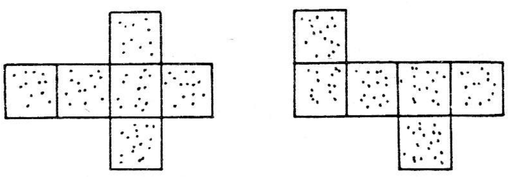
FORMES ET STRUCTURES

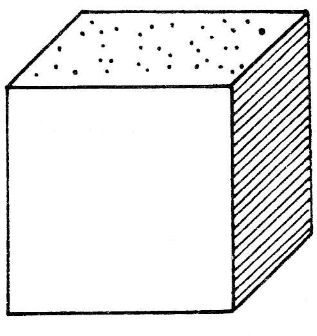
Jacky PATRAS - Vénissieux

ACTIVITES d'un club de Math au Collège Elsa Triolet à Vénissieux.

Fabriquez un cube

Il existe 11 développements différents du cube.
En voici quelques-uns.
Trouvez les autres.

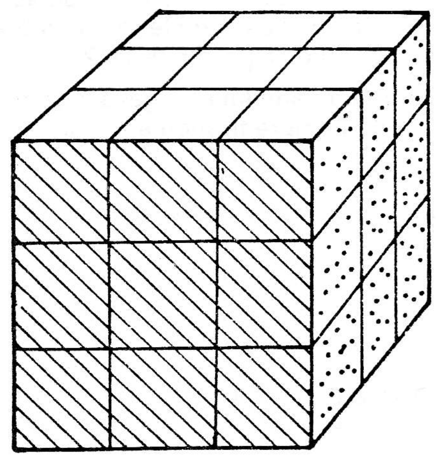




Des cubes de cubes

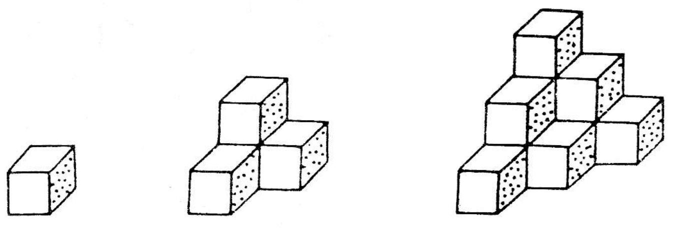
27 petits cubes sont empilés pour constituer un gros cube 3 x 3 x 3.
Chaque face de ce cube est peinte d'une couleur différente : blanc, rouge, etc...
Par conséquent, certains petits cubes reçoivent 3 couleurs, d'autres deux, d'autres une seule.
Combien y a-t-il de petits cubes qui sont peints sur 3 faces ? sur 2 faces ? sur 1 face ? Combien y en a-t-il qui n'ont aucune face peinte ?

Mêmes questions pour un cube 4 x 4 x 4.
Mêmes questions pour un cube 5 x 5 x 5.
Mêmes questions pour un cube 6 x 6 x 6.



La pyramide cubix !

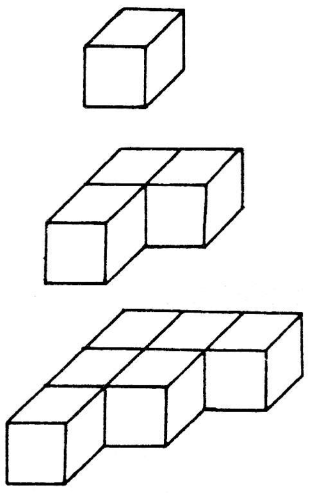
Construisons des **pyramides à base triangulaire** en empilant des cubes, comme ci-dessous :



Le nombre de cubes des pyramides successives engendre une suite de nombres intéressante : **les nombres pyramidaux**.

Hauteur de la pyramide : n	1	2	3	...
Nombre de cubes : P_n	1	4	10	...

Combien faut-il de cubes pour faire une pyramide de 4 étages ?
de 10 étages ?...



Quelques indications pour chercher
$P_3 = 1 + 3 + 6$

Les nombres 1; 3; 6; 10;... sont appelés **nombres triangulaires**. On peut calculer le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire avec la formule : $T_n = n(n + 1)/2$.

Chaque nombre pyramidal est égal à la somme de son précédent et du nombre triangulaire correspondant :

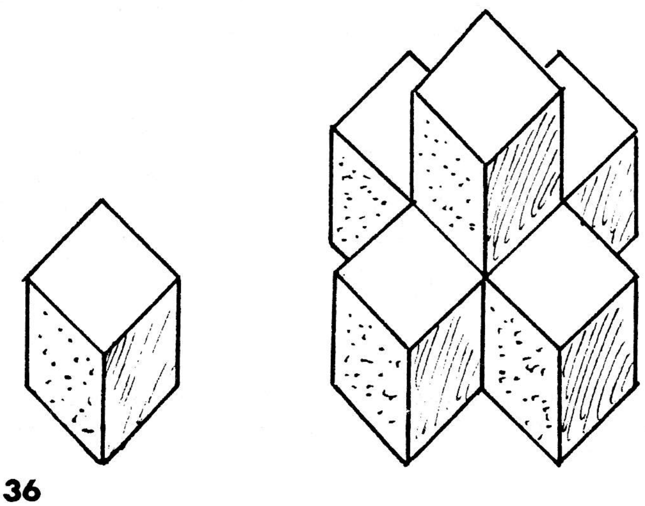
$P_n = P_{n-1} + T_n$

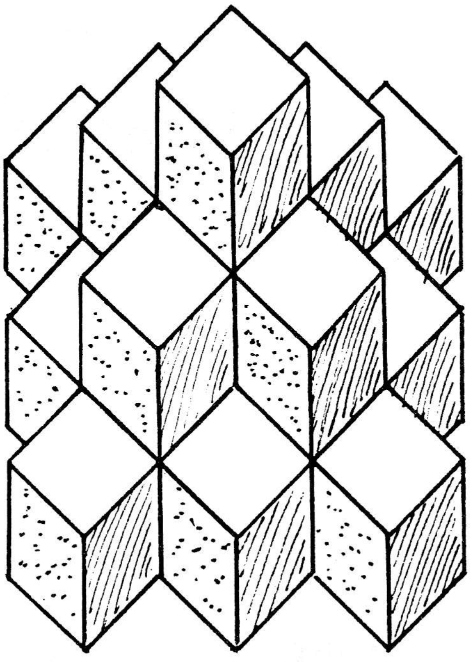
La formule permettant de calculer le $n^{\text{ème}}$ nombre pyramidal est :

$$Pn = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

La pyramide en croix

Constructions maintenant des **pyramides à base carrée** en empilant des cubes comme ci-dessous :





Etudiez la suite de nombres engendrée par le nombre de cubes des pyramides successives.

Hauteur de la pyramide : n	1	2	3	...
Nombre de cubes : S_n	1	6	19	...

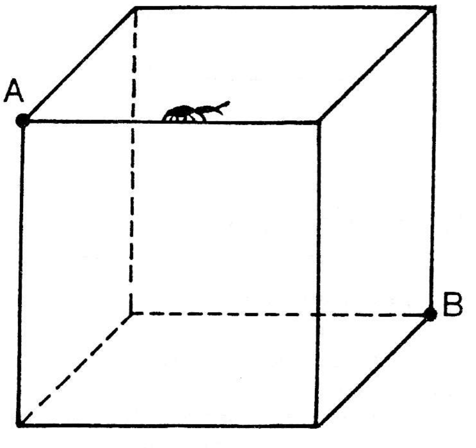
Combien faut-il de cubes pour construire une pyramide de 4 étages ?
de 10 étages ?...

Quelques indications pour chercher
Chaque pyramide de hauteur n est constituée de 4 pyramides à base triangulaire de hauteur n-1, et de n cubes. Donc $S_n = n + 4\,P_{n-1}$

La formule permettant de calculer le nombre de cubes nécessaires pour construire une pyramide à base carrée de hauteur n est :

$$Sn = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

Promenons-nous... sur un cube



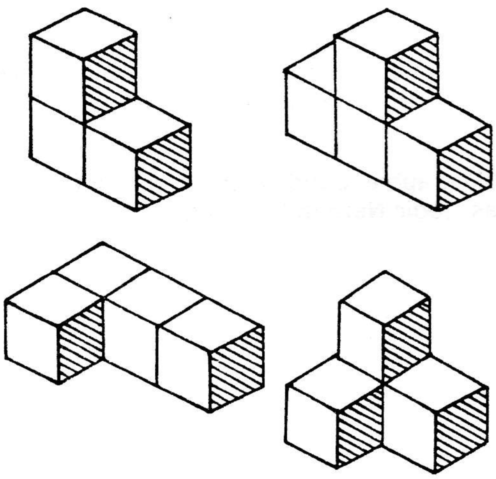
Une fourmi veut aller du point **A** au point **B** en suivant uniquement les arêtes du cube.

Combien y a-t-il de chemins empruntant 3 arêtes? 4 arêtes? 5 arêtes? 6 arêtes?... Que remarquez-vous?

Pouvez-vous trouver un chemin qui permet, en partant de A, de passer une fois et une seule par chacun des sommets et de revenir au point de départ?

Si vous avez du courage, combien y-a-t-il de tels chemins?

Cubes SOMA-TISÉS



Matériel : cubes emboîtables

Les cubes SOMA sont des assemblages de forme irrégulière de plusieurs cubes (4 cubes au plus).

Il y a en tout sept cubes SOMA.

Fabriquez-les!

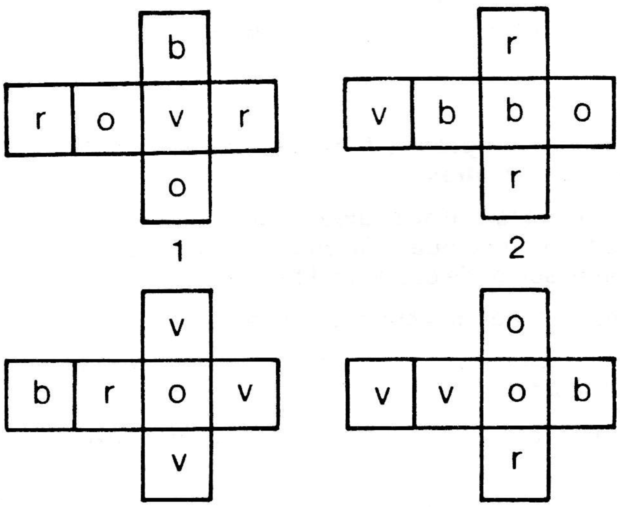
Ces cubes furent inventés par le Danois Piet Hein qui énonça le théorème suivant:

"En assemblant tous les cubes SOMA par leurs faces, on peut former un grand cube".

Vérifiez l'exactitude de ce théorème.

Cubes diaboliques

Matériel : construisez quatres cubes dont les faces sont coloriées de la façon suivante:

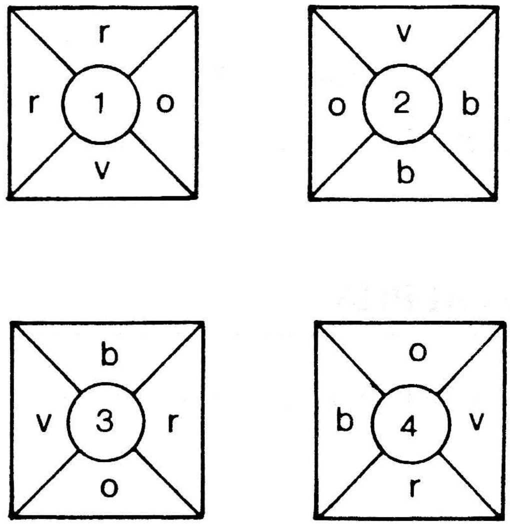


Par exemple: Bleu, Orange, Rouge et Vert.

Construire une tour, ayant un cube pour base, telle que l'on voit sur chacune de ses faces chacune des quatre couleurs.

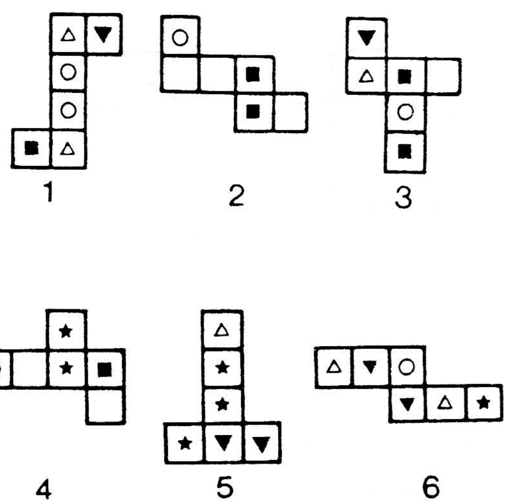
Pour chercher : comptez le nombre total de faces de chaque couleur. Dressez ensuite un arbre en prenant comme critère le choix de la paire de faces cachées sur chaque cube.

Une solution :



Cubes sataniques

Matériel : fabriquez six cubes sur le modèle ci-dessous:



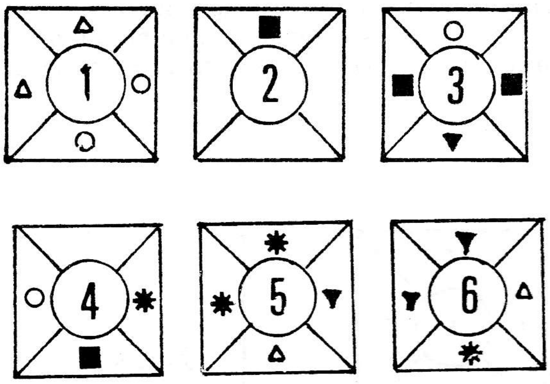
Il s'agit de construire une tour - de 6 étages - de sorte que, comme pour les cubes diaboliques, chacune des couleurs apparaisse sur chacune des faces.

Là encore, aucune règle de juxtaposition n'est à respecter.

C'est Francis GUTMACHER, de Paris, qui a conçu ce jeu dérivé du précédent.

Même méthode de recherche que pour les cubes diaboliques.

Une solution :



Deux versions du jeu sont possibles :

- soit reconstituer un cube (2 x 2 x 2) de sorte que chaque face soit unicolore. Là encore, il n'y a aucune contrainte, ni pour les faces cachées, ni pour les faces voisines qui peuvent même être de couleur identique.

Trouverez-vous plusieurs solutions ?

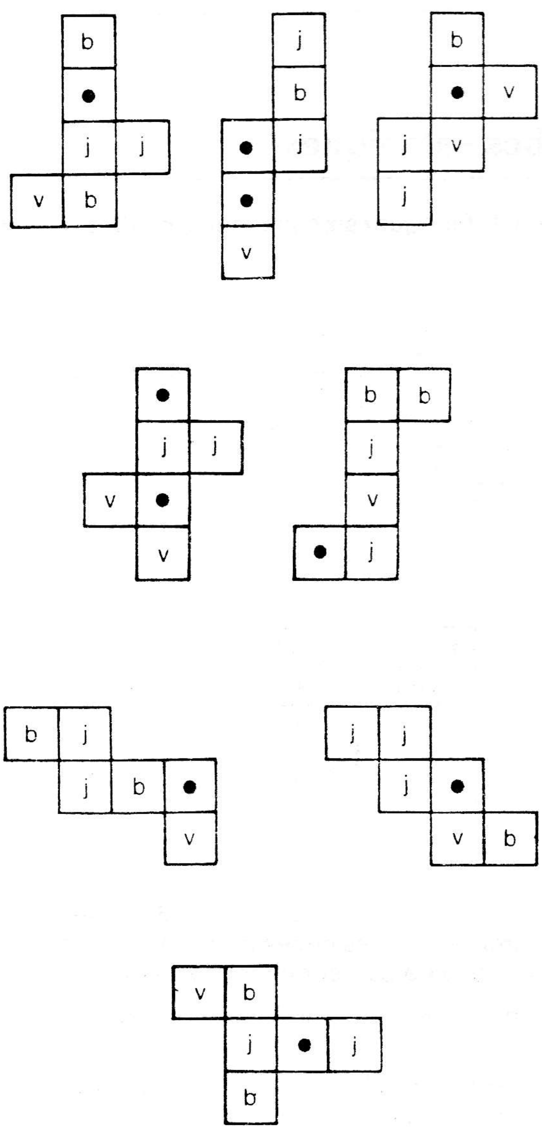
- soit reconstituer un cube (2 x 2 x 2) de sorte que les quatre couleurs figurent sur chaque face (aucune interdiction de voisinage entre les grandes faces du cube construit).

Plusieurs solutions différentes sont possibles. Saurez-vous les noter et les compter ?

Petite bibliographie : Lundi Math n° 4. Cf. PLOT dossiers. Polycubes-Cedic Nathan (distract).

Cubes ALPHA

(jeu publié par la revue est-allemande ALPHA (RDA)



Pour faire le portrait d'un cube
Réunir d'abord vingt-sept cubes de bois de carton ou de polystyrène.
Et puis les assembler soigneusement pour faire un gros cube.
Peindre ensuite quelque chose sur les faces de ce cube, quelque chose qui recouvre tout le bois tout le carton ou tout le polystyrène visible.
Attendre.
Attendre que la peinture soit bien sèche.
Quand elle est sèche, enlever un à un tous les petits cubes et les donner à l'enfant.
Si l'enfant essaie de reconstruire l'objet alors c'est bon signe.
Sinon c'est mauvais signe.
Signe que le problème est mauvais.

Questions à propos du théorème des 4 couleurs et des polyèdres.

Combien faut-il de couleurs pour colorier un cube de façon à ce que 2 faces ayant une arête commune soient de couleurs différentes ?

pour colorier un octaèdre ? un dodécaèdre ?

Parmi les solides de Platon, quels sont ceux qui se satisfont de 3 couleurs ?

Même question pour tous les polyèdres convexes.