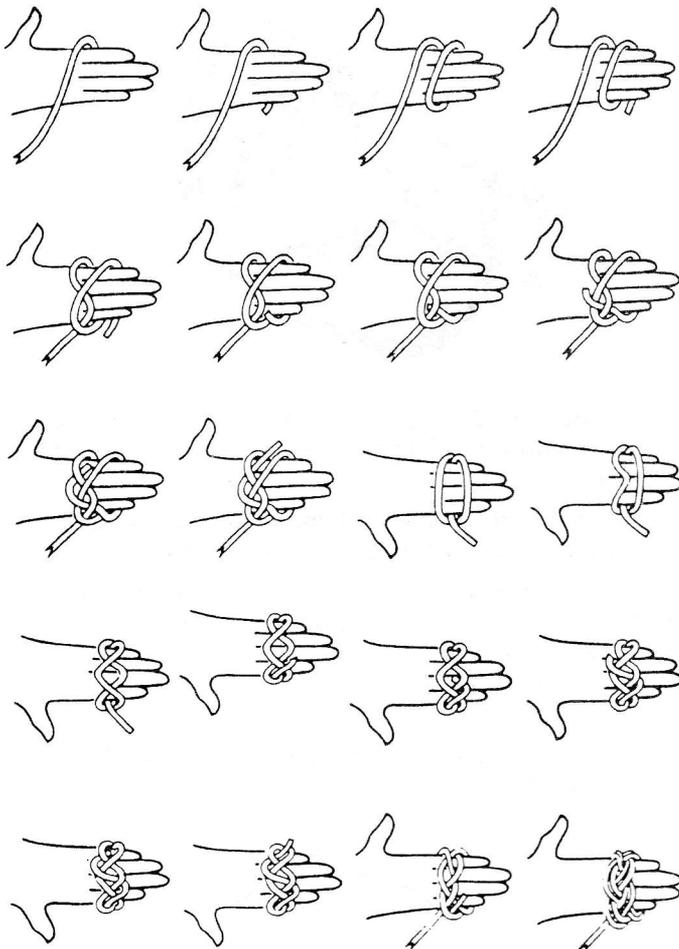
est un nœud à 7 croisements : savoir l'identifier sur la table des nœuds à 7 croisements n'est pas une mince affaire.

Pour un nœud amphichiral donné, savoir par déformation trouver son symétrique dans le miroir. Exemple :

L'ordre d'un croisement : si j'inverse le sens dessus/dessous d'un croisement d'un nœud de degré n , j'obtiens un nœud de degré m plus petit, l'ordre d'un croisement est la différence $n - m$.

Jeu sur la table des nœuds premiers. Quel est ce nœud sur la liste ?





Des peuples ont fait un usage moins paisible des techniques de nouage.

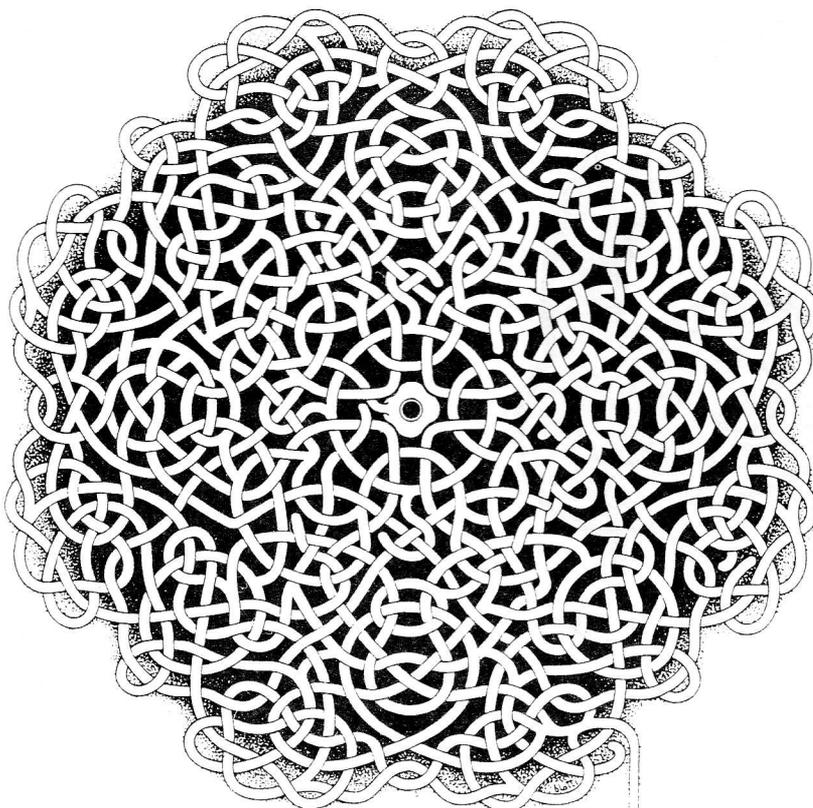
En Nouvelle-Calédonie, les nœuds servent traditionnellement de message de guerre et de paix entre les tribus Canaques.

L'ethnologue Maurice Leenhardt a relevé un certain nombre de ces usages. Ainsi, l'assassinat d'un fuyard était préparé par correspondance entre les chefs de deux tribus par l'échange d'une étoffe d'écorce nouée (un mouchet). Le messager la présentait au chef destinataire avec le nom du délinquant. Celui-ci était convoqué et étranglé. Le chef retirait alors l'un des brins du nœud et le renvoyait au chef expéditeur en signe de justice faite. Une alliance était proposée à une autre tribu par l'envoi d'une étoffe nouée en boucle à un bout. Si l'alliance était acceptée, le destinataire faisait une boucle à l'autre bout et renvoyait l'étoffe. L'alliance conclue était alors réputée indissoluble.

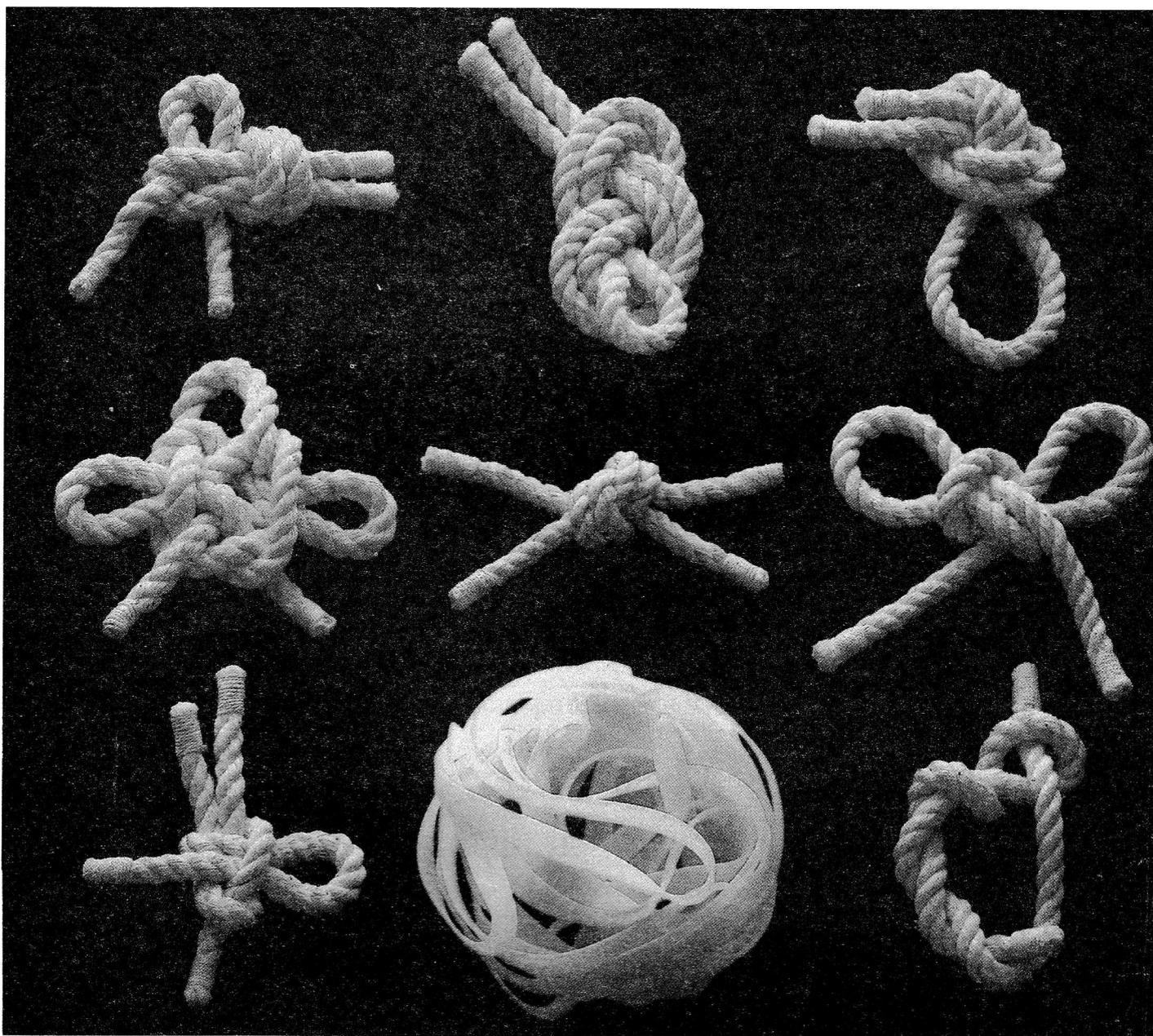
La guerre était déclarée par un nœud qui contenait une torche allumée et éteinte, dont le sens était clair : " je viendrai brûler vos cases ". Mais la paix était proposée par l'envoi d'un nœud contenant un bout de roseau signifiant : " Voici le chaume et l'écorce pour refaire vos demeures ".

Que la guerre et la paix puissent être portées par la puissance évocatrice d'un simple nœud n'a rien d'étonnant, comme en témoigne l'histoire du nœud gordien.

En 333 avant notre ère, Alexandre le Grand arriva devant la ville de Gordion après avoir traversé victo-



Nœud labyrinthe
par Noël Blotti



Conclusion

Pour en savoir plus

- Brochure expo "H.M.":
Nœuds et entrelacs à la portée de tous.
J.-Y. Le Dimet - Irem de Nantes, 1985.
- Les mathématiques aujourd'hui
Les progrès des mathématiques
Belin - Pour la science. ■

