QUAND LES ÉLEVES CALCULENT

par Amélie BROUSSET (JONZAC)
et Serge GOUIN (ROCHEFORT)

Où l'on peut s'amuser avec des nombres.

EN SIXIEME

Faire calculer 12345679 × 9. On trouve un nombre ne s'écrivant qu'avec des 1. Poser alors la question : par quoi faut-il multiplier 12345679 pour n'obtenir que des 2 ? que des 3 ? etc...

On peut ensuite demander s'il se produit des phénomènes analogues dans d'autres bases. La réponse est oui : par exemple, en base cinq : 124 × 4 = 1111.

EN QUATRIEME OU EN SECONDE !

A titre d'exercice de calcul algébrique, on peut aller un peu plus loin qu'en sixième en posant les questions : cela "marche-t-il" dans toutes les bases ? Pourquoi, en base n, "saute-t-on" toujours le chiffre $n - 2$?

En base 2 : 1 × 1 = 1
En base 3 : 2 × 2 = 11
En base 4 : 13 × 3 = 111 etc...

En base n ($n \geqslant 2$) : $\overline{123\ldots\ (n-p)\ldots\ (n-3)\ (n-1)} \times (n-1)$

Multiplions : $(n-1)^2 = n^2 = -2n + 1 = (n-2)n + 1 = \overline{(n-2)1}$
(écriture en base n)
On pose 1 ; retenue : $n - 2$

$(n-3)\ (n-1) + (n-2) = (n-3)n + 1 = \overline{(n-3)1}$
On pose 1 et on retient $n - 3$

Hypothèse de récurrence : la $(p-2)^e$ multiplication donne une retenue de $n - p + 1$. D'où, pour la $(p-1)^e$ multiplication :

$$(n-p)\ (n-1) + (n-p+1) = \overline{(n-p)n + 1}$$

On pose 1 et on retient $n - p$. Le phénomène se poursuit donc très bien de la même manière jusqu'au bout (pour $p = n - 1$).

Que se passe-t-il si on écrit (n-2) ?

Les élèves découvrent vite sur des exemples qu'on obtient cette fois des 1 et un seul 0.

L'étude du cas général confirme ce résultat :

effectuons 123... (n-2) (n-1) × (n-1)

$(n-1)^2 = (n-2)n + 1$; retenue : n - 2

$(n-2)(n-1) + (n-2) = (n-2)n$. S'écrit $\overline{(n-2)0}$ en base n.

On aura donc un zéro dans le résultat. La retenue étant encore n-2, le calcul se poursuit comme dans le premier cas, et on ne trouve plus que des 1 aux résultats.

Pour finir, signalons l'erreur amusante d'une élève de Sixième.

```
 12345679
     × 27
 86419753
 24691358
 111111111
```

Surprise de ne pas trouver comme les autres, elle apporte l'opération ci-contre à son professeur.

Comment expliquer ce phénomène ? Se produit-il uniquement pour 27 ?

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

Commandez ces brochures à votre Régionale (voir adresses page 36).

Le premier prix s'entend "port compris".
Le prix entre parenthèses est le prix "port non compris".

8. *Mots I*, 1974, 100 p., 9 F (6 F).
9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p., 4,50 F (3 F).
10. *Carrés magiques*, par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p., 5,50 F (4 F).
11. *Mots II*, 1975, 108 p., 9 F (6 F).
12. *Substitutions et groupe symétrique*, par J. Dautrevaux. Epuisé.
13. *Mathématique pour la formation d'adultes*, CUEEP, par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p., 18 F (15 F).
14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - APMEP), 1976, 220 p., 18 F (15 F). 2ème édition
15. *Mots III*, 1976, 136 p., 9 F (6 F).
16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p., 4,50 F (3 F).
17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p., 29 F (25 F).
19. *Elem-Math III : La division à l'école élémentaire*, 1977 128 p., 8 F (6 F).
20. *Quelques apports de l'Informatique à l'Enseignement des Mathématiques*, 1977, 272 p., 29 F (25 F).
21. *Géométrie au premier cycle, tome 1*, 1977, 192 p., 29 F (25 F).