VISUALISATION ET MATHÉMATIQUE

par Marcel DUMONT

(conférence prononcée en 1976 à ANGOULEME)

Un vigoureux plaidoyer pour l'image, preuves à l'appui.

I - INTRODUCTION

Des nécessités contemporaines contraignent, bon gré, mal gré, les responsables de l'enseignement à envisager des réformes. Faute de s'attaquer au contenu de cet enseignement, c'est-à-dire aux raisons d'être de l'école, la plupart de ces réformes n'ont qu'un caractère superficiel... et éphémère. On commence à envisager des réformes de structures mais il ne s'agit toujours pas de restructurer les contenus et les objectifs. Certains osent parfois repenser certains contenus (cf. réforme des programmes en mathématiques) mais, soit à cause d'oppositions stériles, soit à cause de vues étriquées, ces réformes se révèlent très vite inadéquates. Ces deux causes, oppositions stériles - vues étriquées tiennent le plus souvent à la difficulté de sortir des habitudes, à un manque d'audace dans la conception de nouveaux moyens et de nouvelles méthodes.

Notre propos est de montrer comment :

- l'application de quelques principes généraux,
- l'utilisation de moyens variés, en particulier la visualisation,

pourrait introduire dans l'enseignement :

- des concepts fondamentaux, tant sur le plan social que mathématique, concept ignoré pour la plupart des programmes actuels,
- un sens de l'efficacité permettant de réduire considérablement la durée des apprentissages.

Pour quelques idées générales concernant méthodes et moyens, nous renvoyons le lecteur à divers articles :

- Compte-rendu du Séminaire C.I.E.M. Echternach (1972). "A propos des fonctions booléennes".
- Bulletin A.P.M. : "A propos de Finalités" n° 283 page 245
  "A propos de méthodes" n° 294 page 465
  "Un petit tronc pas cher" n° 290 page 584
- Média n° 79 (Mars 1976) : "Visualisation et animation dans l'enseignement des mathématiques".

II - <u>QUELQUES PRINCIPES</u> (encore !)

1) Si l'objectif de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre à déduire, alors le seul critère absolu de rigueur est le passage en machine, c'est-à-dire là où l'enchaînement des propositions est automatique. En ce sens, l'élaboration d'un programme pour un ordinateur ou un simple calculateur programmable, éduque plus la "rigueur" que n'importe quelle démonstration plus ou moins verbeuse où chaque mot est lourd de sous-entendus bien ou mal entendus, et dont la syntaxe est plus ou moins bien connue de l'élève.

Dans ce cas les images n'apprendront jamais à déduire. Elles ne peuvent que visualiser une déduction. Par contre, la <u>recherche</u> d'une démonstration peut être facilitée par l'observation d'images adaptées (cf. ...) et en ce sens une bonne visualisation permet d'apprendre à chercher des démonstrations.

2) Si l'objectif de l'enseignement des mathématiques est d'apporter un bagage maximum de connaissances qui seront par la suite des modes de pensée, alors la construction et la présentation exclusivement déductives et ces connaissances est extrêmement longue et pénible, surtout lorsqu'elle s'exprime par la voie formelle d'écritures qui ne suggèrent rien d'autre que des écritures. Par opposition à ces modes d'expression séquentiels, donc très longs à décoder, les images permettent de synthétiser globaliser les informations ; donc peuvent raccourcir considérablement la durée d'acquisition des connaissances (la disparition de la géométrie traditionnelle a supprimé le seul domaine où l'intuition en s'appuyant sur des images permettait de gagner un temps considérable et rien n'a remplacé ce domaine organisé d'images, sinon quelques patates et flèches plus ou moins bien utilisées).

3) Ce qui paraît facile est ce que l'on sait faire. Ce qui paraît difficile, c'est ce qui n'est pas familier, ce qu'on n'a jamais vu ou jamais fait. L'objectif n° 1 de la visualisation est donc de rendre familier des images qui par la suite pourront servir de représentations commodes à des concepts habituellement réservés aux grandes classes.

Une visualisation bien adaptée est donc un moyen d'introduire dans la culture générale des idées socialement importantes jusque là réservées aux spécialistes.

4) Les croyances sont dues aux usages. Exemple : le nombre de dimensions de l'espace dans lequel nous vivons : Pourquoi les élèves travaillent-ils presque toujours aux propriétés d'un espace à 2 dimensions, représenté par la feuille ou le tableau ? Pourquoi, au delà de trois dimensions la plupart des gens considèrent-ils ceci comme un fantasme propre à quelques illuminés ?

Il est probable que l'apparition de nouveaux moyens de représentation feront découvrir à l'homme l'espace sous de nouveaux et nombreux horizons, dépendant surtout des problèmes qu'il se pose.

5) Les idées jaillissent presque toujours à la suite de rapprochement d'images. Une image isolée n'a donc qu'un impact réduit : elle ne fait qu'accroître le bagage des souvenirs. C'est le rapprochement d'images qui peut inciter les spectateurs à suggérer des images antérieures qui lui sont propres et l'inciter à se faire "ses propres idées" (au lieu de répéter celles des autres).

6) Une série d'images peut donner l'idée d'une généralisation vers un objectif précis. Mais si on change l'objectif, alors la même série d'images peut contrarier l'effort de généralisation.

7) Une image ne démontre rien. Elle expose, elle fournit des perceptions. Si le spectateur réussit à intégrer ces perceptions dans le bagage de ses souvenirs, alors elle lui apporte des informations. Mais si le spectateur ne fait que subir l'image, alors celle-ci s'accumule seulement aux bagages antérieurs et reste provisoirement sans effet (à moins qu'elle ne provoque l'effet contraire à celui que l'on attend).

8) Une image ne pose jamais de questions (malgré les points d'interrogation et autres clignotants) Les questions sont toujours dans la tête de l'observateur et si celui-ci n'a pas envie de se poser de questions, l'image n'y changera rien. Par contre si des rapprochements d'images suggèrent soit une contradiction, une gêne, soit un sentiment de satisfaction il est possible que le spectateur soit amené à se poser des questions, mais pas nécessairement celles qu'on aurait voulu (et c'est heureux que chacun puisse encore rester libre de penser quand il en a envie !)

9) Plus une image est pauvre, moins elle enrichit le bagage des perceptions. Si l'observateur a déjà beaucoup d'images en tête, alors par sa pauvreté même, l'image qu'on lui fournit peut l'inciter à réfléchir. Mais en général, l'expérience montre que plus les images sont pauvres, plus le spectateur reste pauvre en idées (à moins que, par esprit de contradiction, il ne cherche à meubler le vide, hélas notre école n'incite guère à la contradiction).

Mais il s'agit là de l'image proprement dite. Si nous réfléchissons à l'activité mathématique elle même, alors il semble essentiel de souligner que les mathématiques se font sur des activités mathématiques, et non sur des états mathématiques. A un premier niveau, ce sont donc les situations qui se transforment, qui sont intéressantes à modéliser afin de prévoir. Les modèles sont, soit des systèmes d'écritures que l'on fait fonctionner avec des règles, soit des représentations, hélas statiques jusqu'à ce jour, mais qu'il serait bon d'animer (comme des maquettes).

Si on ajoute à cette idée le fait qu'une situation peut être représentée par divers modèles et qu'un modèle peut avoir plusieurs interprétations, alors on peut résumer les objectifs essentiels d'une visualisation animée.

1 - Diversifier les "significations", c'est-à-dire les représentations. Chacune d'elles servant de signification à l'autre.
(René Tom a souligné l'importance psychologique de la signification) Le formalisme en effet ne devient important que pour "automatiser le fonctionnement".

2 - Permettre ainsi les rapprochements et transferts.

3 - Susciter des généralisations.
Mais mieux que des discours, les exemples permettront peut être de préciser quelques idées.

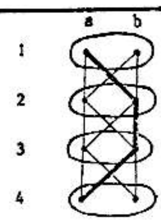
III - QUELQUES EXEMPLES

Naturellement, on ne visualise pas le désert ou le presque désert, sauf pour montrer le désert ! La demi droite et le quart de point n'ont pas besoin d'animation ! Ceci explique pourquoi la plupart des exemples vont concerner des situations combinatoires (dont on parle peu dans les manuels, justement parce qu'on est désarmé) (cf. "surfaces" de Griffiths Ed. Cedic).

1er Exemple :

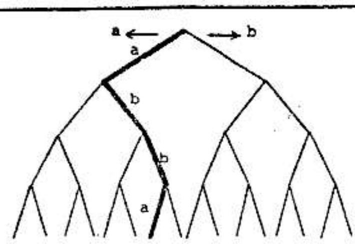
Identités remarquables et coefficients binomiaux ou puissances du binôme $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ etc...

Toutefois, la multiplication est commutative : abba = aabb = etc... Il est difficile de compter les termes $a^2 b^2$ sur le "clavier". Alors on transforme l'arbre en appliquant l'axiome ab = ba. Ce qui revient à superposer les noeuds en appliquant la règle : si on part de n'importe quel point, suivre à gauche, puis à droite, nous amène au même point qu'en suivant d'abord à droite puis à gauche. L'arbre se transforme en réseau à 2 dimensions.

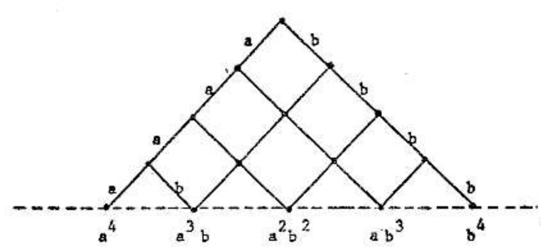


Par dualité chaque point devient une arête. Les patates se dédoublent. Le clavier devient un arbre.

Les traits signifiant "multiples" (en gros, le terme abba, soit $a^2 b^2$)



On comprend immédiatement pourquoi $(a+b)^4$ contient 16 termes.



On comprend alors pourquoi le coefficient de $a^2 b^2$ est le nombre de chemins qui amènent au point correspondant à 2 étapes "a" et 2 étapes "b".

Naturellement la généralisation est facile :
Puissances d'un trinome $(a + b + c)^2$ $(a + b + c)^3$ $(a + b + c + d)^4$

Une animation analogue pourrait nous montrer comment on obtient les coefficients polynomiaux à partir du réseau à 3 dimensions (transformé de l'arbre exponentiel (base 3) 3 axiomes de commutativité ab = ba ; bc = cb ; ac = ca)

Evidemment comment passer à 4 dimensions ? Qui a jamais vu un réseau à 4 dimensions ? (cf plus loin).

Remarque 1 : rapport avec les dénombrements de sous-ensembles.

a et b sont les réponses oui, non aux 4 questions concernant les 4 objets (1, 2, 3, 4) d'un ensemble : est-il élément oui ou non ? L'arbre visualise le questionnaire : chaque étage représente une question, chaque branche une réponse. On comprend alors pourquoi le développement de $(a + b)^4$ donnent comme coefficients les nombres de sous-ensembles équipollents d'un ensemble de 4 objets.

Pb. : trouver une interprétation semblable pour $(a + b + c)^4$

Remarque 2 : Le triangle de Pascal se généralise mal. Il vaudrait mieux le voir sous la forme d'un rectangle pour 2 raisons :

1) On passe de suite aux réseaux à 3, 4 dimensions, etc.

2) IL souligne l'absurdité du codage actuel des coefficients.

Exemple : le coefficient de $a^3 b^2$ est noté traditionellement C_5^3. Maintenant on le note $\binom{5}{3}$ et c'est aussi stupide car il ne met pas en valeur la commutativité de la loi, et il ne se généralise pas.

Il voudrait mieux choisir les coordonnées du point du réseau et l'écrire par exemple $C(3, 2)$ qui est égal à $C(2, 3)$.

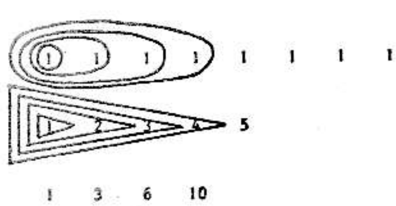
La raison de cet usage incohérent tient à l'unicité de l'interprétation : on ne veut penser qu'aux sous-ensembles à 3 éléments d'un ensemble de 5. Si on pense au réseau, alors le codage par les coordonnées devient évident. De plus il mémorise facilement la récurrence $C(3, 2) = C(2, 2) + C(3, 1)$, et cette notation se généralise à 3 dimensions :

$$C(3, 2, 4) = C(2, 2, 4) + C(3, 1, 4) + C(3, 2, 3)$$

En effet pour parvenir à un sommet du réseau, on est obligé de passer par les avant-derniers sommets.

L'habitude de voir le réseau permet instantanément d'inventer et retrouver toutes les formules habituellement données en exercice et d'autres encore.

Remarque 3 : Si on veut ouvrir vers le numérique, alors l'idée de cumul est en germe l'amorce de l'idée d'intégration et on peut la visualiser par des closes du genre (on cumule à partir du début et la somme devient le terme de la ligne du dessous).



Naturellement les suites de Fibonacci peuvent être rapprochées mais on en reparlera une autre fois.

2ème exemple :

Les "simplexes" (ou pavés à n dimensions)

Pourquoi ? Parce que ces images sont fondamentales et peuvent représenter beaucoup de choses :

a) Fonctions booléennes en automatique
en logique
en probabilité.

1 dim.

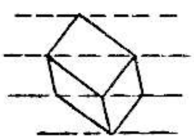
b) Des groupes, corps et espaces vectoriels particuliers (corps à 2 éléments).

c) Des groupes symétriques.

2 dim.

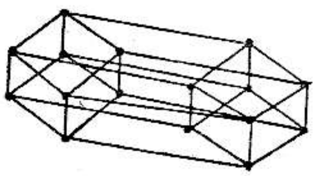
d) Des treillis de diviseurs de naturels simples (c'est à dire de naturels n'ayant aucun diviseur primaire, (puissance de premier). 2×3 est simple ; $2 \times 2 \times 3$ n'est pas simple ; $2 \times 3 \times 5 \times 7$ est simple.

Voici ci-contre le début de la série des simplexes.



3 dim.

On trouvera à l'OFRATEME une série de films à ce sujet, l'un montrant en particulier le passage de l'arbre dichotomique au simplexe. Il reste encore à animer la transformation d'un arbre factoriel en simplexe à cause des axiomes de commutativité !)



4 dim.

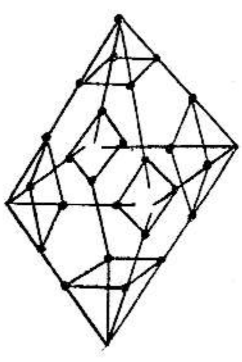
Naturellement le simplexe à 4 dimensions est le module de base permettant de comprendre ce qu'est un réseau à 4 dimensions.

<u>3ème Exemple</u> : Les dualités.

On ne parle guère des groupes finis dans nos programmes, ce qui est stupide car la théorie a bien été mise au point pour répondre des équations et il s'agissait de situations finies. En outre, les objets géométriques traditionnels donnaient lieu à l'étude de groupe des transformations, isométries par exemple. Bref, passons.

N'ayant que de groupes infinis, les représentations par diagramme de Cayley, ne pouvaient être faites, empêchant ainsi l'intuition de deviner un grand nombre de propriétés fondamentales en théorie des groupes. A fortiori il n'était pas question de représentation duales.

Voici une idée à propos par exemple du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ (car les 24 présentations d'un ensemble de 4 objets).



Si on prend comme générateurs les transpositions (1, 2) (2, 3) (3, 4) on obtient en guise de diagrammes un oactaèdre tronqué : (ce que GUILLARD a appelé les permutoèdres).

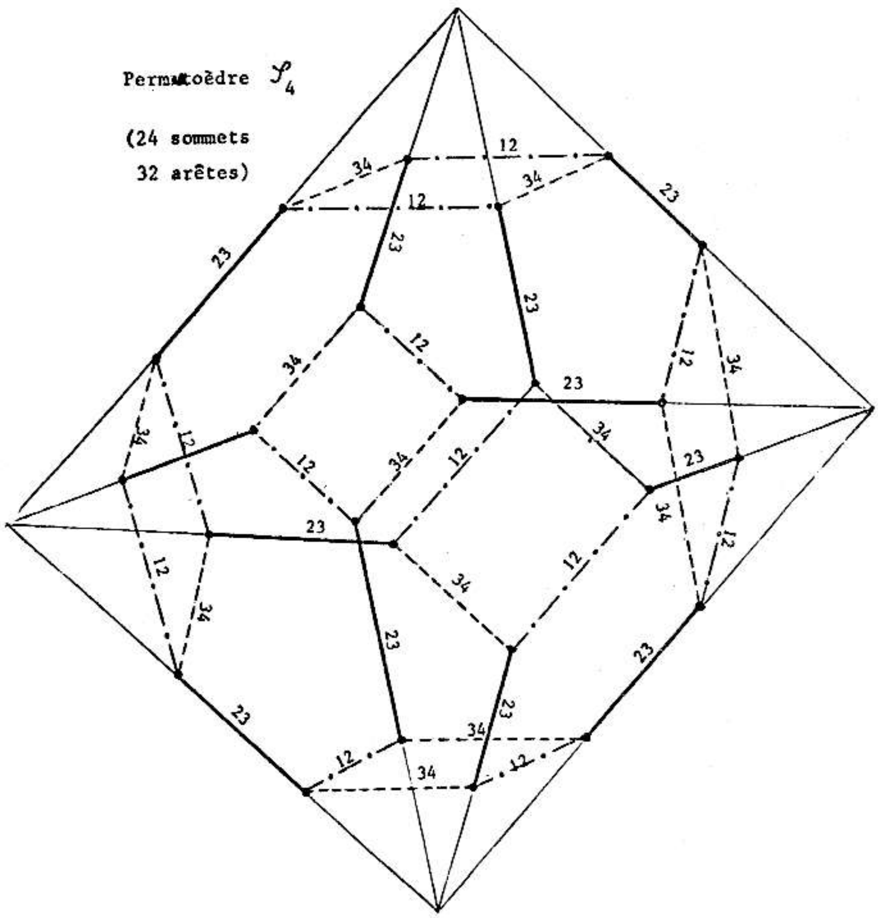
Passons sur la recherche des circuits hamiltoniens et des algorithmes correspondants.

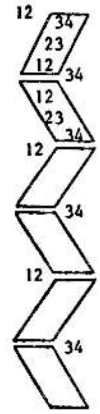
L'idée intéressante est de représenter chaque sommet à 3 arêtes par une face à 3 arêtes. Au lieu de suivre une arête sur le diagramme de Cayley (c'est-à-dire dans ce cas l'octaèdre tronqué) on franchit une frontière (ici dans les 2 sens).

On obtient ainsi des "graphes" beaucoup plus simples à construire et observer.

Permutoèdre $\mathcal{S}_4$

(24 sommets
32 arêtes)

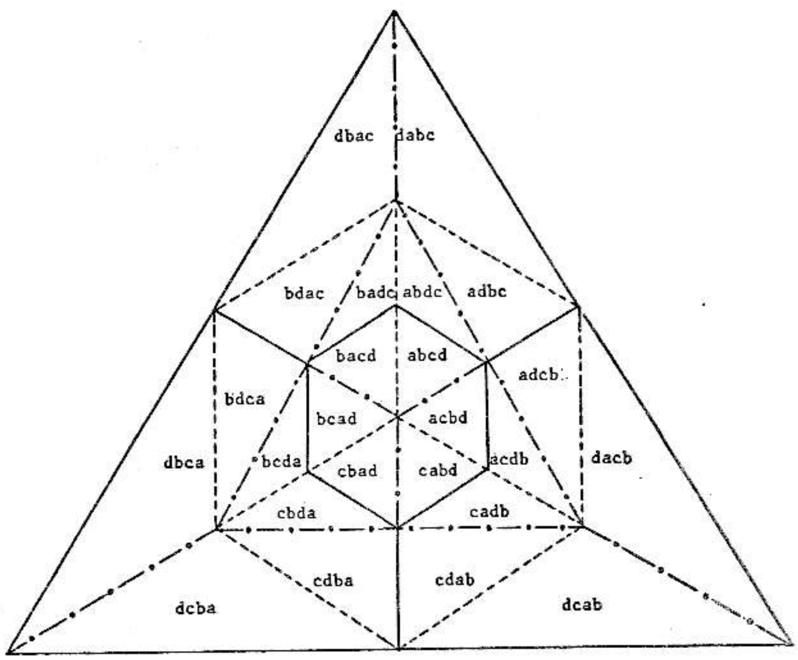




Circuit hamiltonien à rapprocher d'un circuit sur l'octaèdre (évident).

Voici le dual de permutaèdre précédent : on pourrait l'appeler le "permutogone".

Traverser ici une frontière —•— équivaut à suivre la flèche —•— sur l'octaèdre tronqué.



Permutogone (16 sommets au lieu de 34)

On peut utiliser cette dualité pour n'importe quel groupe. Les difficultés nouvelles attireraient l'attention sur de nouveaux concepts ou théories.

Mais ici il y a mieux : 4 simplexes à 4 dimensions représentent aussi les 24 permutations (24 chemins figurant un sommet au sommet opposé). (1 sommet de l'octaèdre tronqué devient un chemin à 4 tronçons). Il est extrêmement intéressant de faire le transfert et de voir comment on passe d'un chemin à un autre. Le changement de représentation permet alors de "voir" sur le simplexe des sous-groupes bien organisés.

Il s'agit là d'une idée, sans doute extrêmement importante ; cherche le lieu entre les groupes symétriques et les groupes booléens.

<u>4ème exemple</u> : plonger un problème particulier dans un contexte plus large qui rende la ou les solutions évidentes.

Ainsi les propriétés de médianes d'un triangle deviennent évidentes. Si on trace le réseau des parallèles aux médianes (3 directions)
pb. : étant donné le réseau, construire le triangle, etc.

Beaucoup de problèmes analogues montrent l'importance :

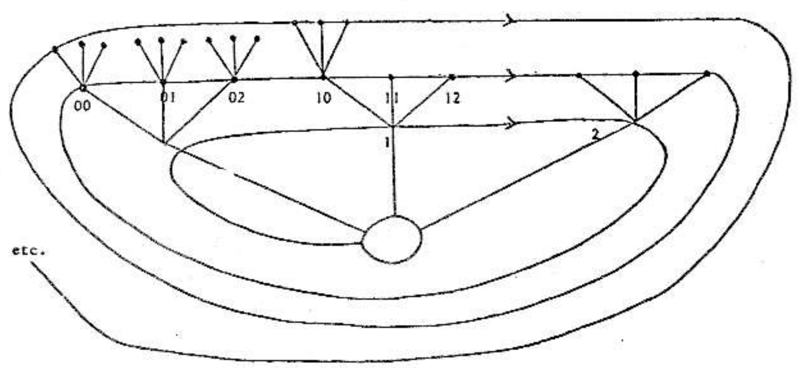
1) de visualisation

2) de donner toujours envie de généraliser, d'élargir et comparer, etc.

<u>5ème exemple</u> : A propos des types d'ordre.

Dessiner un arbre exponentiel en base 3 par exemple et animer les façons diverses de circuler sur l'arbre, ce qui permet d'ordonner totalement l'ensemble infini des mots de longueur finie

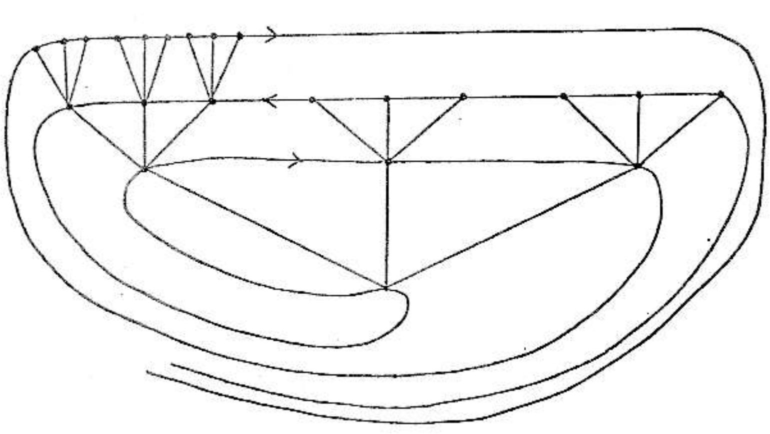
a) Ordre sur N.



- impossibilité d'intercaler entre 2 mots
- 1 borne d'un côté, pas de borne de l'autre.

On ramasse tout par niveau avant de monter.

b) Ordre sur $\mathbb{Z}$
(Ou façon de coder $\mathbb{Z}$ sans signes de classe)



- impossibilité d'intercaler entre 2 mots
- pas de borne.

La longueur du mot indique la classe.

c) Ordre du dictionnaire

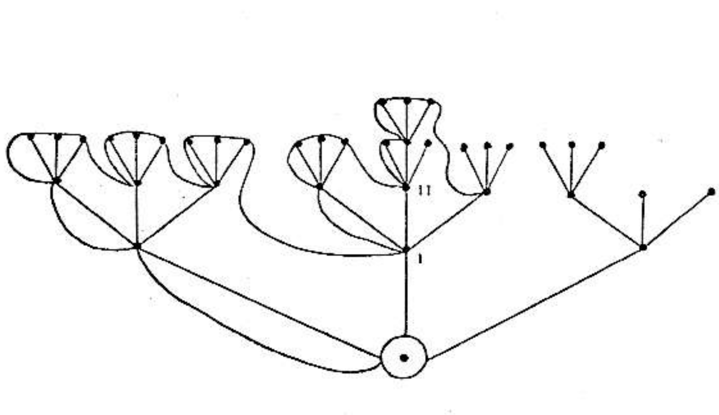
On ramasse tout sur une branche avant de passer à la branche suivante.

- Ici on peut intercaler

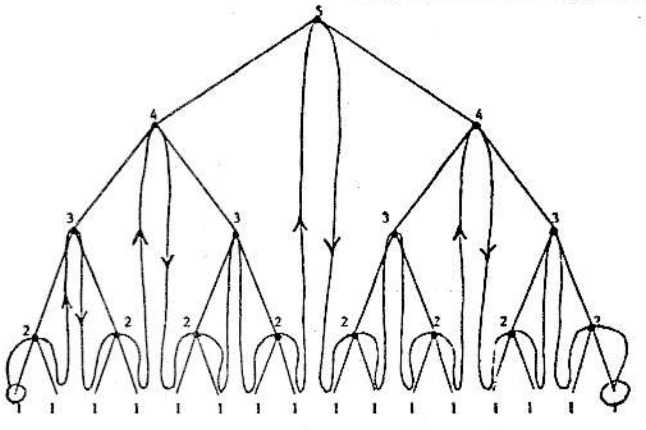
Par exemple entre 1 1 1 1 et 1 1 1 2. On peut intercaler 3 mots, il suffit de s'élever d'un niveau, c'est-à-dire augmenter la longueur du mot.

1 1 1 1
——————— 1 1 1 1 0
——————— 1 1 1 1 1
——————— 1 1 1 1 2
1 1 1 2

C'est l'ordre du dictionnaire, ou encore celui des nombres à virgule (dits décimaux et mal nommés car la base n'a rien à voir).



c) Ordre du dictionnaire



d) Autre algorithme (base 2)

	2	3	5	7	11	13
2	1					
3	0	1				
4	2					
5	0	0	1			
6	1	1				
7	0	0	0	1		
8	3					
9	0	2				
10	1	0	1			
11	0	0	0	0	1	
12	2	1				
13						
14						

d) Autre algorithme (base 2)

L'algorithme 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, etc..., n'est autre que l'algorithme des codes cycliques ou code de Gray (ou circuit hamiltonien sur les simplexes).

C'est aussi l'algorithme des puissances de 2 dans la décomposition des naturels en produit de facteurs primaires (cf. fiche sur les polylog. E.L. 75-76).

Faute de temps et de place, je souhaite bon courage aux générations futures car tout est à faire dans ce domaine des représentations. Encore faut-il échapper au point et à la droite graduée !