

Le "Schéma de Horner" permet de calculer la valeur d'un polynôme de degré n en un point, à l'aide seulement du calcul itéré de la valeur de n fonctions affines.

L'intérêt actuel porté à l'algorithmique a récemment remis cette procédure à l'honneur. Nous vous en proposons deux présentations : la première est d'ordre géométrique, alors que la seconde fait appel aux micro-ordinateurs.

Les Orthogones

Collette BLOCH · Poitiers

Soit à faire calculer par une machine les valeurs prises par une fonction polynôme $f(x)$ pour différentes valeurs de la variable x . On sait que la méthode, due à Horner, est la suivante :

Si, par exemple, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on écrit

$$f(x) = ((ax+b)x + c)x + d$$

et on calcule :

$$A = ax + b$$

$$B = Ax + c$$

$$C = Bx + d = f(x)$$

Ainsi, on n'a jamais à calculer effectivement des puissances de x . Tous les calculs se coulent successivement dans le même moule "linéaire".

Il existe une méthode graphique qui reproduit exactement ce processus; c'est la méthode de Lill, ou des orthogones. Le texte qui suit est inspiré du

Cours de Calcul Informationnel Appliqué de Cullmann, Denis-Papin et Kaufmann (Albin Michel 1970).

LA METHODE DES ORTHOGONES

Reprenons le polynôme du troisième degré : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Traçons, sur une feuille de papier, un carré ABCD sur lequel on choisit un sens de parcours (celui indiqué par les flèches de la figure 1). Par un point O de la figure, on trace la longueur algébrique $\overline{OO_1} = a$ sur un axe parallèle à AB et de même sens (sur la figure 1, on suppose que a est positif). Par le point O_1 ainsi obtenu, on mène un nouvel axe parallèle à BC et de même sens, sur lequel on porte la mesure algébrique $\overline{O_1O_2} = b$ (sur la figure 1, b est positif), puis en continuant sur des axes successivement parallèles aux côtés du carré, on trace $\overline{O_2O_3} = c$ (sur la figure 1, c est supposé négatif), puis $\overline{O_3O_4} = d$ (avec, d positif sur la figure 1). On poursuivrait la rotation dans le sens des côtés du carré si le polynôme était de degré supérieur à 3.

L'orthogone ainsi formé, ou orthogone fondamental, permet de trouver graphiquement la valeur de polynôme pour une valeur quelconque de la variable x .

Pour cela, on trace à partir de OO_1 un angle φ de sommet O, cet angle φ étant compris entre 0 et 90° et défini par la relation :

$$\tan \varphi = |x|$$

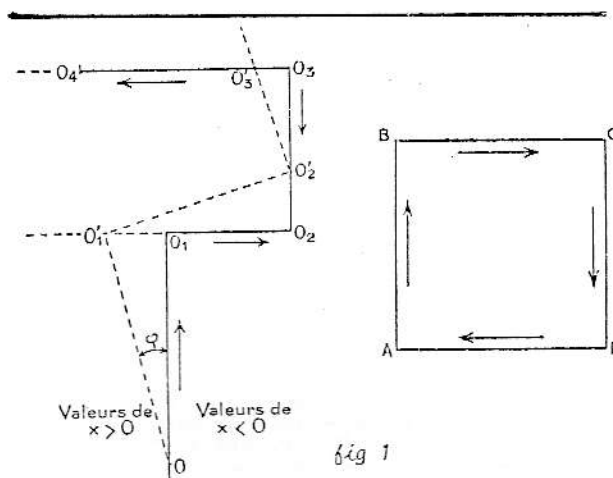


fig 1

l'angle étant tracé à gauche de OO_1 si la valeur choisie pour x est positive, et à droite dans le cas contraire. Le deuxième côté de l'angle coupe l'axe O_1O_2 en un point O'_1 . Par ce dernier, on trace ensuite la perpendiculaire à OO'_1 qui coupe l'axe O_2O_3 en O'_2 . Par O'_2 on mène la perpendiculaire à $O'_1O'_2$, droite qui coupe l'axe O_3O_4 en O'_3 . On a ainsi tracé l'orthogone secondaire.

La valeur algébrique de $\overline{O'_3O_4}$ est la valeur du polynôme pour la valeur de la variable choisie (dans le cas de la figure 1, la valeur du polynôme est positive pour la valeur choisie de la variable).

Par exemple, la figure 2 montre comment on trouve la valeur du polynôme

$$f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 15x + 9$$

pour les valeurs de la variable

$$a) x = 0,839 \quad b) x = 1$$

DETERMINATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE

Il est évident que si le point O'_3 de la figure 1 coïncide avec le point O_4 , la valeur de $f(x)$ est nulle, et le réel x choisi est un des zéros du polynôme f . On peut donc déterminer graphiquement, par la méthode des orthogones, les solutions d'une équation algébrique.

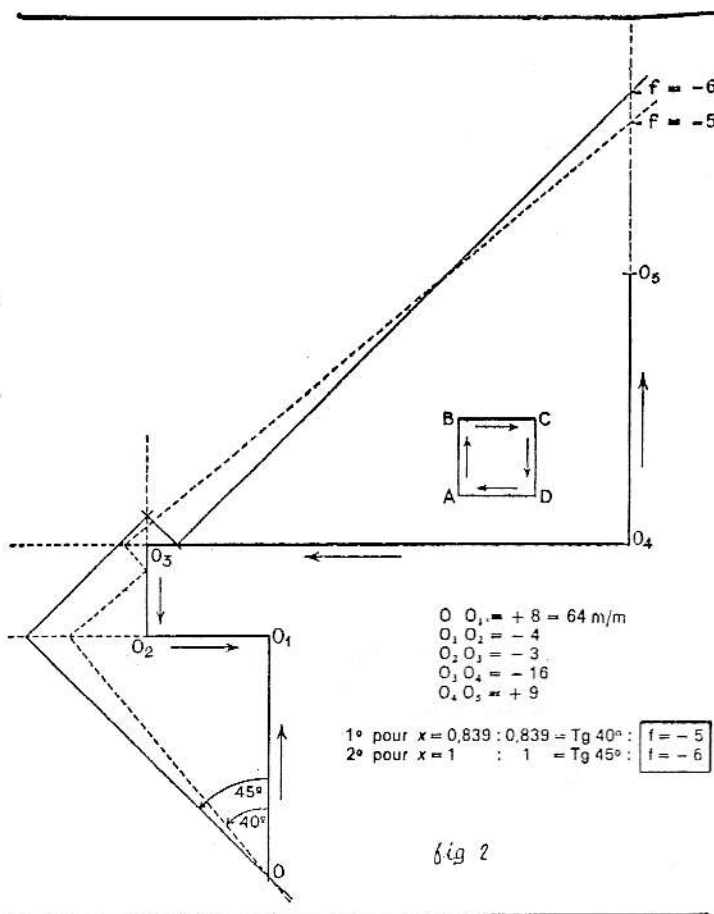
Pour cela, on trace d'abord l'orthogone fondamental du polynôme f . Il s'agit ensuite de déterminer la direction du premier côté de l'orthogone secondaire pour que le point final du premier et celui du dernier coïncident. On y arrive par tâtonnements en s'aidant d'un transparent à quadrillage millimétré que l'on promène sur l'orthogone fondamental jusqu'à ce que la coïncidence cherchée soit obtenue.

Cette méthode est très rapide mais peu sûre s'il s'agit de déterminer toutes les solutions réelles d'une équation algébrique, car on peut oublier certaines d'entre elles. Par contre, s'il s'agit de connaître la plus grande solution, la méthode est très commode et donne de bons résultats.

Par exemple, la figure 3 répond au problème suivant :

Trouver la plus grande solution de l'équation :

$$x^6 + x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

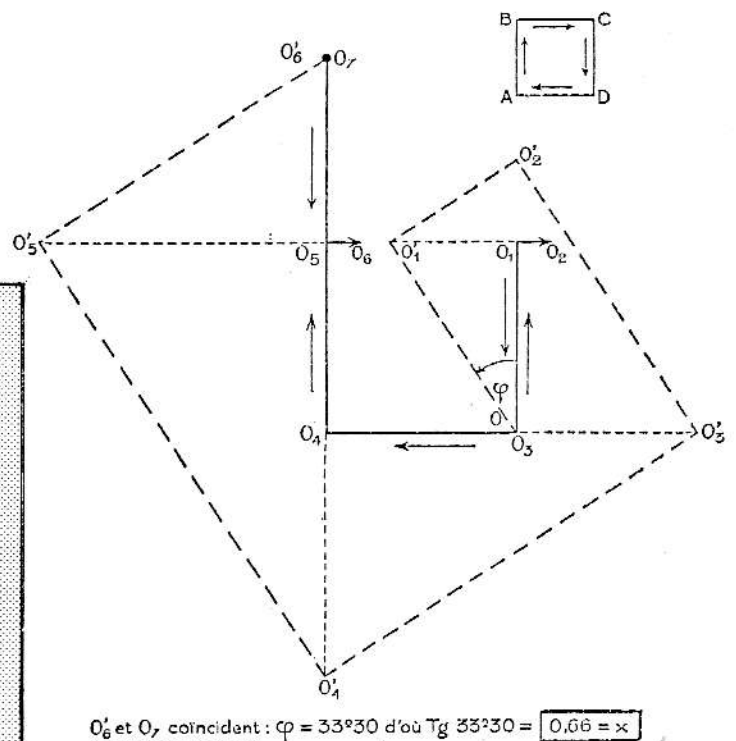


UNE JUSTIFICATION

En revenant à la figure 1, on constate les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \overline{O'_1O_1} &= ax \\ \overline{O'_1O_2} &= ax + b \\ \overline{O'_2O_2} &= (ax + b) \cdot x \\ \overline{O'_2O_3} &= (ax + b) \cdot x + c \quad (c < 0) \\ \overline{O'_3O_3} &= ((ax + b) \cdot x + c) \cdot x \\ \overline{O'_3O_4} &= ((ax + b) \cdot x + c) \cdot x + d \end{aligned}$$

LE SUPPLEMENT DU PLOT
Pour réaliser, dès le plus jeune âge,
toutes sortes de polyèdres, sans colle
ni ciseaux.... mais avec des élastiques.
Les deux numéros 1982 : 30 F
(voir en dernière page)



$$O'_6 \text{ et } O_7 \text{ coïncident : } \varphi = 33^\circ 30' \text{ d'où } Tg 33^\circ 30' = 0,66 = x$$

fig 3