π et la construction de SPECHT

Serge PARPAY · Niort

On sait que est un nombre transcendant : ce résultat a été démontré en 1882 par LINDEMANN. La quadrature du cercle est donc une construction "impossible". Pourtant, parmi les quadratures "approchées" du cercle, la construction de SPECHT, qui date de 1836, est très précise (10^{-6} près). En voici le principe.

CARL LOUIS FERDINAND LINDEMANN *(1)*
(1852-1939)

Lindemann est né le 12 avril 1852 à Hanovre. De 1870 à 1873 il a fait des études à Göttingen, Erlangen, Munich, Londres et Paris. Il enseigna à Fribourg et Königsberg.

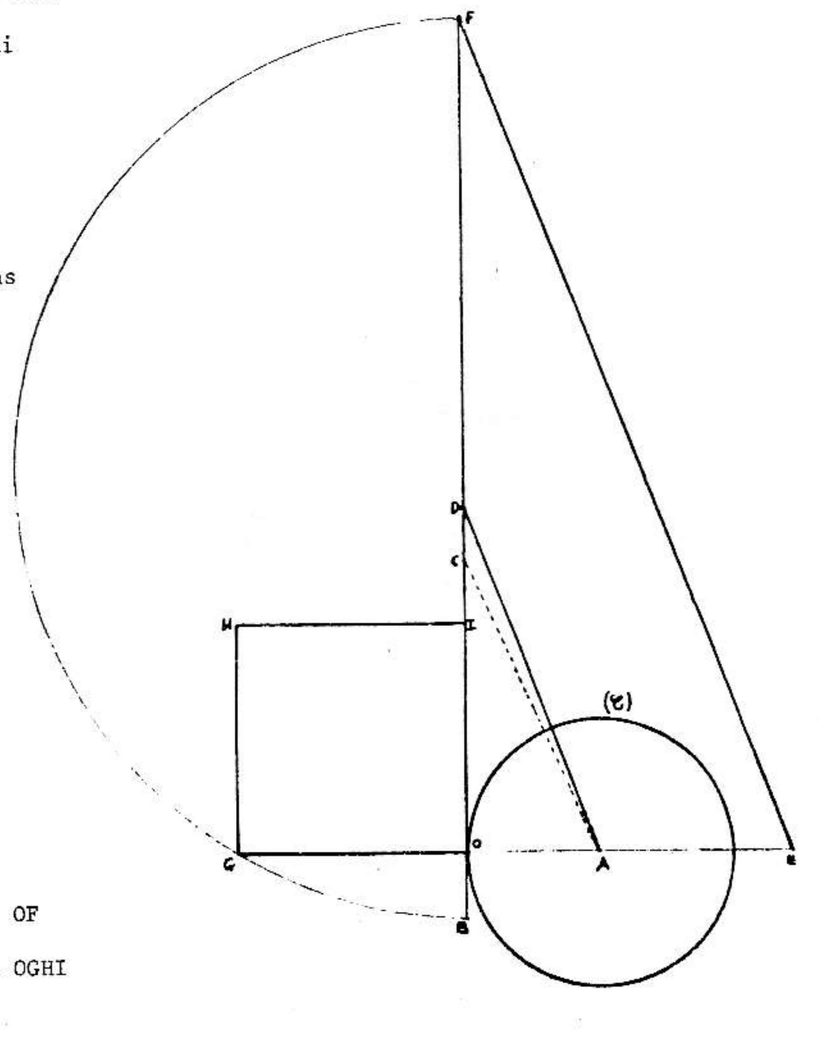
Avant son célèbre mémoire "Die Zahl π" paru en 1882 aux Mathematische Annalen, il avait travaillé sur diverses questions géométriques. A la suite de ce succès il consacra surtout ses efforts à l'étude du grand théorème de Fermat.

CONSTRUCTIONS

- Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A(0,5;0) ; B(0;-0,25) ; C(0;1,1) et D(0;1,3).
- Tracer le cercle ($\mathcal{C}$) de centre A et de rayon AO. Tracer le segment AC.
- Sur la demi-droite OA, placer E tel que OE = AC.
- Tracer le segment AD.
- Placer le point F sur la demi-droite OC tel que EF soit parallèle à AD.
- Tracer le demi-cercle de diamètre BF qui coupe la droite OA en G (O entre A et G).
- Achever la construction du carré OGHI.

THEOREMES UTILISES

Théorème de Pythagore.
Théorème de Thalès.
Théorème : triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.
Propriété de la hauteur d'un triangle **rectangle**



CALCULS

$AC^2 = AO^2 + OC^2$; $AC = \sqrt{1,46}$

$OE = AC$

$AD \,//\, EF \quad \dfrac{OF}{OD} = \dfrac{OE}{OA}$

$OF = 2,6\sqrt{1,46} = 3,1415919...$

$\widehat{BGF} = 1$ angle droit

$OG^2 = OB.OF$

$OG^2 = \dfrac{2,6\sqrt{1,46}}{4} = 0,7853979...$

RESULTATS

Périmètre du cercle ($\mathcal{C}$) = Π ≃ longueur OF

Aire du cercle ($\mathcal{C}$) = $\dfrac{\Pi}{4}$ ≃ aire du carré OGHI

AVANTAGES DE LA CONSTRUCTION DE SPECHT

Ce thème met en oeuvre des constructions géométriques:
- construction d'un angle droit (les axes).
- report de longueurs au compas.
- construction de parallèles.
- détermination du milieu d'un segment (médiatrice).
- construction d'un carré.

Il utilise trois théorèmes importants et une propriété dans un triangle (hauteur) démontrable par des considérations trigonométriques. Utilisation de produit scalaire, de rapports de "côtés proportionnels".

Il fait calculer des valeurs approchées: racines carrées, encadrement.

Il permet de rappeler le périmètre d'un cercle, l'aire d'un cercle... et l'aire d'un carré !

Il permet de parler de la quadrature du cercle, du nombre transcendant π et donc d'un peu d'histoire des mathématiques.

Il a des prolongements : recherche d'autres valeurs approchées de π et d'autres constructions approchées...

LA TRANSCENDANCE DE π (1)

Rappelons qu'un nombre complexe est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et qu'il est dit transcendant dans le cas contraire. Ce n'est qu'en 1844 que l'existence de nombres transcendants fut démontrée par Liouville. En 1874, G. Cantor, le créateur de la théorie des ensembles, démontra que "la plupart" des nombres réels sont transcendants ; en fait il démontra que l'ensemble des nombres algébriques réels est dénombrable (c'est-à-dire peut être mis en bijection avec les entiers) tandis que l'ensemble des réels ne l'est pas. Ainsi un nombre réel a une "forte probabilité" d'être transcendant ; mais c'est une toute autre affaire que de démontrer qu'un nombre donné est transcendant ou non. Les nombres les plus intéressants à étudier du point de vue de la transcendance sont ceux qui apparaissent dans l'analyse classique : e, π, ...

La première constante de l'analyse dont la transcendance fut démontrée est le nombre e. Le résultat fut obtenu par Charles Hermite en 1873, grâce à une utilisation très ingénieuse de la théorie des fonctions.

Restait la question de la transcendance de π. A ce sujet Hermite écrivait : "Je ne me risquerai pas à essayer de démontrer la transcendance du nombre π. Si d'autres l'entreprennent, nul ne sera plus heureux que moi de leur réussite ; mais, croyez-moi, mon cher ami, cela ne manquera pas de leur coûter quelques efforts". Pourtant, la transcendance de π fut démontrée en 1882 par le mathématicien allemand Lindemann, essentiellement grâce à la méthode introduite par Hermite. Voici l'introduction de l'article de Lindemann : "Devant l'insuccès de si nombreuses tentatives faites pour résoudre la quadrature du cercle avec la règle et le compas, on considère généralement comme impossible la solution de ce problème. Cependant on a seulement établi l'irrationnalité de π et de π^2. L'impossibilité de la quadrature du cercle sera prouvée si l'on montre que π ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels ; l'objet de ce qui suit est précisément d'en apporter la démonstration".

Depuis on a démontré en particulier la transcendance des quantités suivantes : Log 2 (Weierstrass, 1885), e^{π} (Gelfond, 1929), $2^{\sqrt[3]{2}}$ (Gelfond, Schneider, 1934), Log 2 + π (Baker, 1966), $\Gamma(1/4)$ (Choodnovski, 1976). Mais on ne sait même pas si $e + \pi$ est rationnel ou non. Pour plus de détails sur les résultats obtenus dans cette belle théorie le lecteur est invité à consulter l'article de M. Waldschmidt et J. Vélu, "Les victoires de la transcendance" paru dans le journal "La Recherche" de décembre 1977 (n° 84).

REFERENCES

Marcel BOLL : Les étapes des mathématiques (*collection "Que Sais-je ?" n° 42*).

Petit Archimède : Numéro Spécial π (*n° 64/65 Mai 1980*).

(1) *Texte extrait du "PETIT ARCHIMEDE, numéro Spécial π". n° 64/65. Mai 1980.*