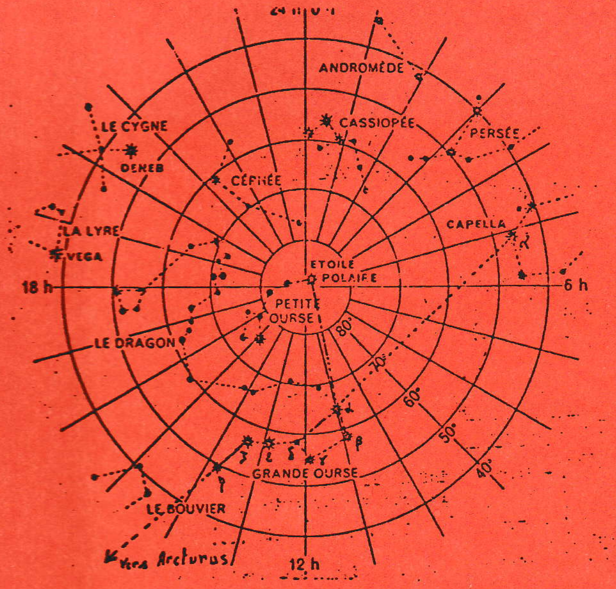
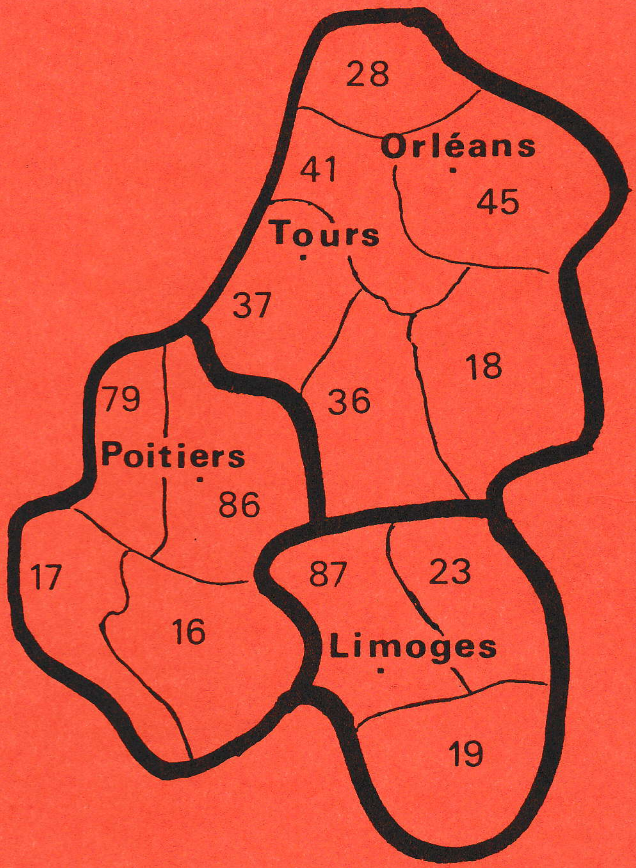
ISSN 0397-7471

PLOT

n°5





BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

trimestriel: février 1978

5f

plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n°5

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

par Léonce LESIEUR
(conférence prononcée en 1976 à la Régionale de LIMOGES)

La théorie des équations algébriques, son historique, ses idées, son développement.

Je voudrais parler de la théorie des équations algébriques, de son histoire, de son développement, de ses méthodes, des problèmes et des découvertes qu'elle a amenés. Le sujet est trop vaste pour être entièrement traité en une fois ; je n'aborderai donc que certains aspects de cette théorie, certains moments de son histoire. Si vous voulez, je vais faire un triple saut dans l'espace. Le premier saut nous conduit au milieu du XVIe siècle à l'époque de la résolution des équations du 3e et du 4e degré ; le deuxième nous propulse trois siècles plus tard avec les beaux résultats de GALOIS sur le groupe défini par une équation ; enfin le troisième nous ramène aux temps présents.

I - LA PREMIERE PERIODE

Les équations suivantes posent et ont posé de nombreux problèmes.

(1) $2x = 3$; (2) $ax = b$

(3) $x^2 = 2$; (4) $x^2 = \Pi$

(5) $x^3 = 2$; (6) $x^3 = 3x + 1$

(7) $x^3 + ax = b$; (8) $x^4 = ax^2 + bx + c$

La première question est de savoir quels sont les *nombres* qu'on peut admettre comme solutions de l'équation. La deuxième est de connaître quelles sont les *opérations* ou lois de composition qui sont définies sur ces nombres.

Même dans le cas de l'équation (1), il faut utiliser les nombres rationnels, et pas seulement les entiers, ainsi que les règles de calcul sur ces nombres. Il semble que les Grecs, et avant eux les Egyptiens et les Babyloniens, en avaient une idée claire, grâce à la notion de grandeurs commensurables. Encore faut-il remarquer que tous leurs exemples sont numériques, et que l'usage de désigner par des lettres les nombres connus ou inconnus qui interviennent dans une équation comme (2) n'est apparue qu'avec VIETE au XVIe siècle. (Pour plus de détails, lire la note historique de Bourbaki [3] p.147).

Quand on considère l'équation (3), les nombres rationnels ne suffisent plus, "et il est possible que ce soit l'échec de tentatives répétées pour exprimer rationellement $\sqrt{2}$ qui conduisit les mathématiciens de l'école pythagoricienne à démontrer que ce nombre est irrationnel" (Bourbaki [4] p. 192).

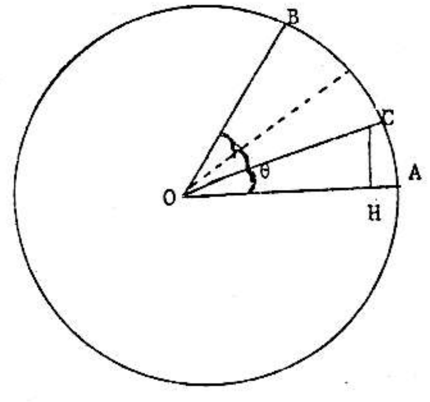
Avec le développement de la géométrie, les grecs et EUCLIDE en particulier, s'ingénièrent à résoudre les problèmes par des constructions géométriques au moyen de la règle et du compas. On pouvait ainsi atteindre toutes les solutions des équations du second degré à coefficients rationnels. Mais ils échouèrent évidemment sur le problème posé par la quadrature du cercle, qui se traduit par l'équation (4) et qui fait intervenir un nombre transcendant. (On ne pourra démontrer rigoureusement que beaucoup plus tard, en 1888, avec LINDEMANN, que π, et par conséquent $\sqrt{\pi}$, est transcendant). Ils échouèrent aussi sur le problème de la duplication du cube : équation (5), et sur celui de la trisection de l'angle de 60° : équation (6), qui ne peuvent pas non plus se résoudre au moyen de constructions avec la règle et le compas.

$\theta = \frac{\pi}{9}$ rad. = 20°

$x = 2 \cos \theta = 2$ OH

$\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta = \frac{1}{2}$

$x^3 = 3x + 1$



Il fallut ensuite beaucoup de temps, compte tenu du déclin des civilisations et du manque d'intérêt pour les équations algébriques, pour que de nouveaux progrès soient réalisés. Ce fut au Moyen Age, et ils aboutirent enfin à la résolution de l'équation (7) par del FERRO, un mathématicien de l'Ecole Italienne de CARDAN, au moyen de la formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^2}}$$

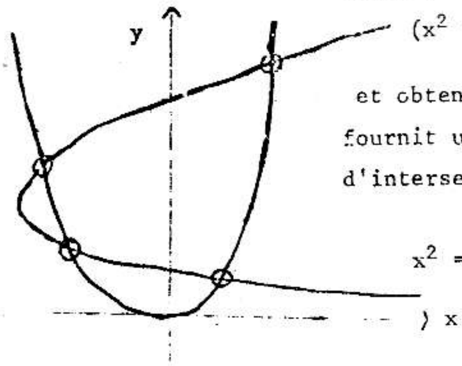
L'intérêt de cette formule barbare est d'abord qu'elle exprime les racines par radicaux cubiques et carrés, mais aussi que, même dans le cas où les trois racines sont réelles (les coefficients a, b, c étant supposés réels), les racines carrées sont celles de nombres négatifs. C'est la raison qui a conduit dès cette époque à introduire le symbole $\sqrt{-1}$ et à effectuer des calculs sur ce symbole, calculs qui n'ont été formalisés que plusieurs siècles après pour donner naissance aux nombres complexes. Il n'était pas question à cette époque, sous peine d'être considéré comme un dangereux sorcier, de donner un sens à des racines de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Vous remarquerez également que les équations écrites ne font pas en principe intervenir de nombres négatifs, et l'on doit plaindre et admirer en même temps les mathématiciens de ce temps là qui ne disposaient pas de l'outil élégant consacré seulement par les écrits de DESCARTES.

Enfin, sur la lancée, mais avec un bon temps de retard, FERRARI, un autre élève de CARDAN, résout par radicaux une équation du 4e degré de la forme (8), en 1545. Méthode : écrire l'équation sous la forme :

$$(x^2 + z)^2 = (a + 2z)\, x^2 + b\, x + (c + z^2)$$

et obtenir un carré au second membre en annulant le discriminant qui fournit une résolvante cubique en z. Autre méthode : chercher les points d'intersection des deux paraboles :

$$x^2 = y \quad , \quad y^2 = a\, y + b\, x + c$$



II - LE GROUPE DEFINI PAR UNE EQUATION ALGEBRIQUE

Il était naturel de chercher à résoudre par radicaux les équations de degré $n \geqslant 5$. Mais trois siècles allaient passer avant qu'ABEL et GALOIS ne démontrent l'impossibilité de cette résolution dans le cas d'une équation générale. Je fais une halte à cette nouvelle époque en essayant de dégager la notion de groupe défini par une équation. Je commence par le plus simple des exemples, mais en le traitant complètement avec les moyens et le langage modernes.

1. L'équation du second degré sur un corps k.

Soit k un sous-corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, par exemple : $k = \mathbb{Q}$, ou $k = \mathbb{R}$, ou $k = \mathbb{Q}(i)$. On a donc :

$$\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{C}$$

Considérons l'équation du second degré à coefficients dans k :

(1) $F(x) = x^2 + b\,x + c = 0$, $b, c \in k$

$F(X)$ est un polynôme du second degré de l'anneau $k(x)$

Pour résoudre (1), on met le trinôme sous forme canonique :

$$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} = 0.$$

Posons $\Delta = b^2 - 4c$. On obtient les racines, dans $\mathbb{C}$:

(2) $x_1 = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}$

Le polynôme $f(X) = X^2 + b\,X + c$ se décompose en facteurs linéaires sous la forme :

(3) $F(X) = (X - x_1)\quad(X - x_2)$

et on a les relations entre les racines :

(4) $x_1 + x_2 = -b$, $x_1\, x_2 = c$

Tel est le calcul classique élémentaire. Mais on peut aller un peu plus loin.

Le corps de décomposition K de F(x) sur k

Considérons le corps K engendré dans $\mathbb{C}$ par k et les racines

x_1 et x_2 de l'équation. $K = k(x_1, x_2)$ est constitué par les fractions rationnelles $\frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$ où f et g sont des polynômes de l'anneau $k[X_1, X_2]$ tels que $g(x_1, x_2) \neq 0$. Cette dernière condition implique $g(X_1, X_2) \neq 0$, c'est-à-dire que le polynôme $g(X_1, X_2)$ n'est pas à coefficients tous nuls, mais la réciproque n'est pas vraie : le polynôme $g(X_1, X_2) = X_1 + X_2 + b$ n'est pas nul, alors que le nombre $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + b$ est nul d'après (4).

Définition 1. Le corps $K = k(x_1, x_2)$ s'appelle le corps de décomposition du polynôme $F(X)$, ou de l'équation (1), sur k. Cette terminologie vient de l'égalité (3) ; on dit également, par abus de langage, corps des racines de l'équation (1) sur k (bien que les racines ne constituent pas à elles-seules un corps).

Etudions ce corps K. En remplaçant x_2 par $-x_1 - b$, d'après (4), il est clair que $K = k(x_1)$ est entièrement engendré par x_1 sur k. De plus, si l'on pose :

(5) $\alpha = \sqrt{\Delta}$, $\Delta = b^2 - 4c$,

on voit immédiatement d'après (2), que $K = k(\alpha)$ est aussi engendré par α sur k.

Deux cas peuvent se présenter :

1°) $\alpha = \sqrt{\Delta} \in k$, ce qui équivaut à :

$\Delta = b^2 - 4c$ est un carré dans k,

ou les racines x_1 et x_2 appartiennent à k, ou : le polynôme $F(x)$ est réductible dans k. Dans ce cas, le corps de décomposition K est égal à k.

2°) $\alpha = \sqrt{\Delta} \notin k$, ce qui équivaut à :

$\Delta = b^2 - 4c$ n'est pas un carré dans k,

ou les racines x_1 et x_2 n'appartiennent pas à k,

ou : le polynôme $F(x)$ est irréductible sur k.

Dans ce cas, le corps de décomposition K contient strictement k. On l'appelle une *extension quadratique de k.*

Nous allons préciser dans ce deuxième cas la forme des éléments de K. Soit $\xi = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in K$.

En remplaçant α^2 par Δ d'après 5, on met ξ sous la forme homographique $\frac{u + v\alpha}{r + s\alpha}$, $r + s\alpha \neq o$, les coefficients u, v, r, s appartenant à k.

Démontrons que la condition $r + s\alpha \neq o$ implique $r - s\alpha \neq o$.

Cela résulte du lemme suivant.

Lemme : *$r + s\alpha = o$ équivaut à : $r = s = o$*

($r, s \in k$).

En effet, supposons $r + s\alpha = o$. La condition $s \neq o$ entraînerait $\alpha = -\frac{r}{s} \in k$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha \notin k$. Il en résulte $s = o$, d'où $r = o$. Réciproquement, $r = s = o \Rightarrow r + s\alpha = o$.

Revenons à l'expression $\xi = \frac{u + v\alpha}{r + s\alpha}$, $r + s\alpha \neq o$.

On a donc en appliquant le lemme à $r - s\alpha$, la condition $r - s\alpha \neq o$, qui permet de multiplier au numérateur et au dénominateur de ξ par le nombre $r - s\alpha$. On obtient :

$$\xi = \frac{(u + v\alpha)\ (r - s\alpha)}{r^2 - s^2\ \Delta} = A + B\alpha \quad A, B \in k$$

Cela prouve que 1 et α sont deux générateurs de K considéré comme espace vectoriel sur k . Je dis que ($1,\alpha$) en est une base : le lemme exprime en effet l'indépendance linéaire de 1 et α sur k.

On a donc démontré le théorème suivant :

théorème 1 . *Dans le cas $\alpha \notin k$, le corps de décomposition K de l'équation F (x) = o sur k est un espace vectoriel sur k de dimension égale à 2, dont une base est constituée par 1 et α* .

Une autre base est constituée par 1 et x_1, ou 1 et x_2, ou même x_1 et x_2 (cette dernière propriété étant laissée comme exercice au lecteur).

Le groupe G défini l'équation F (x) = o sur k.

Quand on a un corps K, il est toujours intéressant de déterminer les automorphismes, c'est-à-dire les bijections σ qui vérifient :

$\forall\ x, y \in K, \quad \sigma\ (x+y) = \sigma(x) + \sigma\ (y)\ ,\ \sigma\ (\ x\ y\ ) = \sigma\ (\ x) \quad \sigma(y)\ ,$

$\sigma\ (1) = 1.$

De plus, comme le corps de base k joue un rôle important, on se limite aux automorphismes σ qui laissent fixes tous les éléments de k:

$\forall\ c \in k\ , \quad \sigma\ (c) = c.$

On les appelle des k - automorphismes de K. Ils constituent évidemment un groupe G pour la composition des applications.

Définition 2/ On appelle *groupe de GALOIS de l'équation F (x) = o sur k* , ou du polynôme F sur k, ou de l'extension K du corps k, le groupe multiplicatif des k - automorphismes de K. On le note :

$$G = \mathrm{Gal}\ (F,\ k) = \mathrm{Gal}\ (K,\ k)$$

Pour déterminer $\sigma \in G$, il suffit de connaître $\sigma\ (\alpha)$, car $\xi = u+v\ \alpha$, $u, v, \in k$ donne $\sigma(\xi) = u + v\sigma\ (\alpha)$.

Mais l'égalité $\alpha^2 = \Delta$ implique $(\sigma\ (\alpha)\ )^2 = \Delta$, d'où

$\sigma\ (\alpha) = \pm\sqrt{\Delta} = \pm\ \alpha$

La condition $\sigma\ (\alpha) = \alpha$ implique $\sigma = I$ (Identité sur K).

La condition $\sigma\ (\alpha) = -\ \alpha$ entraîne $\sigma\ (u + v\ \alpha) = u - v\ \alpha$

qui est effectivement un k - automorphisme de K appelé automorphisme de conjugaison γ . Comme on a $\gamma^2 = I$, le groupe G est isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2 constitué par :

$$G = \{ I, \gamma \}\ ,\quad \gamma^2 = I.$$

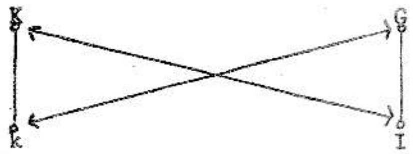
Il est clair, par exemple d'après (2), que γ échange les deux racines x_1 et x_2 de l'équation .

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 2 . *Le groupe de GALOIS G d'une extension quadratique K de k est isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2 constitué par les permutations sur les deux racines x_1 et x_2 de l'équation : la permutation identique et la transposition (x_1, x_2)*

Sous-corps de K contenant k et sous-groupes de G.

Sous-corps de K contenant k est (en particulier) un sous-espace vectoriel sur k contenant un espace vectoriel de dimension (l'espace k = k.1) et contenu dans un espace vectoreil de dimension 2 (l'espace K). On a donc nécessairement k' = k ou k' = K.



Un sous-groupe G' de $G = \{I, \gamma\}$ est évidemment, soit l'identité, soit G lui-même.

Il en résulte le diagramme ci-contre.

avec les remarques suivantes qui établissent une correspondance binnivoque entre les sous-groupes de G et les sous-corps de K contenant k.

<u>G = Gal (K,k)</u> (définition 2)

<u>k = Fix (K,G)</u> (sous corps F de K constitué par les éléments fixes par tous les k - automorphismes de G. On a évidemment $k \subset F$ et $F \neq K$ puisque γ transforme α en $-\alpha$, d'où F = k)

<u>I = Gal (K, K)</u> car G ne laisse pas fixe α

<u>K = Fix (K, I)</u> évident

<u>Exemples</u>

Equation	Corps k	Racines	Corps K	Groupe G
$x^2 - 2x - 1 = 0$	$\mathbb{Q}$	$1 \pm \sqrt{2}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$
$x^2 - 2x - 19 = 0$	$\mathbb{Q}$	$1 \pm 2\sqrt{5}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	"
$x^2 + 1 = 0$	$\mathbb{Q}$	$\pm i$	$\mathbb{Q}(i)$	"
$x^2 + 1 = 0$	$\mathbb{R}$	$\pm i$	$\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$	"

Dans l'exemple d'une extension quadratique, le diagramme de la figure 3 est plutôt squelettique. Mais la définition 1 du corps de décomposition K d'une équation F (x) = o sur k, et la définition 2 d'un groupe de GALOIS de F sur k, se généralisent évidemment à un polynôme F quelconque. Voici deux exemples supplémentaires qui donnent lieu à une variété plus grande.

2. <u>Deuxième exemple</u> : <u>L'équation $(x^2+1)(x^2-2) = 0$ sur Q</u>

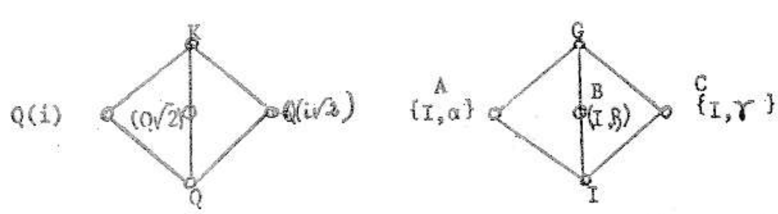
Je donne seulement les résultats, en renvoyant à G. BIRKHOFF et S. MACLANE [2], page 304, pour plus de détails.

$K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ est un espace vectoriel de dimension 4 sur Q, de base $(1, i, \sqrt{2}, i\sqrt{2})$ sur Q.

$G = (I, \alpha, \beta, \gamma)$ est isomorphe au <u>groupe de Klein</u> dont la table de multiplication est ci-contre.

	I	α	β	γ
I	I	α	β	γ
α	α	I	γ	β
β	β	γ	I	α
γ	γ	β	α	I

Le diagramme des sous-corps de K contenant Q et des sous-groupes de G est le suivant :



avec la correspondance binnivoque

Q	Q(i)	Q(√2)	Q(i√2)	K
↕	↕	↕	↕	↕
G	A	B	C	I

qui est telle que : A = Gal (K, Q (i)), Q (i) = Fix (K, A) etc...

3. Troisième exemple . L'équation $x^4 - 3 = o$ sur Q
(vois G. BIRKHOFF et S. MACLANE 2 , page 306)
K= Q (i, $\sqrt[4]{3}$) est un espace vectoriel de dimension 8 sur Q, de base ($1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3$, i, $i\alpha$, $i\alpha^2$, $i\alpha^3$) avec $\alpha = \sqrt[4]{3}$.
G est un groupe non abélien d'ordre 8 isomorphe au groupe diédral du carré, c'est-à-dire au groupe des isométries du plan qui laissent globalement invariants les sommets d'un carré. (On pourra trouver une petite étude de ce groupe dans [7] chap. 9, exercice 10).
De plus, il existe une correspondance binnivoque décroissante entre les sous-corps de K contenant Q et les sous-groupes de G par les applications réciproques :

$$G' = G(k') = \text{Gal } (K, k'), \quad k' = \text{Fix } (K, G')$$

4. Les exemples précédents suffisent, je crois, pour donner une idée assez claire des résultats obtenus par GALOIS dans la théorie des équations algébriques. Les méthodes qu'il utilisait ne sont pas tout à fait celles qui sont présentées ici. Mais c'est bien à lui, comme le dit E. PICARD dans sa préface aux oeuvres de GALOIS publiées par l'Académie en I897 et rééditées en I951 [6], que"la gloire était réservée de montrer que, pour toute équation algébrique, il existe un groupe dans lequel se reflètent les propriétés essentielles de l'équation". Il a pu en outre démontrer, ce qui était le but de ses recherches, qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si le groupe associé est résoluble (je m'adresse ici à ceux qui connaissent ces notions de pure théorie des groupes ; les autres peuvent faire confiance à GALOIS pour la beauté, la profondeur en même temps que la simplicité des propriétés mises en jeu). Enfin, en prouvant que le groupe associé à l'équation générale de degré n" est le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, et que celui-ci n'est pas résoluble pour $n \geqslant 5$, il donnait une réponse définitive pour l'impossibilité de la résolution par radicaux d'une équation générale de degré $\geqslant 5$.

J'ajoute encore que la vie de ce génie est aussi intéressante que son oeuvre. (Voir par exemple une conférence que j'avais faite à Poitiers en I963 et qui est publiée dans le bulletin de l'A.P.M. [8])

III - QUELQUES MOTS SUR LA CONJECTURE DE A. WEIL RESOLUE PAR P. DELIGNE

Avançons d'un siècle et demi pour arriver aux temps modernes et dire quelques mots sur la conjecture de A. WEIL résolue par P. DELIGNE (exposé de JP. SERRE au séminaire Bourbaki, février I974). Il s'agit encore, comme vous allez voir, de théorie des équations albriques .

Maintenant on considère une équation algébrique sur un corps fini, par exemple le corps $F_p = Z/_{pZ}$ qui a p éléments (p premier) ou plus généralement le corps F_q qui a $q = p^h$ éléments ; on cherche le nombre des solutions ($x_1, \dots, x_n$) dans $F_q^{\ n}$ de l'équation :

(1) $f\ (x_1, \dots , x_n) = 0$

où $f(X_1, \ldots, X_n) \in F_q[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme à coefficients dans F_q. Des recherches avaient déjà été faites par GAUSS et JACOBI au siècle dernier pour le nombre de solutions de certaines congruences modulo p, au cours de ce siècle, par les arithméticiens HARDY et LITTLEWOOD (1922), DAVENPORT et HASSE (1935). Mais ce sont les méthodes de la géométrie algébrique introduites par A. WEIL (1949) [9] qui ont ouvert des voies nouvelles dans ce domaine. Elles consistent à considérer l'équation (1) comme celle d'une variété algébrique dans l'espace affine sur le corps F_q (ou plutôt sur sa clôture algébrique $\overline{F_q}$), et à chercher les points de cette variété appartenant à F_q^n. WEIL et quelques autres ont trouvé des résultats partiels et proposé des conjectures qui n'ont pu être démontrées que récemment par P. DELIGNE [5]. DELIGNE arrive à traiter non seulement le cas d'une équation, mais celui d'un système d'équations qui définissent dans l'espace projectif une variété algébrique V intersection complète sans point singulier de dimension. La formule donnée pour le nombre N des points dont les coordonnées appartiennent à F_q sur cette variété V, formule qu'il n'est pas question de reproduire ici, a pour conséquence l'inégalité suivante :

$$\left| N - (1 + q + \ldots + q^d \right| < B\, q^{d/2}$$

où B est un nombre de Betti définissant un caractère géométrique de la variété.

Pour terminer sur un exemple infiniment plus simple, on peut chercher les points dans F_q^2 du "cercle"

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

(cf. E. ARTIN, algèbre géométrique, [1] ou, plus modestement, LESIEUR Géométrie, Cours de C_3 Sciences mathématiques, Orsay). Lorsque $p \neq 2$, On en trouve $q - 1$ dans le cas hyperbolique (c'est-à-dire lorsque (-1) est un carré dans F_q, ce qui équivaut à $q \equiv 1 \pmod 4$) et $q + 1$ dans le cas elliptique (c'est-à-dire lorsque (-1) n'est pas un carré dans F_q, ce qui équivaut à $q \equiv 3 \pmod 4$)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. E. ARTIN — Algèbre géométrique Paris, Gauthier-Villars
2. B. BIRKHOFF et S. MACLANE — Algèbre, II, les grands théorèmes, Librairie Gauthier-Villars
3. N. BOURBAKI — Algèbre, Chapitre 1, librairie Hermann
4. N. BOURBAKI — Algèbre, chapitres 4 et 5, librairie Hermann.
5. P. DELIGNE — La conjecture de WEIL, I. Publ. Math. IHES, n° 43, P.U.F., 1974.
6. GALOIS — Oeuvres mathématiques, Paris, Gauthier-Villars 1897, nouvelle édition en 1951.
7. L. [illegible]EUR, Y. M[illegible], J. LEFEBVRE, Cl. JOULAIN — [illegible]lgèbre linéaire et Géométrie, collection U, [illegible] paraître.
8. L. LESIEUR — Evariste GALOIS, Bulletin de l'A.P.M. octobre 1963, n°232
9. A. WEIL — Number of solutions of équations infinite [illegible]elds Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949) p. 497-[illegible]3

VISUALISATION ET MATHÉMATIQUE

par Marcel DUMONT
(conférence prononcée en 1976 à ANGOULEME)

Un vigoureux plaidoyer pour l'image, preuves à l'appui.

I - INTRODUCTION

Des nécessités contemporaines contraignent, bon gré, mal gré, les responsables de l'enseignement à envisager des réformes. Faute de s'attaquer au contenu de cet enseignement, c'est-à-dire aux raisons d'être de l'école, la plupart de ces réformes n'ont qu'un caractère superficiel... et éphémère. On commence à envisager des réformes de structures mais il ne s'agit toujours pas de restructurer les contenus et les objectifs. Certains osent parfois repenser certains contenus (cf. réforme des programmes en mathématiques) mais, soit à cause d'oppositions stériles, soit à cause de vues étriquées, ces réformes se révèlent très vite inadéquates. Ces deux causes, oppositions stériles - vues étriquées tiennent le plus souvent à la difficulté de sortir des habitudes, à un manque d'audace dans la conception de nouveaux moyens et de nouvelles méthodes.

Notre propos est de montrer comment :

- l'application de quelques principes généraux,
- l'utilisation de moyens variés, en particulier la visualisation,

pourrait introduire dans l'enseignement :

- des concepts fondamentaux, tant sur le plan social que mathématique, concept ignoré pour la plupart des programmes actuels,
- un sens de l'efficacité permettant de réduire considérablement la durée des apprentissages.

Pour quelques idées générales concernant méthodes et moyens, nous renvoyons le lecteur à divers articles :

- Compte-rendu du Séminaire C.I.E.M. Echternach (1972). "A propos des fonctions booléennes".
- Bulletin A.P.M. : "A propos de Finalités" n° 283 page 245
  "A propos de méthodes" n° 294 page 465
  "Un petit tronc pas cher" n° 290 page 584
- Média n° 79 (Mars 1976) : "Visualisation et animation dans l'enseignement des mathématiques".

II - QUELQUES PRINCIPES (encore !)

1) Si l'objectif de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre à déduire, alors le seul critère absolu de rigueur est le passage en machine, c'est-à-dire là où l'enchaînement des propositions est automatique. En ce sens, l'élaboration d'un programme pour un ordinateur ou un simple calculateur programmable, éduque plus la "rigueur" que n'importe quelle démonstration plus ou moins verbeuse où chaque mot est lourd de sous-entendus bien ou mal entendus, et dont la syntaxe est plus ou moins bien connue de l'élève.

Dans ce cas les images n'apprendront jamais à déduire. Elles ne peuvent que visualiser une déduction. Par contre, la recherche d'une démonstration peut être facilitée par l'observation d'images adaptées (cf. ...) et en ce sens une bonne visualisation permet d'apprendre à chercher des démonstrations.

2) Si l'objectif de l'enseignement des mathématiques est d'apporter un bagage maximum de connaissances qui seront par la suite des modes de pensée, alors la construction et la présentation exclusivement déductives et ces connaissances est extrêmement longue et pénible, surtout lorsqu'elle s'exprime par la voie formelle d'écritures qui ne suggèrent rien d'autre que des écritures. Par opposition à ces modes d'expression séquentiels, donc très longs à décoder, les images permettent de synthétiser globaliser les informations ; donc peuvent raccourcir considérablement la durée d'acquisition des connaissances (la disparition de la géométrie traditionnelle a supprimé le seul domaine où l'intuition en s'appuyant sur des images permettait de gagner un temps considérable et rien n'a remplacé ce domaine organisé d'images, sinon quelques patates et flèches plus ou moins bien utilisées).

3) Ce qui paraît facile est ce que l'on sait faire. Ce qui paraît difficile, c'est ce qui n'est pas familier, ce qu'on n'a jamais vu ou jamais fait. L'objectif n° 1 de la visualisation est donc de rendre familier des images qui par la suite pourront servir de représentations commodes à des concepts habituellement réservés aux grandes classes.

Une visualisation bien adaptée est donc un moyen d'introduire dans la culture générale des idées socialement importantes jusque là réservées aux spécialistes.

4) Les croyances sont dues aux usages. Exemple : le nombre de dimensions de l'espace dans lequel nous vivons : Pourquoi les élèves travaillent-ils presque toujours aux propriétés d'un espace à 2 dimensions, représenté par la feuille ou le tableau ? Pourquoi, au delà de trois dimensions la plupart des gens considèrent-ils ceci comme un fantasme propre à quelques illuminés ?

Il est probable que l'apparition de nouveaux moyens de représentation feront découvrir à l'homme l'espace sous de nouveaux et nombreux horizons, dépendant surtout des problèmes qu'il se pose.

5) Les idées jaillissent presque toujours à la suite de rapprochement d'images. Une image isolée n'a donc qu'un impact réduit : elle ne fait qu'accroître le bagage des souvenirs. C'est le rapprochement d'images qui peut inciter les spectateurs à suggérer des images antérieures qui lui sont propres et l'inciter à se faire "ses propres idées" (au lieu de répéter celles des autres).

6) Une série d'images peut donner l'idée d'une généralisation vers un objectif précis. Mais si on change l'objectif, alors la même série d'images peut contrarier l'effort de généralisation.

7) Une image ne démontre rien. Elle expose, elle fournit des perceptions. Si le spectateur réussit à intégrer ces perceptions dans le bagage de ses souvenirs, alors elle lui apporte des informations. Mais si le spectateur ne fait que subir l'image, alors celle-ci s'accumule seulement aux bagages antérieurs et reste provisoirement sans effet (à moins qu'elle ne provoque l'effet contraire à celui que l'on attend).

8) Une image ne pose jamais de questions (malgré les points d'interrogation et autres clignotants) Les questions sont toujours dans la tête de l'observateur et si celui-ci n'a pas envie de se poser de questions, l'image n'y changera rien. Par contre si des rapprochements d'images suggèrent soit une contradiction, une gêne, soit un sentiment de satisfaction il est possible que le spectateur soit amené à se poser des questions, mais pas nécessairement celles qu'on aurait voulu (et c'est heureux que chacun puisse encore rester libre de penser quand il en a envie !)

9) Plus une image est pauvre, moins elle enrichit le bagage des perceptions. Si l'observateur a déjà beaucoup d'images en tête, alors par sa pauvreté même, l'image qu'on lui fournit peut l'inciter à réfléchir. Mais en général, l'expérience montre que plus les images sont pauvres, plus le spectateur reste pauvre en idées (à moins que, par esprit de contradiction, il ne cherche à meubler le vide, hélas notre école n'incite guère à la contradiction).

Mais il s'agit là de l'image proprement dite. Si nous réfléchissons à l'activité mathématique elle même, alors il semble essentiel de souligner que les mathématiques se font <u>sur</u> des activités mathématiques, et non sur des états mathématiques. A un premier niveau, ce sont donc les situations qui se transforment, qui sont intéressantes à modéliser afin de prévoir. Les modèles sont, soit des systèmes d'écritures que l'on fait fonctionner avec des règles, soit des représentations, hélas statiques jusqu'à ce jour, mais qu'il serait bon d'animer (comme des maquettes).

Si on ajoute à cette idée le fait qu'une situation peut être représentée par divers modèles et qu'un modèle peut avoir plusieurs interprétations, alors on peut résumer les objectifs essentiels d'une visualisation animée.

1 - Diversifier les "significations", c'est-à-dire les représentations. Chacune d'elles servant de signification à l'autre. (René Tom a souligné l'importance psychologique de la signification) Le formalisme en effet ne devient important que pour "automatiser le fonctionnement".

2 - Permettre ainsi les rapprochements et transferts.

3 - Susciter des généralisations. Mais mieux que des discours, les exemples permettront peut être de préciser quelques idées.

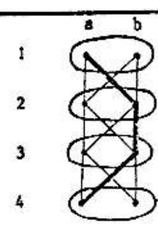
III - QUELQUES EXEMPLES

Naturellement, on ne visualise pas le désert ou le presque désert, sauf pour montrer le désert ! La demi droite et le quart de point n'ont pas besoin d'animation ! Ceci explique pourquoi la plupart des exemples vont concerner des situations combinatoires (dont on parle peu dans les manuels, justement parce qu'on est désarmé) (cf. "surfaces" de Griffiths Ed. Cedic).

1er Exemple :

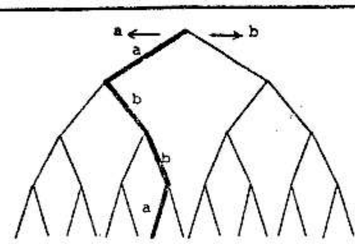
Identités remarquables et coefficients binomiaux ou puissances du binôme $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ etc...

Toutefois, la multiplication est commutative : abba = aabb = etc... Il est difficile de compter les termes $a^2\,b^2$ sur le "clavier". Alors on transforme l'arbre en appliquant l'axiome ab = ba. Ce qui revient à superposer les noeuds en appliquant la règle : si on part de n'importe quel point, suivre à gauche, puis à droite, nous amène au même point qu'en suivant d'abord à droite puis à gauche. L'arbre se transforme en réseau à 2 dimensions.

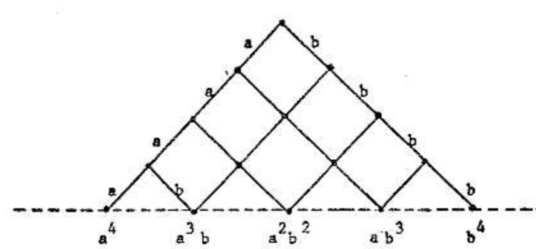


Par dualité chaque point devient une arête. Les patates se dédoublent. Le clavier devient un arbre.

Les traits signifiant "multiples" (en gros, le terme abba, soit $a^2\,b^2$)



On comprend immédiatement pourquoi $(a+b)^4$ contient 16 termes.



On comprend alors pourquoi le coefficient de $a^2\,b^2$ est le nombre de chemins qui amènent au point correspondant à 2 étapes "a" et 2 étapes "b".

Naturellement la généralisation est facile : Puissances d'un trinome $(a + b + c)^2$ $(a + b + c)^3$ $(a + b + c + d)^4$

Une animation analogue pourrait nous montrer comment on obtient les coefficients polynomiaux à partir du réseau à 3 dimensions (transformé de l'arbre exponentiel (base 3) 3 axiomes de commutativité ab = ba ; bc = cb ; ac = ca)

Evidemment comment passer à 4 dimensions ? Qui a jamais vu un réseau à 4 dimensions ? (cf plus loin).

<u>Remarque 1</u> : rapport avec les dénombrements de sous-ensembles.

a et b sont les réponses oui, non aux 4 questions concernant les 4 objets (1, 2, 3, 4) d'un ensemble : est-il élément oui ou non ? L'arbre visualise le questionnaire : chaque étage représente une question, chaque branche une réponse. On comprend alors pourquoi le développement de $(a + b)^4$ donnent comme coefficients les nombres de sous-ensembles équipollents d'un ensemble de 4 objets.

Pb. : trouver une interprétation semblable pour $(a + b + c)^4$

<u>Remarque 2</u> : Le triangle de Pascal se généralise mal. Il vaudrait mieux le voir sous la forme d'un rectangle pour 2 raisons :

1) On passe de suite aux réseaux à 3, 4 dimensions, etc.

2) IL souligne l'absurdité du codage actuel des coefficients.

Exemple : le coefficient de $a^3 b^2$ est noté traditionellement C_5^3. Maintenant on le note $\binom{5}{3}$ et c'est aussi stupide car il ne met pas en valeur la commutativité de la loi, et il ne se généralise pas.

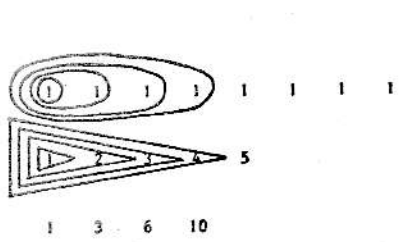
Il voudrait mieux choisir les coordonnées du point du réseau et l'écrire par exemple $C(3, 2)$ qui est égal à $C(2, 3)$.

La raison de cet usage incohérent tient à l'unicité de l'interprétation : on ne veut penser qu'aux sous-ensembles à 3 éléments d'un ensemble de 5. Si on pense au réseau, alors le codage par les coordonnées devient évident. De plus il mémorise facilement la récurrence $C(3, 2) = C(2, 2) + C(3, 1)$, et cette notation se généralise à 3 dimensions :

$$C(3, 2, 4) = C(2, 2, 4) + C(3, 1, 4) + C(3, 2, 3)$$

En effet pour parvenir à un sommet du réseau, on est obligé de passer par les avant-derniers sommets.

L'habitude de voir le réseau permet instantanément d'inventer et retrouver toutes les formules habituellement données en exercice et d'autres encore.



<u>Remarque 3</u> : Si on veut ouvrir vers le numérique, alors l'idée de cumul est en germe l'amorce de l'idée d'intégration et on peut la visualiser par des closes du genre (on cumule à partir du début et la somme devient le terme de la ligne du dessous).

Naturellement les suites de Fibonacci peuvent être rapprochées mais on en reparlera une autre fois.

<u>2ème exemple</u> :

Les "simplexes" (ou pavés à n dimensions)

Pourquoi ? Parce que ces images sont fondamentales et peuvent représenter beaucoup de choses :

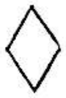
a) Fonctions booléennes en automatique
en logique
en probabilité.

b) Des groupes, corps et espaces vectoriels particuliers (corps à 2 éléments).

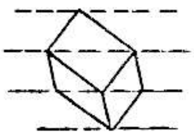
c) Des groupes symétriques.

d) Des treillis de diviseurs de naturels simples (c'est à dire de naturels n'ayant aucun diviseur primaire,(puissance de premier). 2×3 est simple ; $2 \times 2 \times 3$ n'est pas simple ; $2 \times 3 \times 5 \times 7$ est simple.

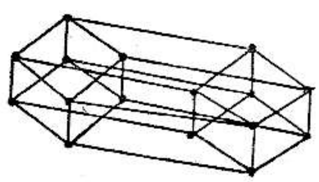
1 dim.



2 dim.



3 dim.



4 dim.

Voici ci-contre le début de la série des simplexes.

On trouvera à l'OFRATEME une série de films à ce sujet, l'un montrant en particulier le passage de l'arbre dichotomique au simplexe. Il reste encore à animer la transformation d'un arbre factoriel en simplexe à cause des axiomes de commutativité !)

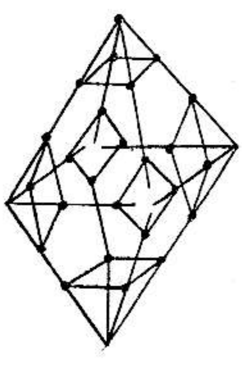
Naturellement le simplexe à 4 dimensions est le module de base permettant de comprendre ce qu'est un réseau à 4 dimensions.

3ème Exemple : Les dualités.

On ne parle guère des groupes finis dans nos programmes, ce qui est stupide car la théorie a bien été mise au point pour répondre des équations et il s'agissait de situations finies. En outre, les objets géométriques traditionnels donnaient lieu à l'étude de groupe des transformations, isométries par exemple. Bref, passons.

N'ayant que de groupes infinis, les représentations par diagramme de Cayley, ne pouvaient être faites, empêchant ainsi l'intuition de deviner un grand nombre de propriétés fondamentales en théorie des groupes. A fortiori il n'était pas question de représentation duales.

Voici une idée à propos par exemple du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ (car les 24 présentations d'un ensemble de 4 objets).



Si on prend comme générateurs les transpositions (1, 2) (2, 3) (3, 4) on obtient en guise de diagrammes un oactaèdre tronqué : (ce que GUILLARD a appelé les permutoèdres).

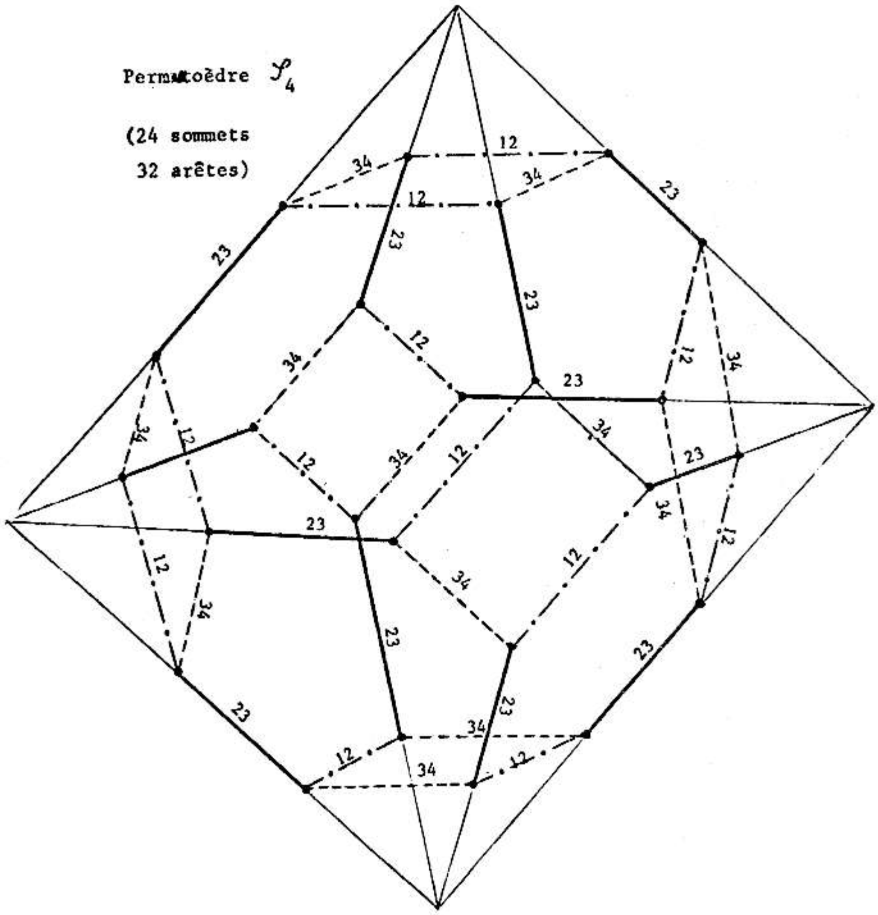
Passons sur la recherche des circuits hamiltoniens et des algorithmes correspondants.

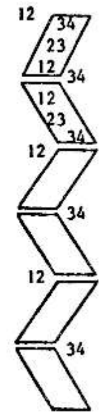
L'idée intéressante est de représenter chaque sommet à 3 arêtes par une face à 3 arêtes. Au lieu de suivre une arête sur le diagramme de Cayley (c'est-à-dire dans ce cas l'octaèdre tronqué) on franchit une frontière (ici dans les 2 sens).

On obtient ainsi des "graphes" beaucoup plus simples à construire et observer.

Permutoèdre $\mathcal{S}_4$

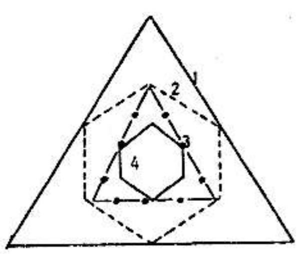
(24 sommets
32 arêtes)



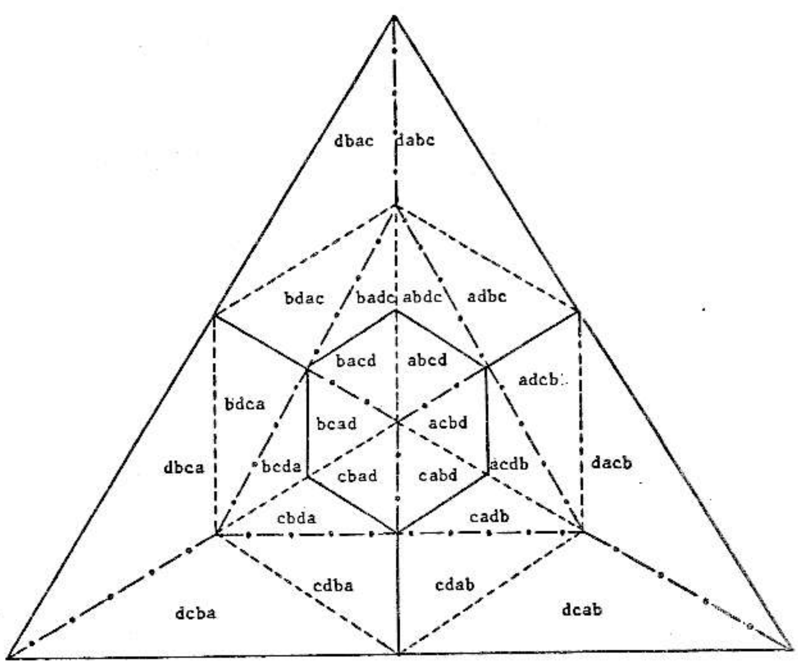


Circuit hamiltonien à rapprocher d'un circuit sur l'octaèdre (évident).

Voici le dual de permutaèdre précédent : on pourrait l'appeler le "permutogone".



Traverser ici une frontière équivaut à suivre la flèche sur l'octaèdre tronqué.



Permutogone (16 sommets au lieu de 34)

On peut utiliser cette dualité pour n'importe quel groupe. Les difficultés nouvelles attireraient l'attention sur de nouveaux concepts ou théories.

Mais ici il y a mieux : 4 simplexes à 4 dimensions représentent aussi les 24 permutations (24 chemins figurant un sommet au sommet opposé). (1 sommet de l'octaèdre tronqué devient un chemin à 4 tronçons). Il est extrêmement intéressant de faire le transfert et de voir comment on passe d'un chemin à un autre. Le changement de représentation permet alors de "voir" sur le simplexe des sous-groupes bien organisés.

Il s'agit là d'une idée, sans doute extrêmement importante ; cherche le lieu entre les groupes symétriques et les groupes booléens.

4ème exemple : plonger un problème particulier dans un contexte plus large qui rende la ou les solutions évidentes.

Ainsi les propriétés de médianes d'un triangle deviennent évidentes. Si on trace le réseau des parallèles aux médianes (3 directions)
pb. : étant donné le réseau, construire le triangle, etc.

Beaucoup de problèmes analogues montrent l'importance :

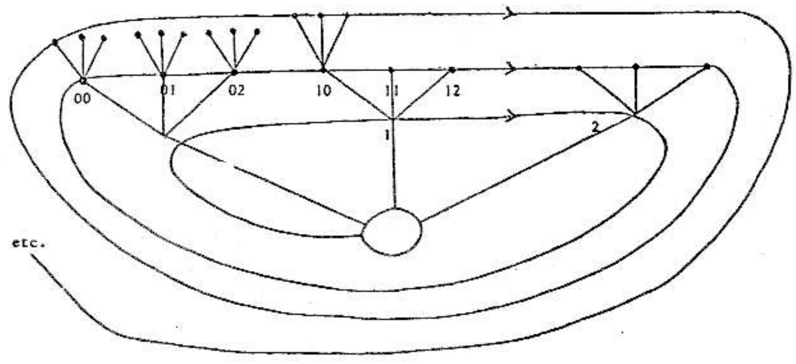
1) de visualisation

2) de donner toujours envie de généraliser, d'élargir et comparer, etc.

5ème exemple : A propos des types d'ordre.

Dessiner un arbre exponentiel en base 3 par exemple et animer les façons diverses de circuler sur l'arbre, ce qui permet d'ordonner totalement l'ensemble infini des mots de longueur finie

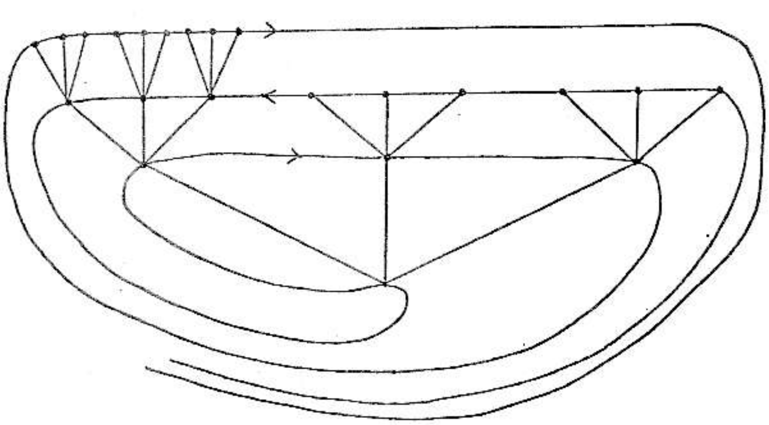
a) Ordre sur N.



- impossibilité d'intercaler entre 2 mots
- 1 borne d'un côté, pas de borne de l'autre.

On ramasse tout par niveau avant de monter.

b) Ordre sur $\mathbb{Z}$
(Ou façon de coder $\mathbb{Z}$ sans signes de classe)



- impossibilité d'intercaler entre 2 mots
- pas de borne.

La longueur du mot indique la classe.

c) Ordre du dictionnaire

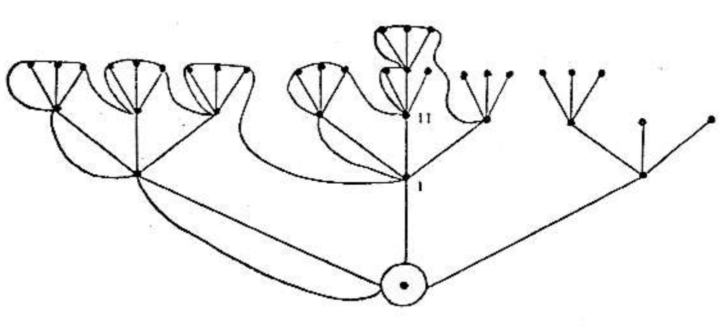
On ramasse tout sur une branche avant de passer à la branche suivante.

- Ici on peut intercaler

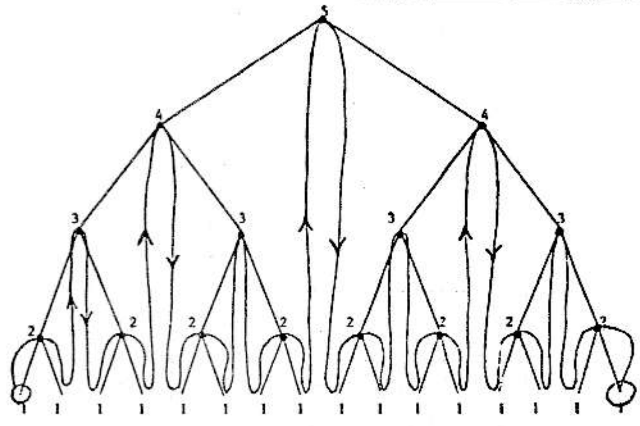
Par exemple entre 1 1 1 1 et 1 1 1 2. On peut intercaler 3 mots, il suffit de s'élever d'un niveau, c'est-à-dire augmenter la longueur du mot.

1 1 1 1
——————— 1 1 1 1 0
——————— 1 1 1 1 1
——————— 1 1 1 1 2
1 1 1 2

C'est l'ordre du dictionnaire, ou encore celui des nombres à virgule (dits décimaux et mal nommés car la base n'a rien à voir).



c) Ordre du dictionnaire



d) Autre algorithme (base 2)

d) Autre algorithme (base 2)

L'algorithme 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, etc..., n'est autre que l'algorithme des codes cycliques ou code de Gray (ou circuit hamiltonien sur les simplexes).

C'est aussi l'algorithme des puissances de 2 dans la décomposition des naturels en produit de facteurs primaires (cf. fiche sur les polylog. E.L. 75-76).

	2	3	5	7	11	13
2	1					
3	0	1				
4	2					
5	0	0	1			
6	1	1				
7	0	0	0	1		
8	3					
9	0	2				
10	1	0	1			
11	0	0	0	0	1	
12	2	1				
13						
14						

Faute de temps et de place, je souhaite bon courage aux générations futures car tout est à faire dans ce domaine des représentations. Encore faut-il échapper au point et à la droite graduée !

VACANCES ET OUBLI

par Louis SANCHEZ (E.N. BOURGES)
et Messieurs BALMET, CHARIOT, JOULIN et LASSOUS (maîtres d'application)

"La culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié ..."
Que reste-t-il après 10 semaines de vacances ?

Au cours de la dernière semaine du mois de juin 1976, les élèves des classes de CM 1 des écoles annexes et d'application ont eu à calculer les opérations du tableau ci-dessous. Les mêmes élèves ont recommencé les mêmes calculs au cours de la première semaine de classe en septembre 1976.

Pour chaque opération, nous avons classé les élèves en quatre catégories.

VV : élèves ayant réussi le calcul en juin et en septembre
VF : " " " et échoué en septembre
FV : élèves ayant échoué en juin et réussi en septembre
FF : élèves ayant échoué en juin et en septembre.

Opérations	VV	VF	FV	FF	Encadrement de la perte due aux vacances
1- 2371 + 128	98	1	1	0	$0 \leqslant p \leqslant 1$
2- 6937 - 4516	95	4	1	0	$3 \leqslant p \leqslant 4$
3- 382 x 7	84	8	5	3	$3 \leqslant p \leqslant 8$
4- 6734 ÷ 7	79	12	6	3	$6 \leqslant p \leqslant 12$
5- 9657 + 5824	83	11	5	1	$6 \leqslant p \leqslant 11$
6- 7692 - 4854	86	8	3	3	$5 \leqslant p \leqslant 8$
7- 789 x 64	57	33	5	5	$28 \leqslant p \leqslant 33$
8- 3827 ÷ 28	56	28	8	8	$20 \leqslant p \leqslant 28$
9- 54,271 + 346,93	63	22	10	5	$12 \leqslant p \leqslant 22$
10- 532,17 ÷ 39,263	54	22	13	11	$9 \leqslant p \leqslant 22$
11- 9,53 x 10	64	25	5	6	$20 \leqslant p \leqslant 25$
12- 5847 - 79	59	28	5	8	$23 \leqslant p \leqslant 28$
13- 5,83 x 2,7	57	28	2	13	$26 \leqslant p \leqslant 28$

L'addition des résultats des catégories VV et VF montre que toutes les opérations ont connu une réussite en juin supérieure à 80 % sauf la soustraction 532,17 - 39,263, où le pourcentage n'est que (si l'on peut dire) de 76 %.

Pour obtenir les pourcentages de réussite en septembre, il suffit d'additionner les résultats des catégories VV et FV. Pour les six premières opérations les résultats sont sensiblement les mêmes qu'en juin. Par contre pour les sept dernières les pourcentages de réussite sont inférieurs à 80 %.

La catégorie FV peut être interprétée de deux façons :

- un élève de cette catégorie a progressé durant les vacances pour des raisons diverses (travail personnel, maturation des acquisitions de l'année...)
- un élève de cette catégorie s'est trompé fortuitement au mois de juin et n'a pas renouvelé son erreur en septembre.

On peut ainsi déduire un encadrement du nombre des erreurs forfuites. Si x est ce nombre, il est compris entre 0 et le nombre de résultats de la catégorie FV.

En estimant que les risques d'erreur forfuite sont les mêmes en juin et en septembre, on peut alors en reportant l'encadrement précédent, encadrer la perte due aux vacances.

La dernière colonne du tableau indique donc un encadrement raisonnable de cette perte pour chaque opération.

On voit apparaître nettement deux catégories d'opérations :

- les 6 premières où la perte est inférieure, en moyenne, à 10 %.
- les 7 dernières où la perte est supérieure, en moyenne, à 15 %.

Il apparaît donc que les opérations présentées ou révisées au CE 2 sont pratiquement assimilées en fin de CM 1 : la perte due aux vacances est faible.

Par contre, les opérations présentées au CM 1 ne sont pas encore bien dominées et, à l'entrée au CM 2, on constate une perte qui n'est pas négligeable.

Nous n'avons pas la prétention d'avoir fait une découverte à travers cette expérience. Il est évident que tous les maîtres ont déjà constaté que les enfants du mois de septembre n'ont pas le même "rendement" que ceux du mois de juin, et qu'une période de révision, plus ou moins longue, est nécessaire en début d'année. Nous avons voulu simplement compléter l'information de nos collègues en ce domaine.

Nous remercions vivement les collègues qui nous ont aidé dans notre travail.

savez-vous...

Que votre Régionale a besoin de vous pour assurer la vie future du P.L.O.T. ?

Alors n'omettez pas de régler votre abonnement 1978 (15 F) en répondant à l'appel que vous recevrez avec l'appel de la cotisation nationale.

QUAND LES ÉLEVES CALCULENT

par Amélie BROUSSET (JONZAC)
et Serge GOUIN (ROCHEFORT)

Où l'on peut s'amuser avec des nombres.

EN SIXIEME

Faire calculer 12345679×9. On trouve un nombre ne s'écrivant qu'avec des 1. Poser alors la question : par quoi faut-il multiplier 12345679 pour n'obtenir que des 2 ? que des 3 ? etc...

On peut ensuite demander s'il se produit des phénomènes analogues dans d'autres bases. La réponse est oui : par exemple, en base cinq : $124 \times 4 = 1111$.

EN QUATRIEME OU EN SECONDE !

A titre d'exercice de calcul algébrique, on peut aller un peu plus loin qu'en sixième en posant les questions : cela "marche-t-il" dans toutes les bases ? Pourquoi, en base n, "saute-t-on" toujours le chiffre $n - 2$?

En base 2 : $1 \times 1 = 1$
En base 3 : $2 \times 2 = 11$
En base 4 : $13 \times 3 = 111$ etc...

En base n ($n \geqslant 2$) : $\overline{123\ldots\ (n-p)\ldots\ (n-3)\ (n-1)} \times (n-1)$

Multiplions : $(n-1)^2 = n^2 = -2n + 1 = (n-2)n + 1 = \overline{(n-2)1}$
(écriture en base n)
On pose 1 ; retenue : $n - 2$

$(n-3)\ (n-1) + (n-2) = (n-3)n + 1 = \overline{(n-3)1}$
On pose 1 et on retient $n - 3$

Hypothèse de récurrence : la $(p-2)^e$ multiplication donne une retenue de $n - p + 1$. D'où, pour la $(p-1)^e$ multiplication :

$$(n-p)\ (n-1) + (n-p+1) = \overline{(n-p)n + 1}$$

On pose 1 et on retient $n - p$. Le phénomène se poursuit donc très bien de la même manière jusqu'au bout (pour $p = n - 1$).

Que se passe-t-il si on écrit (n-2) ?

Les élèves découvrent vite sur des exemples qu'on obtient cette fois des 1 et un seul 0.

L'étude du cas général confirme ce résultat :

effectuons 123... (n-2) (n-1) × (n-1)

$(n-1)^2 = (n-2)n + 1$; retenue : n - 2

$(n-2)(n-1) + (n-2) = (n-2)n$. S'écrit $\overline{(n-2)0}$ en base n.

On aura donc un zéro dans le résultat. La retenue étant encore n-2, le calcul se poursuit comme dans le premier cas, et on ne trouve plus que des 1 aux résultats.

Pour finir, signalons l'erreur amusante d'une élève de Sixième.

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 27 \\ \hline 86419753 \\ 24691358 \\ \hline 111111111 \end{array}$$

Surprise de ne pas trouver comme les autres, elle apporte l'opération ci-contre à son professeur.

Comment expliquer ce phénomène ? Se produit-il uniquement pour 27 ?

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

Commandez ces brochures à votre Régionale (voir adresses page 36).

Le premier prix s'entend "port compris".
Le prix entre parenthèses est le prix "port non compris".

8. *Mots I*, 1974, 100 p., 9 F (6 F).
9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p., 4,50 F (3 F).
10. *Carrés magiques*, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 5,50 F (4 F).
11. *Mots II*, 1975, 108 p., 9 F (6 F).
12. *Substitutions et groupe symétrique*, par J. Dautrevaux. Epuisé.
13. *Mathématique pour la formation d'adultes*, CUEEP, par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 18 F (15 F).
14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - APMEP), 1976, 220 p., 18 F (15 F). 2ème édition
15. *Mots III*, 1976, 136 p., 9 F (6 F).
16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p., 4,50 F (3 F).
17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p., 29 F (25 F).
19. *Elem-Math III : La division à l'école élémentaire*, 1977 128 p., 8 F (6 F).
20. *Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques*, 1977, 272 p., 29 F (25 F).
21. *Géométrie au premier cycle, tome 1*, 1977, 192 p., 29 F (25 F).

DES ASTRONOMES EN HERBE SOUS LE CIEL LIMOUSIN

par Pierre BATIER et Michel LABROUSSE (CES Donzelot - LIMOGES)

Des idées pour un beau thème interdisciplinaire

Nous avons organisé une "quinzaine de l'Espace et de l'Astronomie" du mardi 26 avril au mardi 10 mai 1977 dans notre collège (Donzelot) de Limoges. Cette quinzaine s'adressait à tous les niveaux de l'établissement et regroupait des activités assez variées. Voici le plan de travail que nous avions adopté.

I. PLAN DE TRAVAIL :

1) 1er jour 14h à 16h séance de projection de films pour les classes de 3ème.
2) Durant toute la quinzaine : Exposition ouverte les lundi, mardi, jeudi et vendredi de 8h à 17h. Deux formes de visite étaient prévues :
   - soit librement aux heures de permanences et de récréation
   - soit accompagnées et commentées dans le cadre des heures de travail.

Pour les niveaux 6ème, 5ème et 4ème, une séance de projection de diapositives, dans le cadre des horaires de classe a été organisée.

3) Réalisation en 3ème, avec l'aide d'un professeur, par chaque élève d'une "interprétation picturale".
4) Une séance d'observation libre, de 21h30 à 23h réservée aux élèves de 3è. Un trop grand nombre de difficultés ne nous a pas permis d'assurer "transport" et responsabilités". Nous avons conseillé aux élèves de se grouper, de s'entendre avec les parents... et d'être prudents. Cette séance n'était ni obligatoire, ni interdite.

II. LE POLYCOP'

Nous avons réalisé pour les élèves de 3ème un document (le "polycop") dont voici un certain nombre d'extraits.

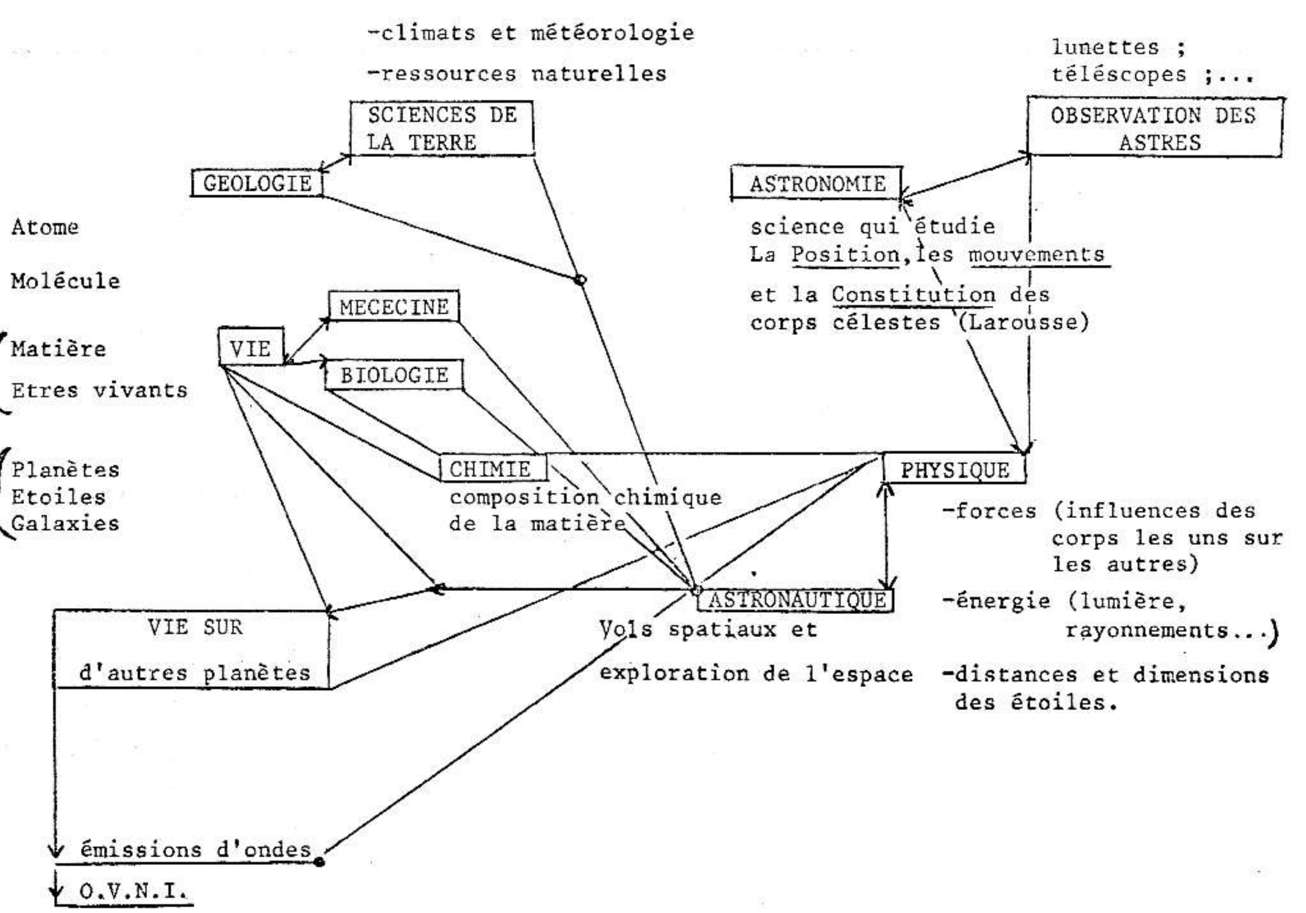
1) En guise de prélude : *IL NOUS FAUT REGARDER*

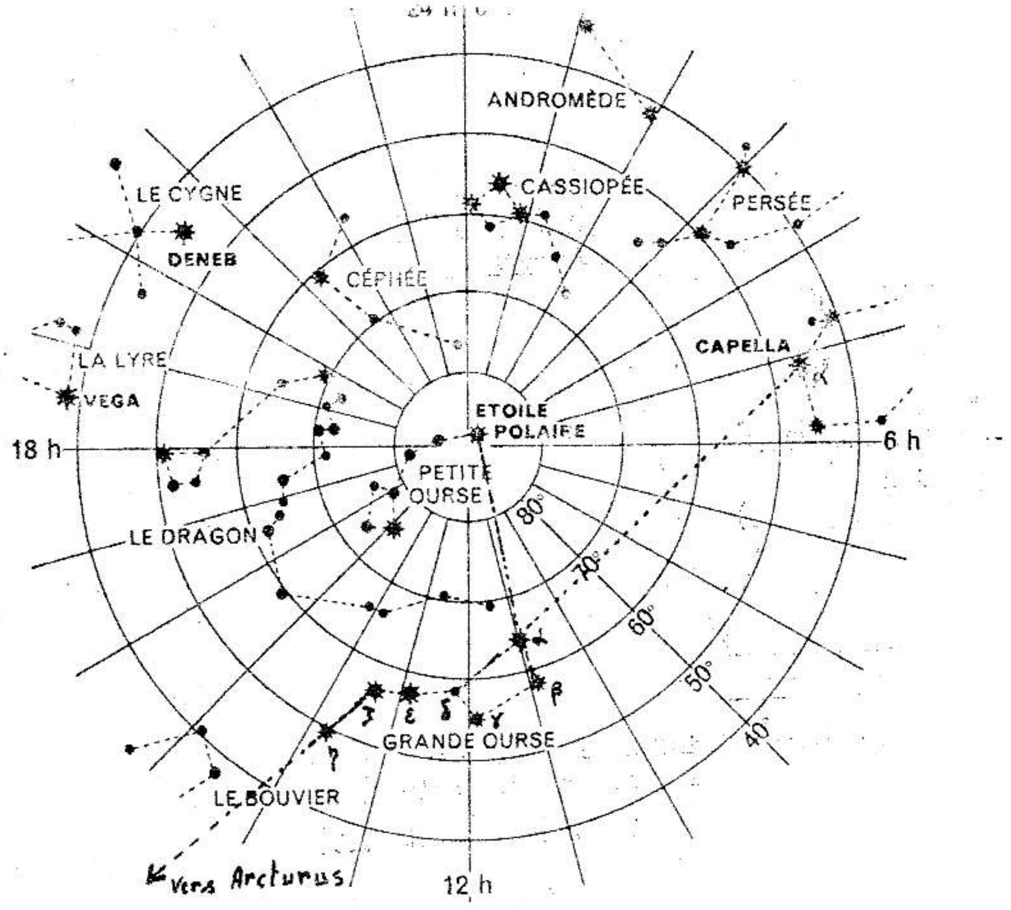
(Jacques BREL).

2) Schéma : l'Astronomie et les différentes sciences qu'elle touche

Derrière la saleté
S'étalant devant nous,
Derrièr'les yeux plissés
Et les visages mous,
Au-delà de ces mains,
Ouvertes ou fermées,
Qui se tendent en vain,
Ou qui sont poing levé,
Plus loin que les frontières
Qui sont de barbelés,
Plus loin que la misère,
Il nous faut regarder,
Il nous faut regarder :
Ce qu'il y a de beau,
Le ciel gris ou bleuté,
Les filles au bord de l'eau,
L'ami qu'on sait fidèle.
Le soleil de demain
Le vol d'une hirondelle,
Le bateau qui revient
L'ami qu'on sait fidèle,
Le soleil de demain,
Le vol d'une hirondelle,
Le bateau qui revient.

Par delà le concert
Des sanglots et des pleurs
Et les cris de colère
Des hommes qui ont peur ;
Par delà le vacarme
Des rues et des chantiers,
Des sirènes d'alarme,
Des jurons de charr'tier,
Plus fort que les enfants
Qui racontent les guerres,
Et plus fort que les grands
Qui nous les ont fait faire,
Il nous faut écouter :
L'oiseau au fond des bois
Le murmure de l'été,
Le sang qui monte en soit,
Les berceuses des mères ;
Les prièr's des enfants,
Et le bruit de la terre
Qui s'endort doucement,
Les berceuses des mères,
Les prièr's des enfants,
Et le bruit de la terre
Qui s'endort doucement.





Ci-dessus : Carte circumpolaire Nord, visible en toute saison.
Ci-contre : Carte aspect Nord/Sud en Mai le soir.

---

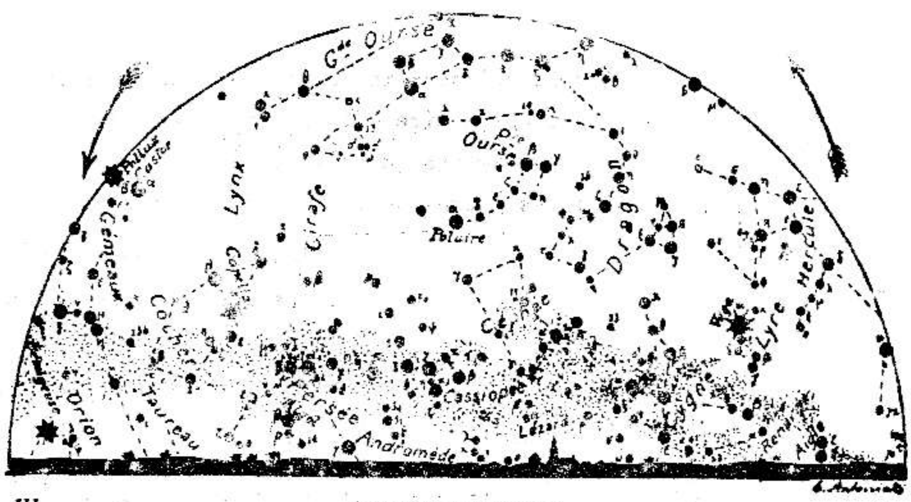
3) <u>Cartes</u> : Aspects du ciel et premières observations.

LE SOLEIL : très dangereux à observer : se protéger très efficacement ; se contenter d'abord de faire les repérages : lever-midi (14h)-coucher.

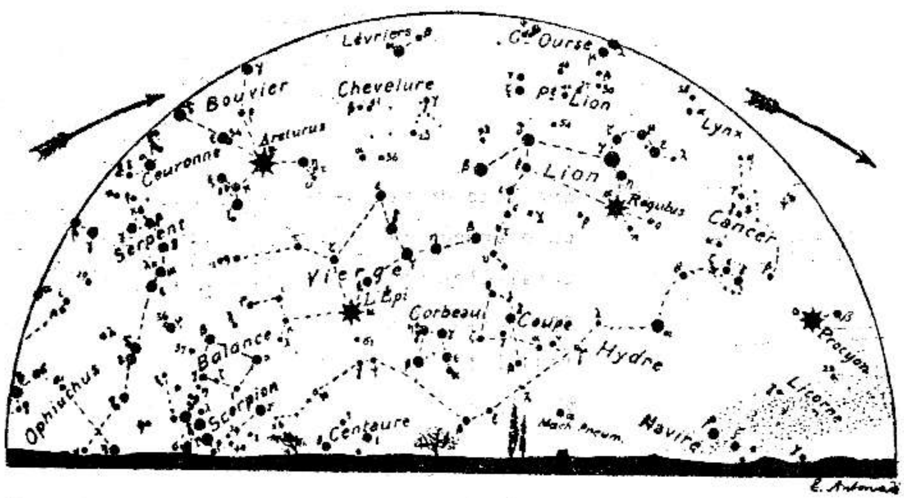
LA LUNE : observation régulière le soir à l'est, puis à partir du 5 le matin à l'est... pourquoi ? Remarquer que la LUNE fait un tour de ciel à l'envers du SOLEIL en une lunaison de "environ" 4 semaines, c'est-à-dire 4 quartiers... etc...

CONSTELLATIONS et ETOILES (points SCINTILLANTS).

PLANETES : non-scintillantes : Mercure invisible
Vénus : à l'aube ; Mars avec Vénus vers le 13 mai
Jupiter : soir, ouest, début du mois dans le Taureau.
Saturne : Dans la constellation du CANCER, visible toute la nuit, lumineuse comme Procyon ou Betelgeuse, mais ne scintille pas.



W Aspect face au Nord. E



E Aspect face au Sud. W

Aspect du ciel étoilé pendant le mois de mai.
Le 1er mai à 21h 30 ou le 15 à 20h 30 heure T.U.
(ajouter 2h pour l'heure civile)

4) <u>La Science Fiction</u>

"Le Jour où l'on définira ce qu'EST la science-fiction, elle n'existera plus". Ainsi parlait Jacques Goimard au congrès de Metz, lors d'une table ronde, en Mai 1976.

Si on ne peut pas dire ce qu'EST la science-fiction, on peut essayer de voir ce qu'elle n'est pas ou ce qu'elle n'est plus : c'est là mon propos pour ce court exposé.

1° : La science-fiction a touché à presque tous les genres, mais elle ne les a pas tous explorés à fond (question de mode).

2° : La science-fiction invente et reconstruit un présent qu'elle projette dans le futur mais ce n'est pas (sauf rares exceptions) LE futur.

3° : La science-fiction propose une évasion rationnelle, c'est-à-dire qu'elle fait coïncider un cadre et des évènements qui s'y déroulent.

4° : Les thèmes de la science-fiction :

a : les voyages dans l'espace
b : l'exploration des planètes
c : les empires galactiques
d : le temps
e : les univers parallèles
f : les machines et les robots
g : les extra-terrestres
h : les mutants et les surhommes
i : les hommes fabricants de mondes
j : les fins du monde
k : les civilisations du futur
l : les épopées et grandes fresques.

5° : Beaucoup de ces thèmes ne sont pas seuls traités dans un ouvrage mais ils se mélangent (temps-univers : parallèles, par exemple) ; d'autres sont presque une spécialité (la SF anglaise et les histoires de fin du monde) ; enfin certains ne sont aujourd'hui plus guère employés (les extra-terrestres).

6° : Aujourd'hui la SF s'intéresse beaucoup aux problèmes d'actualité et au devenir plus immédiat de l'homme (surpopulation, faim, violence dans les villes, pollution...) à la limite ce sont presque des oeuvres politiques ou philosophiques.

7° : Pour en savoir plus, beaucoup plus, comment faire :

a) lire quelques bons livres de SF.
b) lire quelques bons guides sur la SF.
c) aller au 4° congrès de la SF française qui se tiendra à Limoges du 16 au 22 mai 1977 avec : des films (Lido et 2000), du théâtre, des diaporamas, des expositions (livres, peinture, timbres), des rencontres avec les auteurs présents sur des "Points SF".

d) s'informer sur les ouvrages de SF qui sont nouvellement publiés par le biais d'une revue.

5) Petite bibliographie de S.F.

Quelques ouvrages, quelques titres, quelques auteurs.

1° : ouvrages généraux

Jacques Sadoul : Histoire de la SF moderne -J'ai Lu-
2 volumes.

I & G B ianoff : Clefs pour la SF -Seghers- (plus cher
mais très bien).

2° : que' ues titres : de collection

a ?oche rouge, Hachette, (Silverberg, Heinlein,Léourier)
t Poche 2000, Marabout
Science-Fiction, Hatier-Rageot
d) Science-Fiction, Marabout (Bruss, Spitz,Scovel, Brackett...)
e) Présence du Futur, Denoël (Brown, Asinov, Heinlein, Hoyle, Clark)
f) J'ai Lu (n° 404.453.542.734.349.563.567.432.490.510.
557.533.551.579.580.617.663.713.731.504.
373.355.369.381.392).
g) Le Masque S.F. (n°2.3.5.8.11.19.20.21.27.33.34.47.
48.50).
h) Constellation, Seghers (trois volumes, mais chers)
i) SF, Le Livre de Poche, La grande Anthologie de la S.F. (13 volumes qui sont tous très bons).
j) OPTA, "Marginal" (anthologies thématiques de nouvelles américaines, pas toujours très bonnes).
k) Presses de la Cité, "Futurama"(6 volumes publiés, assez bons)
l) Laffont (va publier une collection pour jeunes, sera probablement très bonne)

3° : quelques noms

a) En France : Michel JEURY, Philippe CURVAL, André RUELLAND, Pierre PELOT (Suragne), Yves DERMEZE, Pierre BARBET (D.Maine), JAN DE FAST, Christian LEOURIER, Daniel WALTHER, Dominique DOUAY, BR BRUSS...tous ne sont pas facilement abordables et demandent souvent quelques années de pratique de la SF, sauf quand ils écrivent sous pseudonyme : Michel JEURY : Albert HIGON
André RUELLAND : Kurt Steiner
Pierre BARBET : David MAINE
Olivier SPRIGEL (pratiquement pour tous).

b) A l'étranger : Isaac ASIMOV, AE VAN VOGT, Robert HEINLEIN, Liegt BRACKETT, Théodore STURGEON, Fred HOYLE, AC Clarke, John BRUNNER, Robert SILVERBERG, Kurt VONNEGUT, Olaf STAPELDON, Frank HERBERT...

En gros, en s'en tenant aux numéros des titres indiqués en J'ai Lu et au Masque, en y ajoutant La Grande Anthologie de la SF du Livre de Poche, on peut avoir une idée à peu près complète de ce qui peut se faire en SF tant en romans qu'en nouvelles.

Travail de Daniel FONDANECHE, que nous remercions bien sincèrement.

6) Quelques titres de livres d'astronomie

PRATIQUES : - Le guide des étoiles et des planètes de D.H.MENZEL, 60 F. chez Del.& Niestle.
- Le guide de l'astronomie amateur (D.GODILLON), 130 F.
- A l'affût des étoiles (P.BOURG et J.LACROUX), 50 F.
- Jean-François Astronome (P.ROUSSEAU) 14 F. La Farandole.
- Un planiciel (carte mobile du ciel), 10 à 15 F.

ENCYCLOPEDIES : - Astronomie Populaire de FLAMARION, 200 F.
- Planètes et Satellites (P.GUERIN I Co), 150 F, Larousse.
- L'homme et le Cosmos (Groueff et Cartier J-P), 200 F.
- Bibliothèque des Grands Thèmes chez R. LAFFONT, n° 18 : Etoiles et Galaxies n°12 : Le Système Solaire.
- Encyclopédie "Bordas", Encyclopédie "Tout l'Univers", Les "Merveilles de la Nature",...

POCHES : - n° 644 du véritable Livre de Poche : l'Astronomie, de Pierre ROUSSEAU.
- Des Astres, de la Vie et des Hommes (Robert JASTROW) Point-Science au Seuil
- n° 4 : La vie sur les planètes (R.Tocquet)
- n°11 : La connaissance de l'Univers (R.E.Charon) Le rayon de la Science au Seuil.
- Collection "J'ai Lu", l'aventure mystérieuse n° A-281, n° A-208, n° A-245, n° A-314, n° A-327, n° A-320 : très intéressants pour s'ouvrir l'esprit.
- Plus délicat, aussi, pour avoir une vue de synthèse, les "Que-sais-je" de Paul COUDERT et de Pierre ROUSSEAU.

DIVERS - Les grandes Enigmes de l'Astronomie, par J.E.CHARON (environ 30F.)
- La revue "Science & Vie...jusqu'à 13/14 ans, puis petit à petit :
- La revue "Science et Avenir" suivant les capacités d'assimilation.
- Quelques revues spécialisées, dont : S.A.F., S.A.P.T. (Revue de la petite Société Astronomique Populaire de Limoges, soeur de la S.A.P. TOULOUSE,...)
- La Recherche, pour mémoire.

7) Information sur la séance d'observation nocturne

Outre le plan d'accès au lieu d'observation, nous donnions des conseils pratiques :

1° - Prévoir : - des bottes ou de grosses chaussures
- des vêtements chauds qui ne craignent rien
- une lampe électrique de poche
- une paire de jumelles si possible
- un planiciel ou un exemplaire de ce polycop
- tout instrument non-fragile suivant vos moyens.

2° - Nous ne saurions être trop reconnaissant pour le propriétaire du champ, soyez donc corrects, et évitez de déposer des ordures (sic) sur les lieux de l'observation (mersic) : les moutons ne mangent que l'herbe !

3° - Préparez-vous à observer en particulier :
- les constellations circumpolaires
- les constellations de l'écliptique(du zodiaque)
- la planète Saturne
- Alcor et Mizar (2ème cheval du Grand Chariot)

ATTENTION : SEANCE ANNULEE -ou reportée- le MARDI à 16H en cas de temps trop incetain.

III. BILAN

1) Nous avons eu quelques difficultés pour obtenir 5 courts métrages, de qualité moyenne, sur l'Astronautique. Nous nous y sommes pris un peu tard.

2) L'exposition a eu un assez vif succès, surtout grâce à la variété des techniques (affiches, livres, projections, bandes magnétiques, appareils optiques,...) et des sujets (Terre, Lune, Planète, Conquête de l'espace, Science-Fiction, Astrologie,...)

3) La séance d'observation nocturne n'eut malheureusement pas lieu : aucune visibilité... Elle nous avait pourtant demandé une certaine dose de préparation ...

4) En conclusion, avec de la bonne volonté de toute part (administration, agents, service de documentation, professeurs, etc... et élèves !) nous avons vécu des moments un peu fatigants mais très encourangeants pour "le métier".

NOMBRES CROISÉS

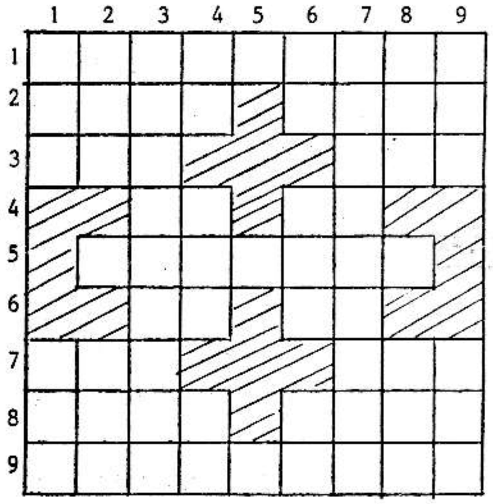
par Michel LABROUSSE (LIMOGES)

SOLUTION DU PROBLEME N° 1

(posé dans le PLOT n° 4)

	1	2	3	4	5	6
1	1	4	2	8	5	7
2	6	8		7	3	2
3	1	4	4		1	0
4	0		1	6	4	0
5	5	4		3	4	0
6	1	0	1	0	1	

PROBLEME N° 2



Horizontalement

1) Le plus petit multiple de 12 345 679 dont l'ensemble des chiffres des {1,4,8}

2) Par tranches de deux chiffres fournit des multiples de 13
Galois est cette année-là.

3) En base cinq, c'est le carré de 13 - Un jeu connu.

4) Divisé par 3,4,7 donne toujours 1 comme reste.
Sur de nombreuses plaques à Toulouse.

5) Ce naturel est divisible par 9. Pour trouver son quotient par 9 (base dix) il faut écrire 4601 en base quatre.

6) Période de l'écriture décimale de $\frac{14}{33}$ - pgcd de 1012 et de 264

7) ppcm de 16 et de 132 - 200 (base dix) écrit en base douze.

8) -Ce naturel est écrit en base deux. Si vous voulez l'écrire en base dix prenez les deux premiers chiffres ou les deux cerniers !
-En cette année, DIRICHLET avait vécu deux fois plus de temps qu'il ne lui en restait à vivre.

9) Un multiple de 12 345 679 dont l'ensemble des chiffres est un singleton.

Verticalement

1) Période de l'écriture décimale de $\frac{6}{37}$ s'écrit 2214 en base six.

2) Somme de deux carrés - Somme des huit premiers carré

3) Multiple de 12 345 679 dont l'ensemble des chiff· est {1,4,8}

4) Dans cette base, 43 (base dix) s'écrit 34 - cube de cube - Sur des plaques circulant en Haute-Provence.

6) Puissance quatrième et impair - Naturel ayant deux facteurs premiers, 16 diviseurs et n'étant pas un cube - Département normand

7) En lisant de bas en haut on obtient un autre multiple de 12 345 679 dont l'ensemble des chiffres est toujours {1,4,8}

EN LISANT BARRA

par Jean-Marie CIPAN (ANGOULEME)

C'est important de parler des livres qu'on a aimés.

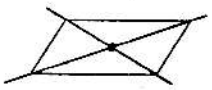
"Apprentissage de l'Analyse" : 4 fascicules écrits par Raymond BARRA, édités par CEDIC

"On n'a jamais fini de parfaire un apprentissage (GIDE)"

J'ai lu ce livre avec les yeux d'un professeur de terminale C comptant bien faire mon profit de tout ce qui pourrait m'aider dans mon travail d'initiation à l'analyse.

La facilité de la lecture est due aux notations simples, aux moyens élémentaires mis en jeu pour résoudre des questions qui ne le sont pas nécessairement (savez vous construire une suite (u_n) divergente, telle que pour tout entier $k \geqslant Z$ la suite (u_{kn}) soit convergente ?)

Parce que ce livre est le reflet d'un enseignement effectivement donné à des étudiants, les exemples sont très nombreux, mais les démonstrations sont toutes intégralement écrites, et ce qui est mieux, l'esquisse de la recherche d'une solution avec ses hésitations, ses démarches infructueuses : c'est alors une conversation entre l'auteur et le lecteur.



Ce dialogue se présente souvent sous forme de vrai ou faux ; façon efficace de piquer la curiosité. La sincérité de la recherche se lit aussi dans les croquis ; ainsi les dessins du parallélogramme et du noeud papillon font-ils bien sentir en quoi la continuité en un point est moins contraignante, mais apporte moins, que la dérivation en ce point

Chaque chapitre s'ouvre par des rappels de cours, c'est la règle du jeu pour les exercices qui suivront et cela permet une utilisation autonome de ces quatre livres.

Qui peut lire ce livre avec profit ? D'abord ceux qui savent les théories classiques du calcul différentiel et intégral mais qui par excès de science ont peut-être oublié les difficultés d'un débutant, car il s'agit, de toute évidence d'un livre écrit pour initier à l'analyse ; des élèves de terminale C y trouveront entièrement ce qu'ils ont entendu pendant l'année mais bien davantage une préparation à la suite de leurs études sans risquer les contresens que peut apporter la lecture d'un traité.

Je regrette cependant, connaissant le goût de BARRA pour l'épistémologie, l'absence de point de vue historique, non pas celle de biographies mais le cheminement commenté des voies et des méthodes qui ont conduit de l'exhaustion d'EUDOXE et ARCHIMEDE à la théorie présentée ici dans sa forme actuellement classique.

En conclusion ce livre est indispensable à toutes les bonnes bibliothèques et dans les autres !

LES ADHÉRENTS DE NOS RÉGIONALES ÉCRIVENT

Pas de publicité, mais de l'information !

Raymond BARRA : Apprentissage de l'analyse CEDIC. 4 volumes 60 F (chaque volume 20 F).

volume 1 : nombres réels, suites (94 pages)
volume 2 : continuité, limites, continuité uniforme (94 pages)
volume 3 : dérivation, développements limités (112 pages)
volume 4 : intégrale de Riemann, intégrales généralisées (112 pages).

Cet ouvrage est destiné à faciliter l'assimilation des cours d'analyse de première année des Universités par des rappels de cours, la recherche d'exemples et contre-exemples, des mises en garde, de nombreux exercices....

Daniel FREDON : Mathématique, économie et gestion CEDIC. 40 F.

Cet ouvrage a pour objectif de permettre aux professeurs de mathématiques de disposer de nombreux exemples d'utilisation de notre discipline en économie et en gestion.

Il contient :

- *des exemples d'application des fonctions (à une et à plusieurs variables), des équations aux différences finies du calcul matriciel.*
- *des sujets issus de l'économie et la gestion : méthode PERT, mathématiques financières, les indices de la vie économique la programmation linéaire.*

Nous signalerons de la même façon les publications dont vous nous ferez part. De plus, quand vous lisez un ouvrage intéressant, envoyez nous une note de lecture. Vous aiderez ainsi les collègues qui ne savent pas comment utiliser leurs crédits d'enseignement.

André DELEDICQ, Patrick MARTHE, René METREGISTE : Test-Maths 6ème CEDIC. 8,50 F. (6,80 F par commande groupée)

Ce livre d'exercices groupe les activités proposées en huit grands chapitres organisés selon les savoir faire : proportionnalité - mesurer - calculer - géométrie - exprimer et s'organiser - raisonner logiquement - repérer - approcher. Une grille d'analyse permet au professeur (et aux élèves) de déterminer, dans les activités choisies en classe, les savoir-faire développés et ceux qui sont négligés.

André THIRIOUX, Louis et Simone SANCHEZ, Robert DOMAIN : Mathématiques Contemporaines 6ème Magnard (270 pages).

Ce livre de 6ème respecte le programme. Le cours lui-même est écrit en assez petit alors que les points importants du cours et les exercices, sont écrits en plus gros caractères. La progression de l'étude est prévue par rythme hebdomadaire.