Horner en Logo

Michel ARCOUET · Montréal

Cet article est extrait du "Bulletin du GRMS n° 37 d'octobre 1981". Le GRMS, (Groupe des Responsables des Mathématiques au Secondaire) est un sous-groupe de l'Association Mathématique du Québec, et rassemble les enseignants québécois enseignant au "Secondaire" (qui correspond, en gros, à notre Collège). L'article original comportait des programmes rédigés en "LOGO anglais". Ce langage étant fort peu utilisé en France, nous avons demandé à Jean-Claude DESPLAND, de l'Université d'Orléans, d'en assurer la traduction en "LOGO français".

Le but de cet article est de montrer l'importance de l'enseignement de certains concepts mathématiques et surtout de faire ressortir que certaines méthodes de factorisation ne méritent plus l'importance qu'elles ont actuellement. Celles-ci devraient être remplacées par d'autres, plus efficaces, plus générales et transposables sur des outils électroniques.

Le langage utilisé est le "LOGO en français".

La représentation d'un polynôme sous forme d'un produit de facteurs est très utile pour trouver les zéros ou racines. Elle l'est aussi pour la simplification des calculs.

Cependant, d'une part, d'après la théorie de Galois, nous savons qu'il ne peut pas exister de formules pour trouver ces racines dans le cas de polynômes de degré supérieur à quatre. De plus, les formules connues pour les degrés trois et quatre sont très complexes.

D'autre part, l'avènement des ordinateurs facilite très considérablement les calculs à répétitions. Aussi peut-on maintenant utiliser, pour résoudre ces types de problèmes, des méthodes d'itération très simples à comprendre mais trop longues pour le calcul "à bras".

C'est ainsi que pour l'évaluation des polynômes, la forme de Horner est devenue extrêmement pertinente.

On peut en effet, par des mises en évidence successives, modifier l'écriture d'un polynôme pour qu'il soit plus aisément évaluable.

Ainsi, le polynôme

$$3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 6$$

peut s'écrire

$$((((3)x + 4)x + 5)x + 2)x + 6).$$

En généralisant :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

peut s'écrire

$$((\dots((0)x+a_n)x+a_{n-1})x+\dots)x+a_1)x+a_0)$$

La partie (0)x aurait pu être omise puisqu'elle ne change rien. Cependant, l'écrire fait mieux ressortir la régularité. On trouve ainsi plus aisément le programme général du calcul de la valeur d'un polynôme donné pour une certaine valeur de x.

Enfin, on remarque aisément que l'important, dans un polynôme, est la liste ordonnée des coefficients. C'est pourquoi on utilise très fréquemment en mathématiques une représentation vectorielle de ces coefficients.

On tire directement de cette représentation le programme (fonction) LOGO suivant.

```
POUR POLY :COEF :X
RELIE "REP Ø
REPETE COMPTE :COEF [RELIE "REP :REP * :X
+ PREMIER :COEF RELIE "COEF SAUFPREMIER :COEF]
OUTPUT : REP
FIN
```

:COEF est la liste des coefficients.
:X est la valeur du paramètre (de la variable) X.

La première ligne du programme consiste à mettre Ø dans la variable de sortie, ce qui est équivalent à la partie (0)x de l'écriture du polynôme. Dans la deuxième ligne, pour chacun des coefficients, on répète l'opération (*x + (le nouveau coefficient)). La troisième ligne rend le paramètre disponible pour une autre fonction.

Ce programme fonctionne quel que soit le degré du polynôme. Il en ressort donc que la mise en évidence est une opération fondamentale. D'autre part, l'écriture vectorielle ou sous forme d'une liste est sûrement de beaucoup la plus simple lorsqu'il s'agit de programmes d'ordinateurs et ceci surtout dans les langages de type LOGO, PASCAL, LISP, APL.

Le polynôme

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 8$$

peut donc s'écrire

[3 -5 8.],

tandis que

$5x^3 + 2x = 5x^3 + 0x^2 + 2x + 0$

s'écrira

[5 0 2 0].

Evaluer $3x^2 -5x + 8$ pour x = 4 deviendra

```
ECRIS POLY [ 3 -5 8 ] 4
36
```

Evaluer $5x^3 + 2x$ pour x = -5 deviendra

```
ECRIS POLY [ 5 0 2 0 ] (-5)
-635
```

Evaluer 2x + 1 pour x = 5,3 deviendra

```
ECRIS POLY [ 2 1 ] 5,3
11,6
```

Evaluer la fonction constante y = 3 pour x = 7 est équivalent à évaluer f(x) = 3, c'est à dire évaluer le polynôme [3].:

```
ECRIS POLY [ 3 ] 7
3
```

Enfin, cette méthode et cette notation sont généralisables et applicables au calcul de la pente en un point (dérivée) et à l'utilisation de la méthode de Newton pour trouver les zéros de fonctions polynomiales et même de plusieurs autres fonctions réelles.

Soit une fonction polynomiale

$f(x) = 3x^2 - 5x + 8;$

la pente de la tangente en un point est donnée par la dérivée de cette fonction

$f'(x) = 3*2x - 5*1$

On remarque, d'après la structure des polynômes, que l'exposant de x est justement le rang -1 de ce x, d'où le nouveau facteur de chaque x dans la dérivée est le produit de l'ancien facteur par le rang -1.

On obtient alors le programme (fonction) suivant.

```
POUR PENTETG :COEF :X
RELIE "TG Ø
REPETE (COMPTE :COEF) - 1 [RELIE "TG :TG
  * :X + ((COMPTE :COEF) - 1) * PREMIER :COEF
  RELIE "COEF SAUFPREMIER :COEF]
OUTPUT :TG ; REM PASSAGE DU PARAMETRE
FIN
```

Ce programme (fonction) a la même structure que le précédent; on ne fait qu'y ajouter le produit du coefficient par le degré de x. On répète l'opération une fois de moins puisque le coefficient de degré 0 disparaît au moment de dériver.

Exemple : la pente de la tangente de

$f(x) = 3x^2 - 5x + 8$

pour x = 4 sera 19.

De même, la pente à la tangente à

$f(x) = 5x^3 + 2x$

pour x = -5 sera 377.

La pente de la tangente à f(x) = 2x +1 pour x = 5,3 sera 2.

Et aussi la pente de la tangente à la fonction constante f(x) = 3 à x = 7 sera 0.

```
ECRIS PENTETG [ 3 -5 8 ] 4
19

ECRIS PENTETG [ 5 0 2 0 ] -5
377

ECRIS PENTETG [ 2 1 ] 5,3
2

ECRIS PENTETG [ 3 ] 7
Ø
```

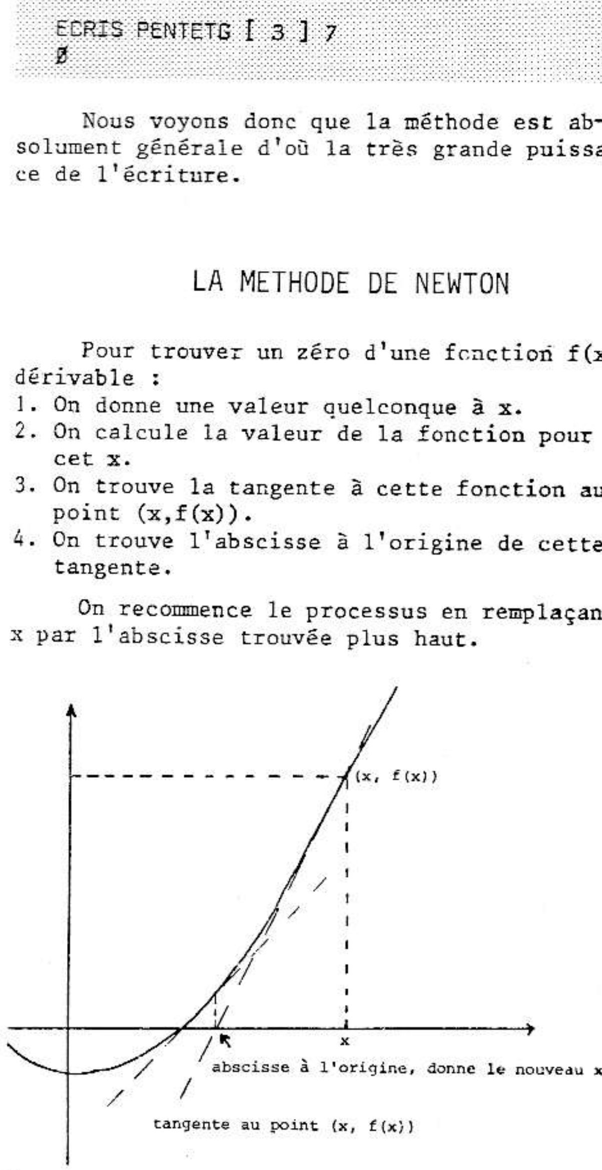
Nous voyons donc que la méthode est absolument générale d'où la très grande puissance de l'écriture.

LA METHODE DE NEWTON

Pour trouver un zéro d'une fonction f(x) dérivable :

1. On donne une valeur quelconque à x.
2. On calcule la valeur de la fonction pour cet x.
3. On trouve la tangente à cette fonction au point (x,f(x)).
4. On trouve l'abscisse à l'origine de cette tangente.

On recommence le processus en remplaçant x par l'abscisse trouvée plus haut.



Il est évident qu'il faut utiliser le processus avec prudence car on peut rencontrer des maximums ou minimums relatifs. Un programme complet devrait tenir compte de ces "accidents".

Ce processus converge très rapidement et, après un certain temps, le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Il suffit d'environ 5 à 8 itérations pour obtenir plus de 6 chiffres significatifs pour des degrés inférieurs à 5. D'où les programmes suivants.

```
POUR NEWTON :COEF :X
REPETE 10 [RELIE "X NOUVX :COEF :X]
FIN

POUR NOUVX :COEF :X
OUTPUT :X - (POLY :COEF :X)/PENTETG :COEF :X
FIN
```

Exemple : On cherche les zéros de $x^2 - 5x + 6$

```
ECRIS NEWTON [ 1 -5 6 ] 10
3,0

ECRIS NEWTON [ 1 -5 6 ] (-10)
2,0
```

Exemple : On cherche la racine quatrième de 625, ce qui est équivalent à trouver le zéro positif de $x^4 - 625$.

```
ECRIS NEWTON [ 1 0 0 0 -625 ] 10
5,0
```

Ces derniers exemples débordent largement le programme de mathématique du secondaire mais permettent aux enseignants de situer l'importance des polynômes de Horner et des méthodes itératives.

L'apparition des machines électroniques rend maintenant accessibles ces procédés. Aussi notre enseignement doit-il en tenir compte et même les favoriser.

Dans le cas particulier de la racine carrée, toute la méthode de Newton peut se résumer à recommencer le calcul répété suivant:

```
RELIE "DEB (:DEB * :DEB + :NB)/(2 * :DEB)
```

Si on ne commence pas le calcul trop loin de la réponse cherchée (voir les 2è, 3è et 4è lignes du programme ci-bas), il suffit de répéter dix fois le calcul pour obtenir plus de six chiffres de précision.

D'où le programme suivant qui est aussi une fonction.

```
POUR RCHR :NB
SI :NB < Ø ALORS ECRIS [RACINE CARREE D'UN
  NOMBRE NEGATIF] NIVEAU SUP
RELIE "DEB 1Ø
SI :NB > 1Ø ØØØ ALORS RELIE "DEB 1ØØØ
SI :NB > 1Ø ØØØ ØØØ ALORS RELIE "DEB 1ØØ ØØØ
REPETE 12 [RELIE "DEB (:DEB * :DEB + :NB)/
  (2 * :DEB)
OUTPUT : DEB
FIN
```

CONCLUSION

Les polynômes de Horner présentent donc un très grand intérêt lorsqu'il s'agit d'évaluer des polynômes. Ils minimisent le nombre d'opérations à effectuer et permettent de réduire celles-ci à la répétition d'une simple multiplication suivie d'une addition.

Enfin, on voit tout de suite l'importance de la représentation "vectorielle" du polynôme. Qu'y a-t-il de plus simple que de représenter le polynôme par le vecteur de ses coefficients ?

Ce vecteur est ensuite immédiatement utilisable sous forme d'une liste de longueur quelconque.

Certains autres langages (APL, PASCAL, LISP) permettent une construction analogue. ●