

MATH, GEO, et tout le tremblement

par : Maryse BERGER (Hist.Géo)
Pierre CHEVRIER (Maths)

Lycée J.Macé, NIORT.

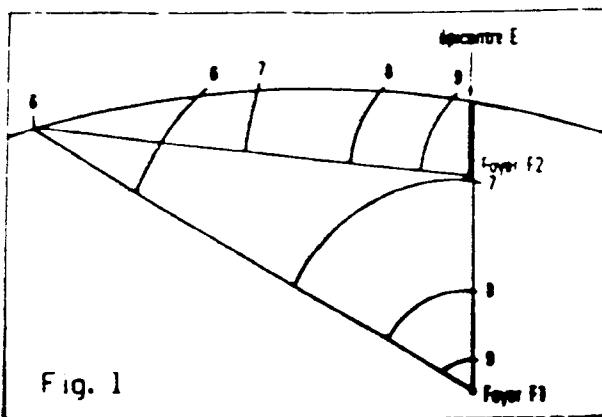
Travaillant en équipe pédagogique avec d'autres collègues dans une classe de seconde, nous avions prévu d'intervenir en commun sur les séismes : leur étude est au programme de géographie, la détermination d'un épicentre peut donner lieu à un travail intéressant en math ; cf. l'article n° 19 de Lucien Augé dans (1).

Les élèves ont commencé, en cours de géographie, à travailler sur les pages "documents et travaux", relatives aux séismes, de leur manuel (2). L'un de ces documents posa problème et fut à l'origine du travail que nous présentons dans cet article.



- Dans quel cas l'intensité du séisme en surface est-elle la plus forte ? Pourquoi ?
- Pourquoi dans le séisme du foyer F1, l'intensité en surface diminue-t-elle plus lentement quand on s'éloigne de l'épicentre E ?

Notre intervention a été pluridisciplinaire effectuée ensemble dans le même temps et le même lieu. Son caractère fortuit fait qu'elle n'a pas été perçue comme artificielle par les élèves et a été bien acceptée, d'autant qu'elle a répondu à un besoin. Le problème sismique avait secoué certains d'entre eux, provoquant même chez quelques-uns des tremblements d'une forte intensité ; d'autres, plus rares y avaient dépensé toute leur magnitude et n'avaient plus aucune énergie ; il fallait donc y remédier.



Aucune connaissance approfondie n'est nécessaire à la compréhension de la suite. Pour une meilleure connaissance des phénomènes sismiques, nous renvoyons à la lecture de (3) ou (4).

Voici le schéma en question (fig.1) :

Nous avons procédé avec les élèves à une analyse critique de ce document ; puis après que la question ait pu être reformulée de façon plus précise, une démonstration simple de la réponse a pu être présentée par le prof. de math :

1) L'épicentre est, par définition, le point à la surface du globe terrestre, situé à la verticale du foyer. Le foyer est l'endroit où se produit le choc initial, plus ou moins profond :

- 1) Ce n'est pas le cas sur le dessin, où la droite passant par le foyer et l'épicentre est seulement une verticale de la page du livre !
- 2) Aucune explication n'est donnée sur ce que représentent "les lignes autour des foyers".

Tout le monde c'est facilement accordé à penser qu'il s'agit de lignes d'égales intensités (l'intensité mesurant l'importance des secousses). La terre étant représentée ici en coupe, en volume cela donne des surfaces d'égales intensités.

Ceci étant admis, on ne sait pas comment sont construites ces lignes.

- 3) Il faut donc interpréter. Ces lignes semblent être des arcs de cercles centrés aux foyers. Vérification au compas : gagné ... presque :

"La ligne 9 autour de F_2 " fait manifestement exception, et c'est très approximatif pour "les lignes 6 et 9 autour de F_1 ".

Malgré les irrégularités, le schéma permet de formuler la première hypothèse :

(H₁) L'intensité est la même pour des points situés à une même distance du foyer.

C'est une hypothèse simplificatrice, pédagogiquement louable, encore faut-il la préciser ! Elle correspond à certaines conditions géologiques théoriques (nature homogène du sous-sol, ...).

- 4) L'observation des distances entre les lignes permet de constater, même si elles sont irrégulières, que :

Les distances entre les lignes d'intensités 8 et 9, de même qu'entre les lignes d'intensités 7 et 8 sont les mêmes pour les séismes de foyers F_1 et F_2 , ce qui correspond sur le schéma (fig.2) aux égalités :

$$C_1 D_1 = C_2' D_2' \quad / \approx$$

$$B_1' C_1' = B_2' C_2'$$

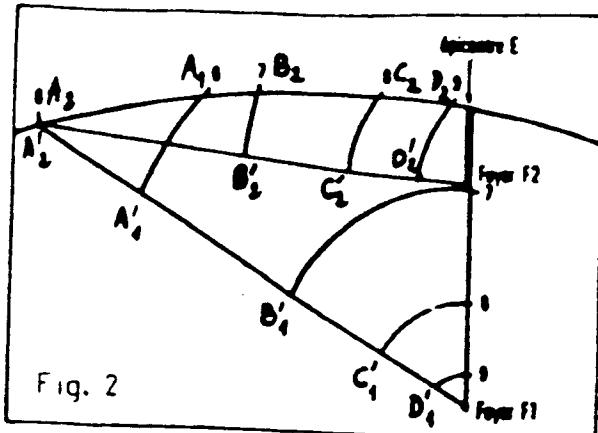


Fig. 2

d'où les nouvelles hypothèses :

(H₂) Les séismes de foyers F_1 et F_2 ont même magnitude (l'énergie libérée est la même).

(H₃) La différence des rayons des cercles (en coupe, en volume, des sphères) d'intensités i et $i+1$ centrés au foyer ne dépend pas de la profondeur du foyer d'un séisme de magnitude donnée.

Bien qu'elles soient contredites par deux autres défauts du dessin : $A_1' B_1' < A_2' B_2'$ (la distance de la ligne 6 à la ligne 7 n'est pas la même) et $F_1 D_1' < F_2 D_2'$.

- 5) Les (courbes) isoséistes sont les courbes des points de même intensité en surface.

Les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃) faites donnent, en surface, des isoséistes circulaires qui, en projection (sur le plan tangent à l'épicentre au globe terrestre), sont des cercles centrés en E, épicentre commun aux deux séismes de foyers F_1 et F_2 . Ce qui pourrait donner, la vue de dessus suivante : (fig.3).

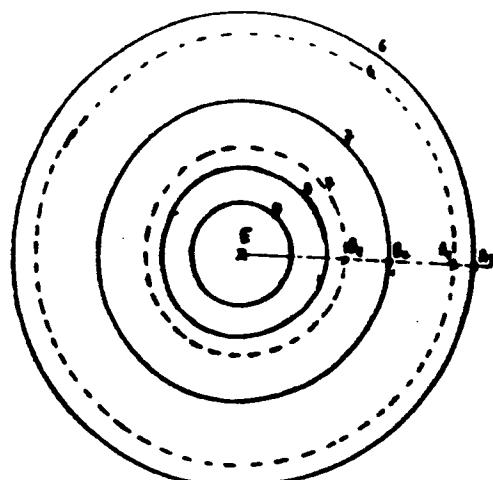


Fig. 3 les isoséistes en trait plein correspondent au foyer F_2 , les isoséistes en pointillés au foyer profond F_1 .

6 A ce stade du travail, la deuxième question accompagnant le schéma fig.1 a pu être reformulée de façon plus précise :

"Pourquoi la distance $A_1 B_1$ entre les courbes isoséistes 6 et 7 correspondant au séisme de foyer profond F_1 est-elle supérieure à la distance $A_2 B_2$ des isoséistes 6 et 7 correspondant au séisme de foyer moins profond F_2 ?"

On peut, bien sûr, généraliser, en remplaçant 6 et 7 par i et $i+1$ (i pouvant varier), ou même i et i' ($i < i'$).

Notons que, sur le schéma du livre (fig.1), la comparaison ne peut se faire ; seule la ligne 6 autour de F_1 coupe la surface terrestre, la ligne 7 ne la coupant pas. Ainsi, sur la figure 2 où les points de la figure 1 ont été nommés, le point A_1 existe bien, mais pas le point B_1 .

7 Pour répondre simplement à la question ainsi reformulée, nous supposerons que :

(H_4) la surface d'étude des isoséistes est plane.

Cette hypothèse est légitimée par le fait que la profondeur du foyer d'un séisme ne dépassant pas $1/8$ de rayon de la terre, la courbure de la surface contenant les isoséistes de plus fortes intensités est faible,

beaucoup plus faible que sur le dessin !

8 Reprenant l'idée du schéma du livre, et compte tenu des hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) , cela donne le schéma (fig.4).

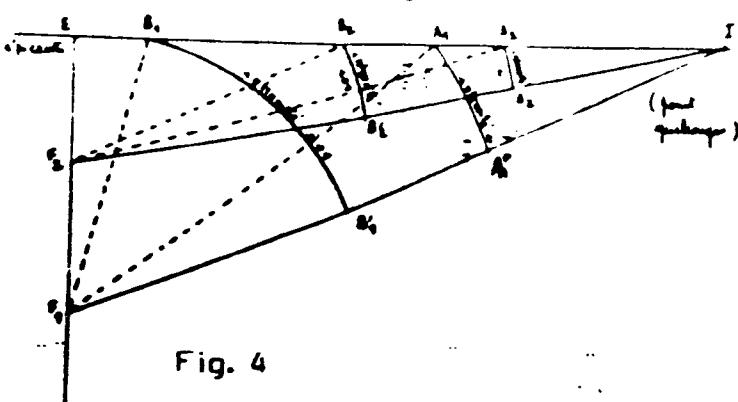


Fig. 4

On a les égalités :

$$F_1 B_1 = F_1 B'_1 = F_2 B'_2 = F_2 B_2 \text{ (intensité } i+1\text{)}$$

$$F_1 A_1 = F_1 A'_1 = F_2 A'_2 = F_2 A_2 \text{ (intensité } i\text{)}$$

$$\text{et l'inégalité } EF_1 > EF_2$$

- Démontrons d'abord que l'isoséiste d'intensité i est plus éloignée dans le cas du foyer moins profond F_2 . Cela revient à établir $EA_2 > EA_1$:

Le théorème de Pythagore nous donne dans les triangles rectangles $EA_1 F_1$ et $EA_2 F_2$:

$$F_1 A_1^2 = EF_1^2 + EA_1^2 \text{ et } F_2 A_2^2 = EF_2^2 + EA_2^2$$

$$\text{d'où, puisque } F_1 A_1 = F_2 A_2,$$

$$EF_1^2 + EA_1^2 = EF_2^2 + EA_2^2, \text{ égalité équivalente à}$$

$$(1) EA_2^2 - EA_1^2 = EF_2^2 - EF_1^2$$

Comme $EF_1 > EF_2$, il en résulte

$$EA_2 > EA_1$$

- En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles $EB_1 F_1$ et $EB_2 F_2$, on obtient, de façon analogue, l'égalité

$$(2) EB_2^2 - EB_1^2 = EF_2^2 - EF_1^2$$

$$\text{d'où il résulte aussi } EB_2 > EB_1$$

On déduit de 1) et 2) que :

$$EA_2^2 - EA_1^2 = EB_2^2 - EB_1^2,$$

donc aussi bien :

$$EA_2^2 - EB_2^2 = EA_1^2 - EB_1^2,$$

soit encore :

$$EA_2 \cdot EA_2 - EA_2 \cdot EB_2 = EA_1 \cdot EA_1 - EA_1 \cdot EB_1, \text{ ou :}$$

$$(3) A_2 B_2 \cdot (EA_2 + EB_2) = A_1 B_1 \cdot (EA_1 + EB_1)$$

Or les inégalités $EA_2 > EA_1$ et

$EB_2 > EB_1$ impliquent

$EA_2 + EB_2 > EA_1 + EB_1$. Cette dernière inégalité, conjuguée avec (3), prouve que :

$$A_2 B_2 < A_1 B_1,$$

ce qui répond à la question posée en (6).

Epilogue pour mathématiciens :

Trouver une démonstration du résultat accessible aux élèves de seconde, sans faire l'hypothèse (H_4) .

Le problème se pose ainsi :

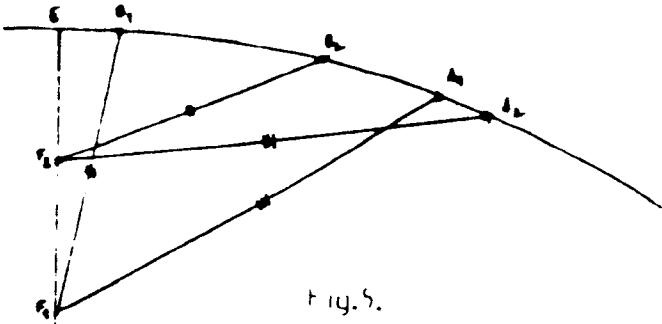


fig. 5.

Les points E, B_1, B_2, A_1, A_2 sont sur un même quart de cercle dont l'une des extrémités est E . O désignant le centre du cercle, F_1 et F_2 sont sur le rayon $[OE]$ et tels que $EF_1 > EF_2$

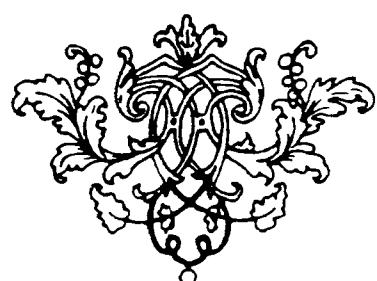
On a les égalités $F_1B_1 = F_2B_2$;

$$F_1A_1 = F_2A_2$$

Il s'agit d'établir que $A_2B_2 < A_1B_1$ ce qui équivaut à l'inégalité des longueurs des arcs.

BIBLIOGRAPHIE.

- (1) Mathématique active en seconde (brochure n°43 de l'APMEP).
- (2) Géographie du temps présent. GREHG seconde. Hachette.
- (3) Séismes et volcans : Fascicule n° 217 de la collection "Que sais-je ?".
- (4) Les tremblements de terre. Bibliothèque "Pour la Science". Diffusion Belin.



Mots Croisés

Michel Labrousse

Horizontalement

- I. Sertent au repérage
- II. N'est pas pour autant imaginaire ! - Pronom.
- III. Publie - Précede Bator en Marquise
- IV. Fonction abracadabre - Possessif
De tels bancs et bancs sont difficiles
- V. Nuptialion - Farce
- VI. Période - Cint des os
- VII. Image - être sans cette ! - Nombre - Ecole
- VIII. Sert à dessiner - Sert à repérer

Verticalement

1. Ensemble de points...lumineux
Va parfois avec la manière
2. Sert au repérage
3. Sert à repérer
4. Début d'une retenue ou fin d'un prénom
Roi d'Israël
5. Se perd bien que son port reste
6. Deux d'Orléans - Dr symbolique - Coutumes
7. Utilisé par le mathématicien qui conclut
8. Nombre
9. Coniques
10. Ruminant - Vont avec les autres
11. Une direction en fournit deux - Puissance
Automobile

