

Calcul Formel & Ordinateur

Jean-Louis NICOLAS · Limoges

Si vous demandez à votre calculette, ou à votre miniordinateur combien font deux et deux, vous aurez une réponse. Mais vous n'obtiendrez pas les identités remarquables comme

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Certains gros ordinateurs sont équipés pour le "calcul formel", c'est à dire pour traiter ce type de questions et d'ici peu de temps (si ce n'est déjà fait) les Universités pourront disposer d'un terminal ayant accès à un système de calcul formel. Comme pour les langages d'ordinateurs (Basic, Fortran, Algol...), la tour de Babel s'est reconstruite, et il existe plusieurs systèmes de calcul formel : REDUCE, FORMAC, FORDECAL, SCRATHPAD, ALTRAN, SAC, etc... Voici les possibilités qu'offrent actuellement la plupart de ces systèmes.

1) Arithmétique en multiprécision : on peut traiter des nombres entiers ayant quelques milliers de chiffres (ou moins) et aussi des nombres rationnels, mis sous la forme irréductible p/q automatiquement.

2) Polynômes à plusieurs variables à coefficients dans Z , ou Z/pZ , p étant un nombre premier. On peut ajouter, multiplier, faire la division euclidienne et suivant les puissances croissantes, substituer une variable par une expression, décomposer en produits de polynômes irréductibles, calculer le PGCD de deux polynômes. La mise en place de ces opérations a nécessité la construction de nouveaux algorithmes ou l'amélioration d'algorithmes déjà existants qui ont posé et qui posent encore des problèmes difficiles de mathématiques.

3) Calcul sur les fonctions rationnelles à plusieurs variables.

4) Manipulations d'expressions algébriques ou transcendentes. On peut ainsi travailler dans l'anneau $Z + \sqrt{2}Z$. La quantité $\sqrt{2}$ sera gardée comme telle, et son carré remplacé par 2. Cela pose des problèmes de simplification. Le système doit pouvoir simplifier

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

mais sait-il voir que

$$\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

est un nombre entier naturel ? Ou bien si

l'on pose

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

que l'on a $\alpha = \beta$?

On peut aussi faire de la trigonométrie, et rajouter aux fonctions de base du système des fonctions nouvelles en précisant les identités qu'elles doivent satisfaire (par exemple la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto (x-1)e^x$ pour $x \geq 0$)

5) Calcul matriciel. On peut effectuer des calculs linéaires avec des matrices dont les éléments sont des polynômes à plusieurs variables. Inverse formel d'une matrice A , calcul de déterminants, résolution formelle de $Ax = B$, calcul de valeurs propres...

6) Différentiation. On peut différencier des polynômes, des fractions rationnelles composées de fonctions usuelles $\sin$, $\exp$, $\log$...etc.

7) Intégration. Le système sait décomposer en éléments simples les fractions rationnelles et trouver leur primitive. Il sait également calculer les primitives usuelles que l'on est en droit d'exiger d'un taupin ou d'un étudiant de DEUG. De même que pour intégrer certaines fractions rationnelles

($\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$) on doit introduire des fonctions transcendentes, on peut introduire de nouvelles primitives (par exemple

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \text{ c'est le logarithme intégral})$$

et demander au système de calculer de nouvelles intégrales en fonction de celles-là (par exemple $\int \frac{e^x}{x} dx$). Le système doit

pouvoir décider si une intégrale proposée ne s'exprime pas en fonction des fonctions élémentaires (c'est à dire celles introduites dans le système). Tout cela pose des problèmes mathématiques qui ne sont pas tous résolus et qui avaient été laissés de côté, parce que nécessitant des calculs rébarbatifs.

8) Résolution d'équations différentielles. Les méthodes classiques sont connues du système : équations linéaires, homogènes, à variables séparées, etc... Les problèmes sont de même nature, mais en plus difficiles, que ceux du paragraphe précédent.

- 9) Calcul de développements limités.
 10) Calcul d'intégrales définies par la méthode des résidus.

Le mathématicien est intéressé à double titre par ces systèmes : en tant qu'utilisateur, on voit l'intérêt pour des travaux de recherche nécessitant de gros calculs; en pédagogie, l'influence de tels systèmes sur l'enseignement du calcul des primitives sera comparable à l'influence des calculettes à l'école primaire sur l'apprentissage des 4 opérations. Enfin, voici quelques questions que l'existence du calcul formel sur ordinateur amène à se poser.

C'est un exercice classique que de calculer

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^N \frac{1}{x(x+1)} &= \sum_{x=1}^N \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

Pour quelles types de fractions rationnelles ce genre de simplifications a-t-il lieu ?

Pour quelles fractions rationnelles $Q(x)$ la quantité

$$\sum_{x=1}^N Q(x)$$

est-elle une fraction rationnelle de N ? Ce problème s'apparente au problème de primitives : pour quelles fractions rationnelles $Q(x)$, $\int Q(x)dx$ est une fraction rationnelle. L'ordinateur sait résoudre ce type de problème maintenant. Mieux même. Si l'on pose

$$H(N) = \sum_{x=1}^N \frac{1}{x}$$

la simplification précédente n'a pas lieu et $H(N)$ n'est pas une fraction rationnelle de N . Mais l'ordinateur peut montrer que la quantité

$$K(N) = \sum_{x=1}^N \frac{1}{x^2}$$

est une fraction rationnelle de $H(N)$. Voilà, parmi d'autres, un problème soulevé par l'existence du calcul formel.

Quelques Livres

Gilbert WALUSINSKI : Ciel passé, présent. (Collection Axes-Sciences. Editions Etudes Vivantes).

"Est-il possible de comprendre les théories savantes de l'astronomie moderne?... Notre parti pris est donc de commencer par le commencement. Décrire d'abord les plus banales apparences,... Ensuite, placer les problèmes que cette observation propose dans leur perspective historique. Les méthodes ont changé depuis Képler,... Mais les grandes questions restent fondamentalement les mêmes. Où sommes-nous ? Comment cette complexe machine que nous appelons l'Univers fonctionne-t-elle ? Comment s'est-elle constituée ? Comment évolue-t-elle ?

Pratiquement, nous nous sommes efforcés d'écrire un livre accessible à un public curieux et de bonne volonté. (...) Nous avons voulu éviter tout pédantisme, nous n'avons pas craint d'être précis. Avons-nous réussi à être compréhensible ? Le lecteur est seul juge"

Ces lignes sont extraites de l'Avant-propos du livre. Que l'auteur se rassure : il a réussi à être compréhensible, et plus encore, captivant. Cela tient à la méthode suivie : remettre les pas dans ceux des grands découvreurs et ainsi rendre vivante cette partie de l'aventure humaine. Cela tient aussi au style clair, précis certes, mais aussi chaleureux, passionné, humain. Ainsi non seulement on comprend la loi des aires de Képler (ce protestant de Styrie obligé de se réfugier à Prague, en 1600, auprès de Rodolphe II), mais on comprend aussi comment il s'y prit pour la découvrir; et on comprend tellement bien qu'on pardonne à Képler de l'avoir découverte à partir d'une hypothèse fautive et d'une faute de calcul plus grave encore... Il est des voyages dont on revient enchanté d'avoir beaucoup appris tout en se promenant dans de beaux paysages. Pour moi, ce livre est comme ces voyages.

Raymond Barra

QUI A DIT ?

REPONSE DE LA PAGE 7

C'est Evariste GALOIS (1811-1832), dans une lettre sur l'enseignement des sciences publiée par la Gazette des Ecoles du 2 Janvier 1831.