de GALION à BERNOUILLI

La somme des puissances kièmes de n premiers entiers.

Michel CLINARD - Olivet

Dans cet article, l'auteur, à partir d'activités sur les puissances en classe de 5ème nous propose une promenade dans l'histoire des nombres de Bernouilli et des idées d'activités pour des élèves du Second cycle.

Galion, point de départ.

Préparant quelques activités sur les puissances en 5ème, mon attention est retenue par les exercices suivants :

(28) Calcule : 1^2

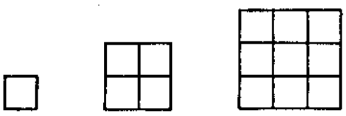
$1^2 + 2^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

La figure (1) est formée d'un carré de côté 1.
Dans la figure (2), on voit cinq carrés (quatre carrés de côté 1 et un carré de côté 2).
Sur la figure (3), combien voit-on de carrés?



(1) (2) (3)

Continue en dessinant les figures (4) et (5); combien y a-t-il de carrés dans chacune d'elles?

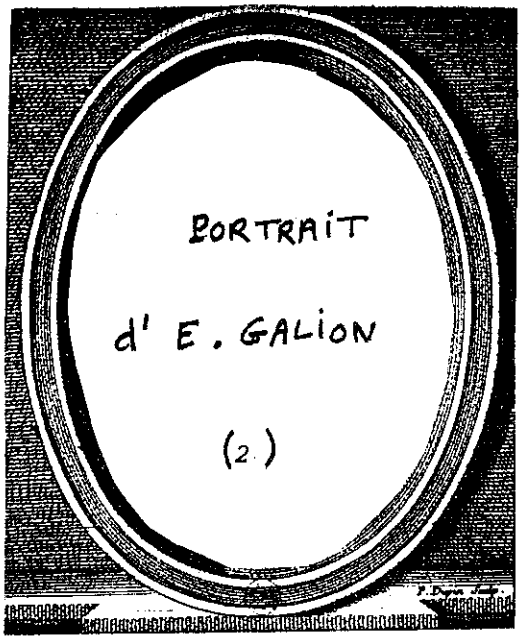
(29) Calcule :

$1^3 + 2^3$	$(1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3$	$(1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	$(1 + 2 + 3 + 4)^2$

Que remarques-tu?

(1)

Ayant, depuis toujours, perdu le livre du maître, les auteurs ne peuvent me convaincre de l'intérêt du comptage des petits carrés et je préfère donc en rester aux aspects d'abord purement numériques,



puis plus algébriques avec la recherche de formules en rappelant une égalité souvent abordée en 6ème relative à la somme de n premiers entiers, que nous noterons ici pour plus de simplicité

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

On obtient alors sans difficulté

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2 x (n+1)^2}{4}$$

Les carrés posent plus de problème et amènent un véritable travail de recherche, on peut faire remarquer aux élèves la présence des facteur n et n+1 dans les formules précédentes, certains penseront à introduire le diviseur 3 pour trouver avec plus ou moins d'aide et de rapidité

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n \times (n+1) x (n+0,5)}{3}$$

On en reste là en 5ème et ce n'est déjà pas si mal.

L'enseignant ou les grands élèves peuvent alors se poser la question : "Existe-t-il une formule générale pour les autres puissances ?"

(1) page 78 du manuel de la classe Galion 3e édition 1978

(2) ce portrait semble aussi difficile à trouver que celui de N. Bourbaki

A la recherche d'une formule générale.

N'ayant pas de souvenirs universitaires précis sur ce sujet, ne trouvant aucun résultat dans les chapitres relatifs aux séries et aux suites de mes vieux CAGNAC-RAMIS-COMMEAU ou COUTY-EZRA, s'atteler aux calculs semble la seule issue : à grands renfort de polynômes, de systèmes d'équations, et de calculette pour finir on trouve :

exposant k	*somme des puissances kièmes des n premiers entiers*		
k = 1	$\frac{n\times(n+1)}{2}$	=	$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$
k = 2	$\frac{n\times(n+1)\times(n+0{,}5)}{3}$	=	$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{2n}{12}$
k = 3	$\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$	=	$\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{2}$
k = 4	$\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)\times(3n^2+3n-1)}{30}$	=	$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{4n^3}{12}-\frac{n}{30}$
k = 5	$\frac{n^2\times(n+1)\times(2n+1)\times(2n^2+2n-1)}{12}$	=	$\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$
k = 6	$\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)\times(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$	=	$\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{6n^5}{12}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$

Montrons-nous généreux en n'imposant pas aux secrétaires la frappe des résultats pour k=7 et k=8.

On peut déjà remarquer que la forme factorisée est peu exploitable, et que la forme développée permet d'envisager une formule générale en particulier avec les trois premiers termes, la suite est plus problématique ; c'est pourquoi nous allons changer de méthode :

Au regard des résultats précédents, il n'est pas déraisonnable d'envisager l'hypothèse suivante :

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = A_{k+1}n^{k+1} + A_k n^k + \dots A_2 n^2 + A_1 n$$

en considérant alors l'égalité

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = \sum_{x=1}^{n-1} x^k + n^k$$

c'est à dire :

$$A_{k+1}\, n^{k+1} + A_k n^k + \dots + A_1 . n =$$
$$A_{k+1}(n-1)^{k+1} + A_k(n-1)^k + \dots + A_1(n-1) + n^k$$

en développant les binômes $(n-1)^i$ avec $2 \leqslant i \leqslant k+1$ et en identifiant les coefficients des différentes puissances de n on obtient le système suivant qui permet d'obtenir tous les coefficients A_i à partir de A_{k+1} :

$$\boxed{\begin{aligned}
A_1-A_2+A_3-A_4+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{0}A_{k+1}&=0\\
2A_2-3A_3+4A_4+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k+1}{1}A_{k+1}&=0\\
3A_3-6A_4+\cdots+(-1)^{k-2}\binom{k+1}{2}A_{k+1}&=0\\
\vdots\qquad\qquad&\vdots\\
\binom{k}{k-1}A_k-\binom{k+1}{k-1}A_{k+1}&=0\\
\binom{k+1}{k}A_{k+1}&=1.
\end{aligned}}$$

Ce procédé récursif ne me satisfait pas, ce n'est pas la "belle formule" que j'espère ; sur le conseil d'un collègue, je m'engage dans la lecture de "The American Monthly" et y découvre deux choses :

1) l'esprit de Pascal reste toujours présent dans la revue* des A_i. Si on prend par exemple k=6 et en utilisant les notations matricielles le système précédent s'écrit :

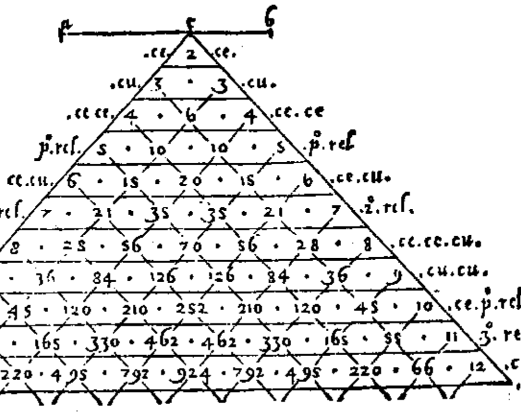
$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7\\
 & & 3 & -6 & 10 & -15 & 21\\
 & & & 4 & -10 & 20 & -35\\
 & & & & 5 & -15 & 35\\
 & 0 & & & & 6 & -21\\
 & & & & & & 7
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\\A_6\\A_7\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Prenez alors la matrice carrée, effectuez une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ rajoutez une diagonale de 1 "à gauche", modifiez l'alternance des signes pour obtenir des naturels, appréciez : Vous venez de faire apparaître un triangle de Pascal.

Un peu honteux de mon manque de perspicacité, je passe rapidement au point suivant.

2) le coefficient A_1 obtenu pour la somme $\sum_{x=1}^{n} x^k$ est le kième nombre de BERNOUILLI noté B_k, dans l'exemple précédent on a $A_1 = \frac{1}{42} = B_6$. Voilà qui ouvre des horizons nouveaux.

** Toute allusion à l'ex-directeur de cette publication n'est pas involontaire.*



LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DANS LE « GÉNÉRAL TRATTATO » DE TARTAGLIA.

<u>Jacques BERNOUILLI</u> (1657-1705).

De père en fils, d'oncle à neveu la famille BERNOUILLI entre en force dans celle des mathématiciens. Les frères Jean et Jacques sont les plus célèbres (séries infinies, équations différentielles, lemniscate, mécanique....)

Jacques nous intéresse plus particulièrement pour son traité "Ars conjectandi" publié 8 ans après sa mort. Dans la seconde partie consacrée à la théorie des permutations et des combinaisons on peut noter :

La somme d'un nombre fini de termes de la série des nombres figurés à une puissance c-ième est donnée par :

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c-1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1}$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4} B n^{c-3}$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6} C n^{c-5}$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8} D n^{c-7}$$

et ainsi de suite, les exposants de n décroissant continuellement par sauts de 2 jusqu'à n ou n^2.

Les coefficients A,B,C sont aujourd'hui appelés nombres de BERNOUILLI, voici la liste des premiers : $B_{2p+1} = 0$, $p \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	4	6	8	10	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

n	14	16	18	20
B_n	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

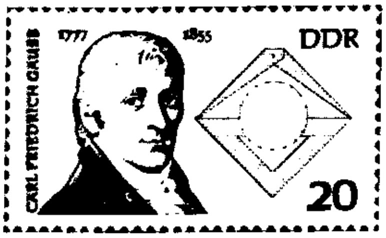
Jacques BERNOUILLI

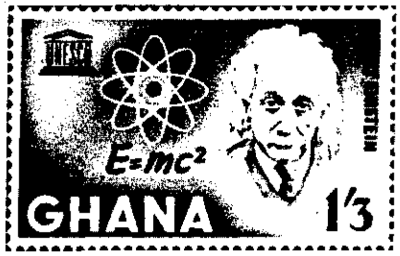
Nous voilà donc en mesure de formuler "joliment" la somme qui nous intéresse depuis le départ :

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - B_1 n^k + \frac{1}{2}\binom{k}{1} B_2 n^{k-1} + \frac{1}{4}\binom{k}{3} B_4 n^{k-3} + \frac{1}{6}\binom{k}{5} B_6 n^{k-5} + \dots$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{1}{i}\binom{k}{i-1} B_i n^{k-i+1}$$

Cette formule n'a d'intérêt que si n est plus grand que k, à ce propos BERNOUILLI déclare qu'il a pu calculer la somme de 1000 premiers nombres naturels élevés à la puissance 10 en <u>moins de 10 minutes</u> ! Encore une fois je suis né trop tard : mon avenir de chercheur en mathématiques est trois siècles derrière moi.





Place des nombres de BERNOUILLI dans les mathématiques.

James STIRLING (1692-1770) s'intéressa aux nombres de BERNOUILLI, il donne les cinq premiers et une formule de récurrence pour trouver les successeurs, il les utilise dans l'écriture de la série qui porte son nom et qui définit Log(n!).

Certaines séries de TAYLOR (1685-1731) les font apparaître avec quelques artifices ($\text{cotg}x, \frac{1}{\sin x}$) à titre d'exemple donnons

$$\text{tg}x = \sum_{m \geqslant 1} B_{2m} \frac{(-1)^{m+1} \times (2^{2m}-1)}{(2m)!} x^{2m-1}$$

Avec les travaux de POISSON (1781-1840), les nombres de BERNOUILLI semblent définitivement liés aux séries et à l'analyse, pourtant on les retrouve en théorie des nombres avec la fonctions Zéta de RIEMANN

($\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$) importante pour ses applications relatives à la répartition des nombres premiers : on a en particulier

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \Pi^2 B_2 \ ; \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\Pi^4}{4} B_4$$

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{\Pi^{2p}}{2(2p)!} B_{2p}$$

On retrouve avec plaisir le nombre Π que l'on limite trop souvent aux rondeurs géométriques.

Actuellement les nombres de BERNOUILLI sont souvent définis à partir du développement en série entière de

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{t^n}{n!}$$

qui n'est qu'un cas particulier de la formule de sommation d'EULER-MACLAURIN qui intervient en calcul intégral.

Un autre cas particulier permet de définir les polynômes de BERNOUILLI :

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n(x) \frac{t^n}{N!} \quad (B_n(1) = B_n)$$

leurs propriétés peuvent être utilement étudiées à titre d'exercices ou de problème par des élèves de second cycle, le lecteur intéressé peut se reporter aux ouvrages cités plus loin (Intégrale, p.189 et Analyse combinatoire T1, p.60). Ils permettent de démontrer assez facilement (Analyse combinatoire T1, p.165) la formule générale donnant la somme

$$\sum_{x=1}^{n} x^k$$

qui nous intéresse.

Enfin un collègue me signale que les nombres de BERNOUILLI interviennent dans certains dénombrements, en particulier dans celui utilisé par les enfants pour savoir qui sera encore de corvée : *"Pouf Pouf ceu neu seura pas toi qu'y t-y colleuras"* On recommence avec un enfant de moins*.

Toute contribution sur ce sujet sera la bienvenue.

Retour en classe.

La somme des puissances kièmes de n premiers entiers semble pouvoir être exploitée en classe à plusieurs niveaux :

- Vérification de la formule dans des cas particuliers permettant de manipuler les nombres, de développer les techniques de calcul
- Recherche d'une formule par induction
- Démonstration par récurrence
- Calculs et démarches en analyse (voir ci-dessus).

Aux petits curieux qui demandent "à quoi ça sert ?" il semble bien difficile pour rester concret et accessible, de proposer autre chose que quelques exemples simples de dénombrement en espérant qu'ils s'en contenteront (le PLOT attend vos idées).

Suite de l'article page 25

Supposons que le QI d'un enfant soit, à 5 ans, de 110 ; que pouvons-nous dire de son QI à 16 ans ? Simplement qu'il est compris, avec une probabilité de 95%, dans la plage 90-126.

Le moins que l'on puisse dire, est qu'une telle conclusion n'apporte guère d'information.

> **59 % des français jugent utile la publication des sondages.**
> Un sondage sur *les* sondages, publié dans Le Matin de mercredi révèle que 59 % des français jugent utile la publication des sondages et que 56 % d'entre eux font confiance à leurs résultats.
>
> Réalisé par l'institut Harris-France, entre le 30 janvier et le 2 février, auprès d'un échantillon de 1000 personnes âgées de dix-huit ans et plus, le sondage fait apparaître que, notamment sur les problèmes politiques, 13 % des personnes interrogées estiment que les sondages sont très utiles et que 46 % d'entre elles les jugent assez utiles. 24 % des personnes les considèrent peu utiles et 12 % pas du tout.
>
> Sur la crédibilité des sondages, 56 % des personnes interrogées font confiance au résultat du sondage (7 % leur font très confiance, 49 % leur font assez confiance). 28 % ne leur accordent que peu de confiance, tandis que 11 % des personnes interrogées ne leur font pas confiance du tout.
>
> *(La Montagne, Février 1980)*

Il faut un certain aplomb, ou une certaine inconscience, pour voir là une prédiction d'une "remarquable précision". Une cartomancienne n'obtenant que de si piètres performances risquerait de faire faillite.

Nous sommes ici face à un cas typique d'utilisation de l'argument d'autorité camouflé par un langage d'apparence mathématique. Le pouvoir intimidant des formules et des nombres sert à assener des affirmations idéologiques en les faisant passer pour des résultats rigoureusement démontrés.

Les mathématiciens inventent des outils toujours plus efficaces pour disséquer les résultats des observations. Que ne prennent-ils la précaution d'insister sur les limites de leur emploi ! Certains chercheurs en sciences sociales s'imaginent que leurs conclusions sont "scientifiques" lorsqu'ils ont employé pour y parvenir des outils mathématiques sophistiqués. Mais il ne suffit pas de prendre en main un bistouri même ultra moderne, pour se transformer en chirurgien.

Suite de la page 22 : de GALION à BERNOUILLI

par Michel CLINARD - Olivet

Face à ceux qui vous feront remarquer que la formule générale est bien plus compliquée que la somme de départ même si elle a moins de termes, qu'il faut connaître les valeurs des nombres de BERNOUILLI et que de toutes manières on trouve par itération très facilement et très rapidement les sommes souhaitées avec n'importe quel micro-ordinateur, voire n'importe quelle calculette programmable si on n'est pas trop exigeant, ...

Face à ces élèves franchement vicieux,

Ne mollissez pas, soyez imaginatif et rapide, entraînez-vous par avance si c'est nécessaire, il y va peut être de l'avenir de l'enseignement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

The American Mathematical Monthly
Volume 87, n° 6, june-july 80.

Histoire des Mathématiques T2
J.P. COLLETTE, Vuibert ERPI

L'intégrale
Paul DEHEUVELS, PUF

Analyse Combinatoire, T1 et 2
L. COMTET, PUF Sup.

Theory of Numbers
DICKSON, Volume 1, Chelsea

Les nombres remarquables
F. Le Lionnais, Hermann

Tous ces livres sont à la bibliothèque de l'IREM d'ORLEANS.