

PASCAL ET LA PREMIERE PROCEDURE RECURSIVE

par M. CAUSSE
(Lycée de SAINTES)

On connaît la correspondance de Pascal à Fermat au sujet du célèbre PROBLEME des PARTIS : soit A une somme à partager entre deux joueurs avec la règle suivante : dès que l'un d'eux a gagné N coups, il emporte toute la mise. Comment partager cette mise proportionnellement à la probabilité qu'ont respectivement les joueurs X et Y , s'ils ont respectivement gagné x et y parties - x et y respectivement inférieurs à N .

Ce problème est de grande valeur épistémologique. Pour la première fois, on y voit mettre en oeuvre les règles d'une MESURE de la probabilité. Qu'on rattache cette notion, d'une part aux spéculations des Jésuites sur la probabilité du Salut, dans les "Provinciales", d'autre part à celles de Pascal lui-même dans son célèbre pari : celui-ci, en quelque sorte, rattache l'"espérance du salut" à une espérance mathématique, non nulle pour les croyants... Nous avons donc ici un bel exemple, parmi d'autres, de découverte scientifique dont l'origine se rattache aux réflexions métaphysiques de l'inventeur.

La découverte des procédures récursives, en tant qu'elles généralisent le raisonnement par récurrence, permet d'analyser avec plus de précision qu'autrefois ce qui a pu faire l'objet de la controverse entre Pascal et Fermat. Il y apparaît même que, contrairement à une opinion répandue, Fermat s'était trompé. Il s'était trompé sur le problème à trois joueurs, puis s'est corrigé, jusqu'à retrouver les résultats numériques de Pascal.

La solution de Pascal est d'une extrême simplicité : soient x, y , les acquis respectifs des joueurs. Au coup suivant, on peut avoir soit $(x+1, y)$, soit $(x, y+1)$, avec des chances égales si le jeu est équitable. La probabilité qu'a X de gagner est donc également répartie : la moitié de la probabilité relative à $(x+1, y)$ s'il gagne, plus la moitié de la probabilité relative à $(x, y+1)$ s'il perd. Si l'on renouvelle les coups, l'un des acquis atteint nécessairement la valeur N , et le calcul se fait de proche en proche :

$$P(N, y) = A$$

$$P(x, N) = 0$$

$$\text{Si } (N-x)(N-y) \neq 0 \quad P(x, y) = 1/2 \cdot (P(x+1, y) + P(x, y+1))$$

C'est la définition d'une procédure récursive ; elle s'étend immédiatement au cas de trois joueurs, et davantage :

$$P(N, y, z) = A.$$

$$P(x, N, z) = P(x, y, N) = 0$$

Si $(N-x)(N-y)(N-z) \neq 0$:

$$P(x, y, z) = 1/3 \cdot (P(x+1, y, z) + P(x, y+1, z) + P(x, y, z+1))$$

La réalisation est très simple sur un ordinateur à langage récursif, LSE par exemple :

```

1*REGLE DES PARTIS DE PASCAL POUR 3 JOUEURS
2 PROCEDURE P(A,B,C) LOCAL C,B,A
3 SI (3-A)=0 ALORS RESULTAT 27 SINON ALLER EN 4
4 SI (3-B)=0 ALORS RESULTAT 0 SINON ALLER EN 5
5 SI (3-C)=0 ALORS RESULTAT 0 SINON ALLER EN 6
6 RESULTAT (P(A+1,B,C)+P(A,B+1,C)+P(A,B,C+1))/3
8 LIFE X,Y,Z
10 D=P(X,Y,Z);E=P(Y,Z,X);F=P(Z,X,Y)
12 AFFICHER D
13 AFFICHER E
14 AFFICHER F
15 TERMINER

```

On vérifie bien, pour $A = 27$, $x = 2$, $y = z = 1$, la répartition 17,5,5 donnée par Pascal dans sa lettre à Fermat du 24 Août 1624.

Ce qu'était la solution de Fermat, on peut le conjecturer d'après ce qu'en dit Pascal :

"J'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon ; mais que s'il y a plus de deux joueurs, il n'est pas toujours juste..."

On peut en effet donner la formule suivante, pour le joueur x :

$$a) P_N(x, y) = P_{N-y}(x-y, 0) \quad (X \text{ a l'avantage sur } Y)$$

$$\begin{aligned}
 b) P_N(x, 0) &= \frac{1}{2^{N-x}} + \frac{1}{2} \frac{C_{N-x}^{N-x-1}}{2^{N-x}} + \frac{1}{2} \frac{C_{N-x}^{N-x-1}}{2^{N-x+1}} + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{C_{2N-x-2}^{N-x-1}}{2^{2N-x-2}}
 \end{aligned}$$

Que Fermat se soit rendu aux raisons de Pascal résulte de la lettre suivante de Pascal, du 27 Octobre 1654 :

"Votre lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que le l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie".

"Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous remercie que cela me passe de bien loin ; je ne suis capable que de les admirer..."

On pourra essayer de donner une formule résolue pour $P(x,y,z)$...
 Il n'est déjà pas facile de construire un programme itératif sur calcu-
 lateur programmable sans piles de mémoires et langage récursif pour le
 parti entre deux joueurs - ou, ce qui est équivalent, pour le calcul
 des combinaisons $C(n,p)$ par la formule du triangle arithmétique
 $C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1)$.

Or Pascal a eu parfaitement conscience de la supériorité de sa
 méthode : (du 24 Août)

"...Je ne me fondais pas tant sur cette méthode des combinai-
 sons, laquelle n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon
autre méthode universelle à qui rien n'échappe, et qui porte sa démon-
stration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des
 combinaisons".

Il est aisé de voir en quel point exact se situe la dif-
 férence des deux points de vue. Si l'on applique la formule de récur-
 rence du triangle arithmétique à une fonction $f(x,y) = f(x-1,y) +$
 $f(x-1,y-1)$, il est clair que $f(x,y)$ est le tronc initial d'une
 arborescence, chaque noeud donnant naissance à deux branches. Il
 suffit de comparer à l'arborescence qui donne, en binaire, la géné-
 ration des réels de l'intervalle $[0,1[$, pour voir que l'ensemble
 des f à considérer n'est pas dénombrable. Lorsque, dans un cas
 particulier, il existe une règle arrêtant automatiquement l'arborescen-
 ce ; l'ensemble des f sera fini et par conséquent dénombrable ; il ne
 s'ensuit pas pour autant que la définition d'un ordre de dénombrement
 soit facile.

A vrai dire, nous ne sommes pas sûr que nos observations
 soient originales. Ce ne peut être en effet sans raisons qu'a été
 dénommé "Langage Pascal" un perfectionnement du langage Algol 60.
 Quoi qu'il en soit, Pascal est bien l'inventeur de la première pro-
 cédure récursive, et a compris la puissance de la méthode.