COMMENTAIRES SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SÉRIE D - ORLÉANS 1976

J. AUGRAS

Dans l'ensemble, le niveau de l'épreuve me semble bien adapté à une Terminale D, mais selon la tendance actuelle (regrettable) le sujet est sans doute un peu long, les candidats lents ou méticuleux avant probablement eu beaucoup de mal à terminer.

Par ailleurs, le sujet lui-même (choix et libellé des questions) amène un certain nombre de remarques.

EXERCICE 1

On considère les deux nombres complexes

$$z = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{1-z},$$

α étant un nombre réel donné.

1. Pour quelles valeurs de α le nombre z est-il défini ?
Pour quelles valeurs de α le nombre w est-il défini ?

2. Calculer le module et l'argument de z et de w lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$; lorsque $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Placer sur une figure les points z et w.

3. Calculer en fonction de α le module et l'argument de z et w lorsque

$$\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$

4. Calculer en fonction de α le module et l'argument de z et w lorsque

$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[.$$

A mon avis le nombre de réponses demandées est beaucoup trop élevé : a : 2 réponses ; b : 12 réponses ; c : 4 réponses ; d : 4 réponses. Ce qui fait au total 22 réponses à fournir (certaines presque immédiates cependant) on en arrive pour le candidat à une dispersion de l'attention et une lassitude avant d'aborder les questions "intéressantes" (soit les c) et d)) et pour l'examinateur à une impossibilité de tout juger.

N'aurait-il pas été préférable :

- soit de ne pas introduire le complexe W (seulement ... 11 répones)
- soit de se borner à $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\ \pi\right[$ (donc élimination de α dans le b) et le c).

De plus que penser des "points z et w" ? alors que nous exigeons de nos élèves la locution "point d'affixe z". Cette sous-question ne présentait guère d'intérêt et a semble-t-il été ajoutée au texte initial. Pourquoi ?

EXERCICE II

Dans un sac, on place trois boules noires portant respectivement les nombres 1 , 2 , 2 et cinq boules blanches portant respectivement les nombres 1 , 1 , 1 , 2 , 2 . On tire trois boules simultanément. Les tirages sont supposés équiprobables.

1. A chaque tirage, on fait correspondre le nombre de boules noires tirées. On définit ainsi une variable aléatoire X. Quelles sont les valeurs prises par X ? Etudier sa loi de probabilité. Calculer son espérance mathématique.

2. A chaque tirage, on fait correspondre la somme des nombres inscrits sur les trois boules tirées. On définit ainsi une variable aléatoire Y . Quelles sont les valeurs prises par Y ? Etudier sa loi de probabilité. Calculer son espérance mathématique.

Problème :

A — On considère la fonction numérique f à variable réelle strictement positive définie par

$$f(x) = -x^2 - \operatorname{Log} x \ .$$

Log désigne la fonction logarithme népérien.

Encore des tirages de boules ! C'est banal, mais cela vaut beaucoup mieux que certains exercices faussement concrets rencontrés dans les annales. L'expression "variable aléatoire" a décidément la vie dure ; quand se décidera-t-on à abandonner ce vocable, et à adopter "aléa numérique" ou.... ?

PROBLEME

1. Etudier les variations de cette fonction.
2. Construire sa représentation graphique (C).
3. Démontrer que f s'annule pour une et une seule valeur, appelée a . On ne cherchera pas à calculer a mais on démontrera que $\frac{1}{2} < a < 1$.
4. En déduire le signe de f(x) .

B — Un mobile M a pour coordonnées

$$x = \frac{e^t}{2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{e^{2t}}{4} - t + \operatorname{Log} 2 \quad , \text{(où } t \in \mathbb{R}) \ .$$

1. Démontrer que la trajectoire de M est la courbe (C) .
2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération à la date t .
3. A quelle date le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont-ils la même direction ?

C — On considère la fonction numérique g à variable réelle strictement positive définie par

$$g(x) = 1 - x + \frac{1 + \operatorname{Log} x}{x} \ .$$

1. Etudier les variations de cette fonction. (On sera amené à utiliser les résultats de A - 3. et 4.).
2. Démontrer que sa représentation graphique, appelée (C'), a une asymptote oblique d'équation $y = 1 - x$. Préciser la position de (C') par rapport à cette asymptote.
3. Construire avec soin (C') dans un repère orthonormé (unité: 2 cm). On précisera en particulier les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 1 , ainsi que le point commun à (C') et à son asymptote oblique.
4. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par (C') et les droites d'équation $y = 1 - x$ et $x = 1$.

1ère partie

La question "étudier les variations de f" que l'on trouve dans la plupart des énoncés ne semble pas ressentie de la même façon par tous les candidats, et sans doute par leurs professeurs. Que doit-on exiger comme réponse à une telle question :

1. Domaine de définition
2. Etude de la continuité
3. Etude aux bornes
4. Sens de variation et tableau de variation
5. Etude des branches infinies, recherche et d'asymptotes
6. Recherche des points d'inflexion ?

Les points 1. 3. 4. sont étudiés par tous ; 2. et 5. par une bonne moitié ; 6 par un nombre non négligeable...
Un candidat ayant seulement démontré que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ a-t-il répondu à la question ? (il a étudié le sens de variation mais peut-être pas "les variations").

Il suffirait de convenir une fois pour toutes ce qui se cache sous le vocable "étude des variations de f", que je propose de remplacer par "étude de la fonction f" ; par l'exemple l'étude des points 1. 2. 3. 4. me paraît raisonnable.

Les questions c) et d) n'ont été traitées correctement que par un nombre infime de candidats ; ceux-ci n'ont dans l'ensemble pas pensé à utiliser les théorèmes se déduisant de la continuité, ou ont très vite passé à la suite du problème pour tenter "d'aller au bout"...

2ème partie

Pouvait être supprimée sans nuire à l'ensemble du problème.

3ème partie

a) Pour éviter au candidat consciencieux de perdre un temps précieux peut-être aurait-on dû ajouter : on ne cherchera pas à calculer g(a)

b) La question : préciser la position de (C') par rapport à son asymptote peut être interprétée de deux façons :

1. Position lorsque $x \to +\infty$ (c'est mon interprétation et celle de beaucoup de candidats en raison du mot asymptote)

2. Position lorsque $x \in \left]0, +\infty\right[$ (il fallait alors distinguer $x < \frac{1}{2}$ et $x > \frac{1}{2}$). Dans ce cas la question aurait pu être rédigée ainsi : position de (C') et de la droite d'équation $y = 1 - x$

c) Construire "avec soin" : pourquoi du soin pour cette courbe et pas pour la précédente ? Est-ce synonyme de : "avec précision" ? auquel cas l'imprécision concernant g(α) rend cette précision difficile à réaliser ...

d) La surface plane est-elle celle dont les points ont une abscisse x telle que : 1. $\frac{1}{e} < x < 1$

ou 2. $x > 1$?

Le Les candidats ayant abordé la question ont choisi la première interprétation (peut-être parce que le calcul de l'aire était plus facile...)
Dans le 2è cas, l'aire était infinie (on pouvait le prouver en introduisant $x = \alpha$ et et en faisant tendre α vers l'infini).
Pour éviter cette anbiguïté, pouvait-on parler de "la surface plane fermée" ?

Attention!

Les prochaines Journées Nationales auront lieu
, à LIMOGES
, les 23, 24, 25 SEPTEMBRE I976
sur le thème :
"Education Permanente et Mathématiques"

Des groupes de travail sont prévus autour des trois grandes rubriques :

- la formation continue des adultes non-enseignants
- la formation permanente des enseignants
- les retombées éventuelles sur la formation initiale.

La Régionale de LIMOGES attend avec impatience vos idées pour créer des groupes précis et vos propositions pour les animer.