

Coniques et Pliages

DEMONSTRATION PAR LE PLIAGE DES THEOREMES
DE PONCELET SUR LES TANGENTES AUX CONIQUES.

par Jacques JUSTIN - Sceaux.

Plier du papier n'est pas qu'un jeu d'enfant. On peut trouver certains théorèmes de géométrie en utilisant la technique du pliage et les démonstrations obtenues ne sont pas qu'une simple paraphrase d'un discours géométrique, le pliage remplaçant la symétrie orthogonale. C'est ce que nous démontrons ici l'auteur, Jacques JUSTIN, un des principaux animateurs du M.F.P.P. ... Mouvement Français des Pliés de Papier qui édite une revue **LE PLI** qui ne manquera pas d'intéresser les lecteurs du PLOT et surtout les souscripteurs aux suppléments PLOT-MATERIEL 84 sur PLIAGES (le premier numéro paraîtra en mai-juin.... 84 !).

Un conseil : Lire ce texte passionnant ne suffit pas. Préparez une feuille de papier disposée à être pliée pendant la lecture.

1. INTRODUCTION.

A l'époque où la géométrie plane traditionnelle faisait partie de l'enseignement secondaire en France, le pliage de papier était plus ou moins utilisé pour "prouver" quelques propriétés simples, par exemple celles du triangle isocèle, ou encore l'existence et l'unicité de la perpendiculaire menée d'un point à une droite. Les "démonstrations" ne faisaient d'ailleurs que calquer des démonstrations purement géométriques, le concept de symétrie par rapport à une droite étant remplacé par celui de pliage selon la même droite.

Notre but est de prouver par le pliage des résultats plus difficiles, les théorèmes de PONCELET sur les tangentes aux coniques bifocales. Les preuves sont simples et leurs relations avec les preuves purement géométriques ne sont pas évidentes.

Théorème de PONCELET

Soient T et T' les points de contact des tangentes issues d'un point P à une ellipse ou une hyperbole de foyers F et F' . Alors

- 1) FP est une bissectrice de $\widehat{TFT'}$ et $F'P$ est une bissectrice de $\widehat{TF'T'}$.
- 2) Les angles $\widehat{TPT'}$ et $\widehat{FPF'}$ ont mêmes bissectrices. (Figure 1).

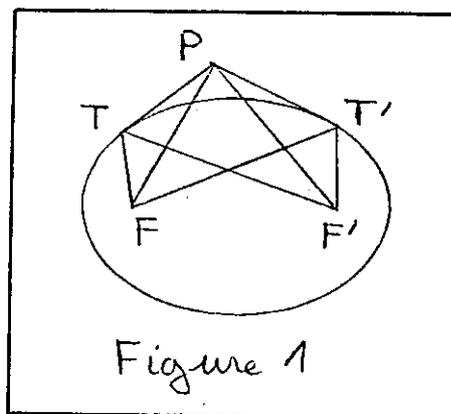


Figure 1

2. PRELIMINAIRES.

Soit (figure 2) une feuille de papier de forme quelconque.

Marquons, à l'intérieur, un point O et trois demi-droites OX , OY , OZ . Si nous plions le papier suivant ces trois demi-droites et que nous l'aplatissons pour obtenir le résultat de la figure 3, il se forme un pli suivant une quatrième demi-droite OW . Parmi les plis OX , OY , OZ , OW , trois seront des plis vallée (en creux) et une montagne (en relief), ou bien trois montagnes et une vallée.

Dans tous les cas possibles, on obtiendra la forme de la figure 3, mais l'ordre de superposition des couches de papier variera.

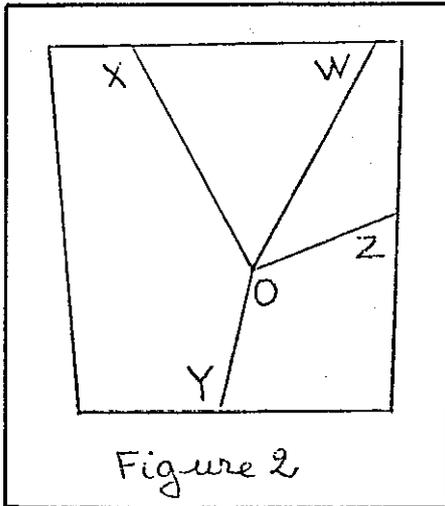


Figure 2

Considérons dans la figure 2 une demi-droite d'origine O qui tourne dans le sens direct en balayant successivement les angles \widehat{XOY} , \widehat{YOZ} , \widehat{ZOW} , \widehat{WOX} .

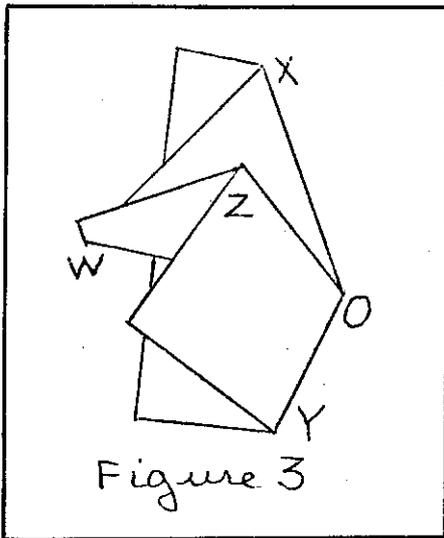


Figure 3

Dans la figure 3, cette même demi-droite balayera encore \widehat{XOY} et \widehat{ZOW} dans le sens direct, mais elle balayera les angles \widehat{YOZ} et \widehat{WOX} dans le sens rétrograde, car le pliage a retourné le papier correspondant à ces angles. Comme la demi-droite part de OX pour revenir à OX et n'a pas fait un tour complet autour de O, on a :

$$\widehat{XOY} - \widehat{YOZ} + \widehat{ZOW} - \widehat{WOX} = 0$$

Par ailleurs (figure 1) :

$$\widehat{XOY} + \widehat{YOZ} + \widehat{ZOW} + \widehat{WOX} = 2\pi$$

On en déduit :

$$1) \quad \widehat{XOY} + \widehat{ZOW} = \widehat{YOZ} + \widehat{WOX} = \pi$$

La relation (1) a une conséquence intéressante. Reprenons le papier déplié et traçons, par exemple, la demi-droite OZ' opposée à OZ . Comme $\widehat{Z'OY} + \widehat{YOZ} = \pi$, on obtient en tenant compte de (1) :

$$2) \quad \widehat{WOX} = \widehat{Z'OY} \text{ (figure 4).}$$

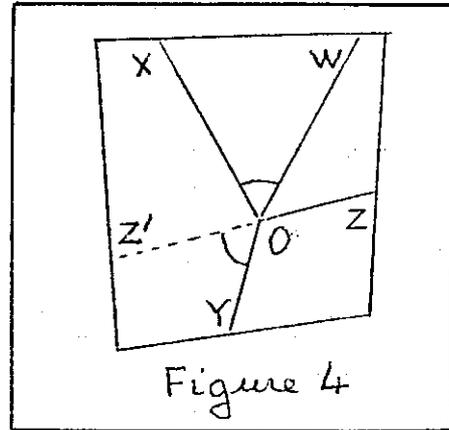


Figure 4

Remarque.

La formule (1) se généralise facilement au cas où le papier est plié (et aplati) suivant $2n$ demi-droites issues de O. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ sont les angles successifs formés par ces demi-droites on a :

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi$$

3. DEMONSTRATION POUR L'ELLIPSE

Soit AB un segment de droite tracé sur une feuille de papier de forme quelconque. Pour simplifier un peu les dessins et faciliter le pliage nous supposons que AB est un bord du papier (figure 5). Soit XX' une droite qui coupe AB en un point M entre A et B. Plions par un pli vallée selon XX' , ce qui amène A en A' (figure 6).

On a $MA' + MB = AB$. Donc M appartient à l'ellipse (E) de foyers A' et B dont le grand axe a pour longueur AB. En raison du pliage, MX est bissectrice extérieure de $\widehat{BMA'}$, donc MX est tangente en M à (E).

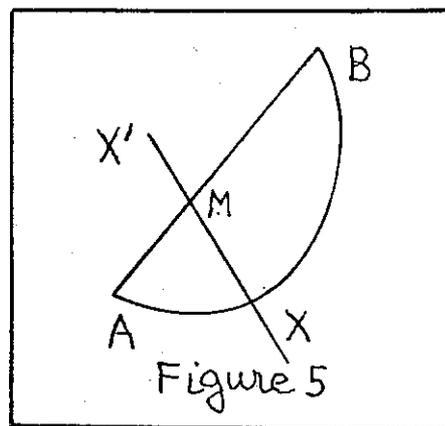
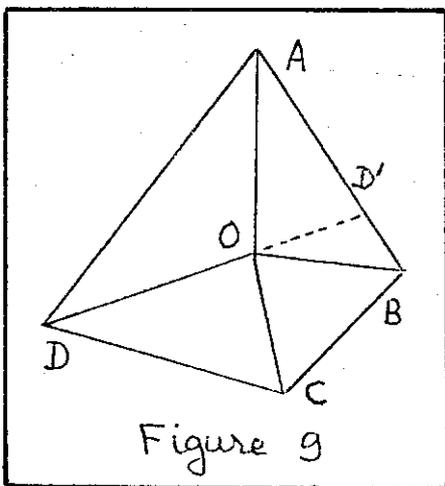


Figure 5

Dans ce but, plions un papier selon quatre demi-droites issues d'un même point O comme dans les figures 1 et 2. Avec des ciseaux coupons, en ligne droite, le papier plié, en nous plaçant assez près du point O pour que la coupure ne rencontre pas le bord du papier. En dépliant, nous obtenons (figure 9) un quadrilatère $ABCD$, convexe ou concave. Les segments OA , OB , OC , OD représentent les plis. Puisque les quatre côtés du quadrilatère étaient en coïncidence avant de déplier on a évidemment :

- AO est bissectrice intérieure de DAB et ainsi de suite.
- O est à la même distance des quatre côtés.
- $AB+CD=BC+DA$



Incidemment, remarquons que nous avons vérifié, par le pliage, les propriétés des quadrilatères qui admettent un cercle inscrit intérieurement.

La relation entre les côtés donne $AB-AD = CB-CD$

Par conséquent A et C sont sur la même branche d'une hyperbole de foyers B et D . Les tangentes en A et C sont les bissectrices AO et CO de BAD et BCD . La première partie des théorèmes de PONCELET se vérifie immédiatement : BO et DO sont bissectrices de ABC et de ADC . La seconde partie affirme que AOC et BOD ont même bissectrices. Prolongeons OD en OD' . La relation 2) donne $AOD' = BOC$. Il en résulte que la bissectrice intérieure de AOC est bissectrice intérieure de $D'OB$, c'est-à-dire bissectrice extérieure de BOD .

5. COMMENTAIRE.

Dans les démonstrations, nous avons choisi les points et les plis. Il aurait été plus satisfaisant de partir d'une configuration donnée de la conique et de ses tangentes, et de montrer qu'on peut réaliser cette configuration par pliage. Cela aurait été possible, et facile, mais fastidieux. A défaut, contentons-nous de remarquer que les configurations de pliage utilisées dépendent de 4 paramètres, tout comme les configurations du théorème de PONCELET.

Les démonstrations ne mettent pas en jeu le postulat d'EUCLIDE sur les parallèles. Elles restent valables en géométrie hyperbolique.

LE PLI - Revue éditée par le
Mouvement Français des
Pliés de Papiers, 30 rue
des Vinaigriers, 75010 PARIS
Abonnement annuel : 70F



Jean Victor PONCELET (1788-1867)
né à METZ le 1er Juillet 1788, il fût
étudiant de MONGE à l'Ecole polytech-
nique puis à l'Académie militaire de
Metz.

Participant à la campagne napoléonienne
de Russie comme officier, il fût fait
prisonnier. C'est dans la prison de
Saratoff, durant l'année 1813 - 1814
que, sans ses livres, il parvint à re-
constituer l'ensemble de ses connais-
sances et à mettre sur pied une profonde
réforme de la géométrie.

De retour en France, il publia son
"Traité des propriétés projectives des
figures" en 1822.

Il fût élu à l'Académie des Sciences en
1831; et consacra la fin de sa vie au
service du gouvernement.

Il mourût le 23 Décembre 1867