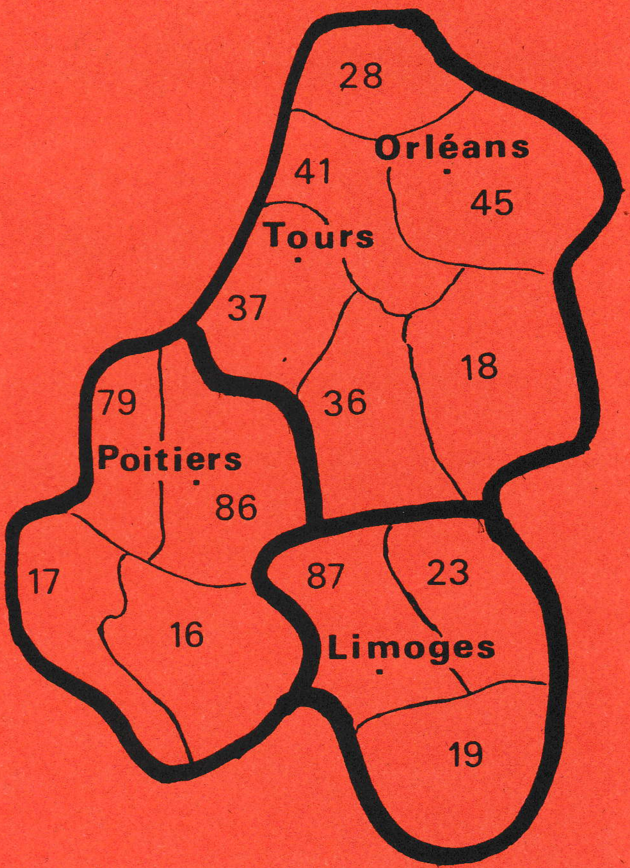
PLOT

n° 4



BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

trimestriel: **mars 1977**

5f

plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n° 4 :

Rencontres

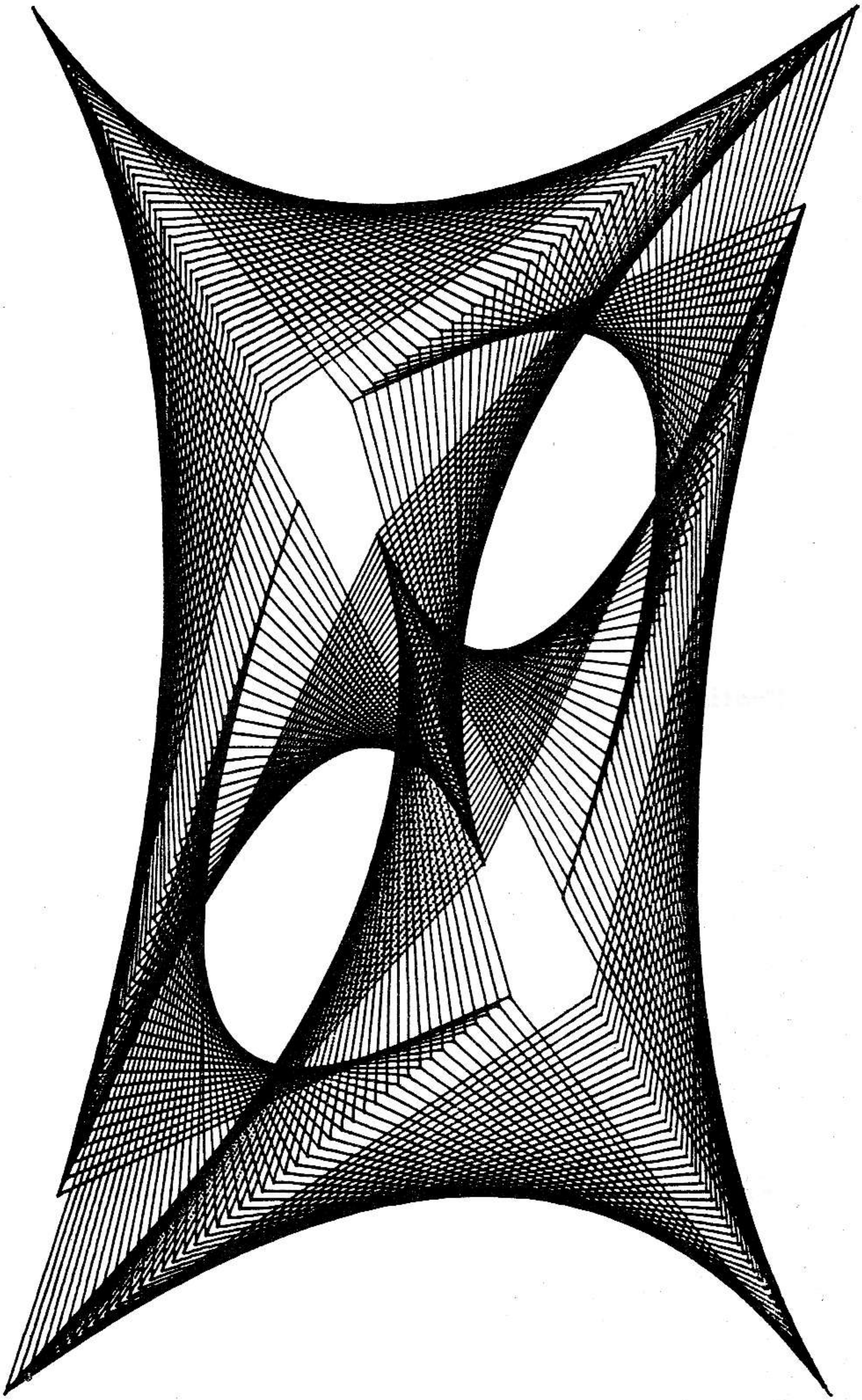
Pratique

Echanges

Communications

Agenda

2



FORMATION DES MAÎTRES EN MATHÉMATIQUES AU QUÉBEC : PERMAMA

A. ROUCHIER

Texte d'une conférence donnée lors des Assemblées Générales 1975-76 des Régionales de Poitiers et d'Orléans-Tours

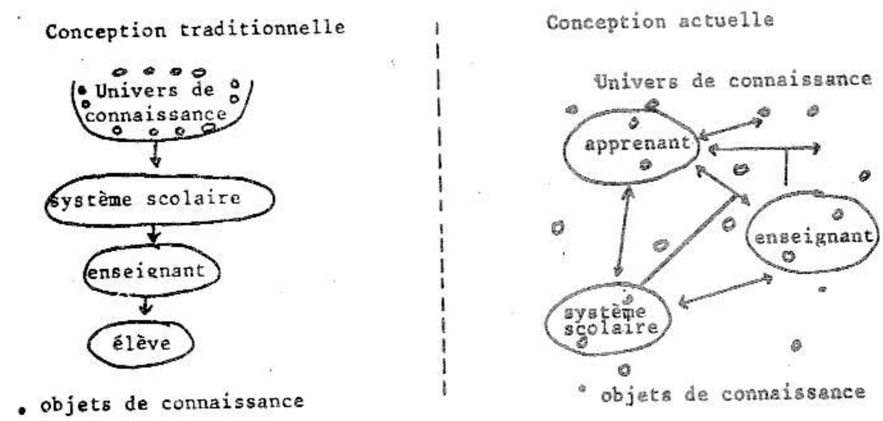
Tout commence....

.... ailleurs comme ici quand on veut tenir compte de nouvelles exigences, au niveau de l'enseignement des maths. Ces nouvelles exigences portent sur le contenu, mais aussi sur la manière d'enseigner. La France a aussi connu ce débat et on peut le rappeler en quelques mots.

Conception traditionnelle :	Conception nouvelle :
.l'enseignant est intermédiaire entre l'univers de connaissance et l'élève, l'étudiant est un récepteur qui enregistre.	.l'apprentissage est un processus dynamique d'échanges entre l'apprenant et son milieu. Il est l'agent principal de sa formation et celle-ci prend sa source dans son dynamisme intérieur. Alors l'enseignant est une personne ressource, qui guide l'apprenant dans un univers "élargi" d'objets de connaissance, élabore des stratégies d'apprentissage qui permettent un cheminement adapté à ses besoins et à ses aptitudes.
.les objets de connaissance sont circonscrits dans des programmes prévoyant une progression rigoureuse et principalement axés sur les exigences intrinsèques d'une discipline. La pédagogie qui en résulte tend à suivre une progression prévue a priori, ce n'est qu'accidentellement qu'elle est efficace.	.les programmes doivent faciliter et enrichir la relation apprenant enseignant. L'enseignement doit être une expérience authentique et durable de l'apprenant. L'enseignant adapte les programmes en fonction des facteurs prépondérants sur lesquels il exerce un contrôle direct. Il est à l'écoute de l'apprenant et lui apprend à produire, à créer, à inventer.

Ainsi le rôle de l'enseignant se modifie, il doit être plus attentif à l'apprenant, il doit bien comprendre le développement des concepts mathématiques nécessaires à l'apprenant et pouvoir recourir aux stratégies d'apprentissage tenant compte des différences individuelles autant intellectuelles qu'affectives.

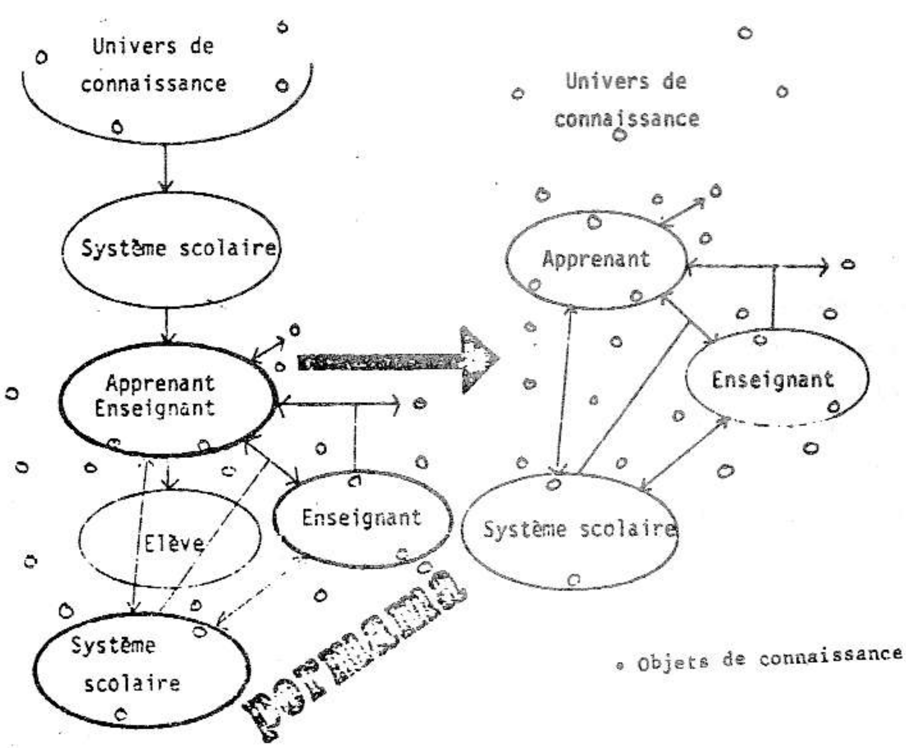
Cette mutation est exprimée par le schéma suivant.



Mais il est juste de dire que cette évolution de la fonction enseignante n'est pas immédiatement perçue par tous, que la suivre au niveau de sa propre classe exige un grand effort qui n'est pas seulement une remise en cause. Et toute remise en cause porte en soi des facteurs d'insécurité. Cette insécurité crée des besoins :

- *les enseignants veulent réfléchir et agir*
- *les enseignants désirent modifier leurs méthodes d'enseignement.*
- *les enseignants veulent adapter leurs enseignements à des besoins nouveaux.*

Ainsi le nouveau PERMAMA[Perfectionnement des maîtres en mathématiques], doit se fixer comme objectifs de participer à sa façon à l'évolution du système scolaire en favorisant une mutation de la conception de l'apprentissage scolaire. Il devra proposer une formule de perfectionnement où l'apprenant est actif, autonome et responsable.



Les règles fondamentales du fonctionnement sont donc les suivantes :

- perfectionnement dans le milieu
- perfectionnement adapté
- perfectionnement qui tire profit de la formation à distance
- perfectionnement continu.

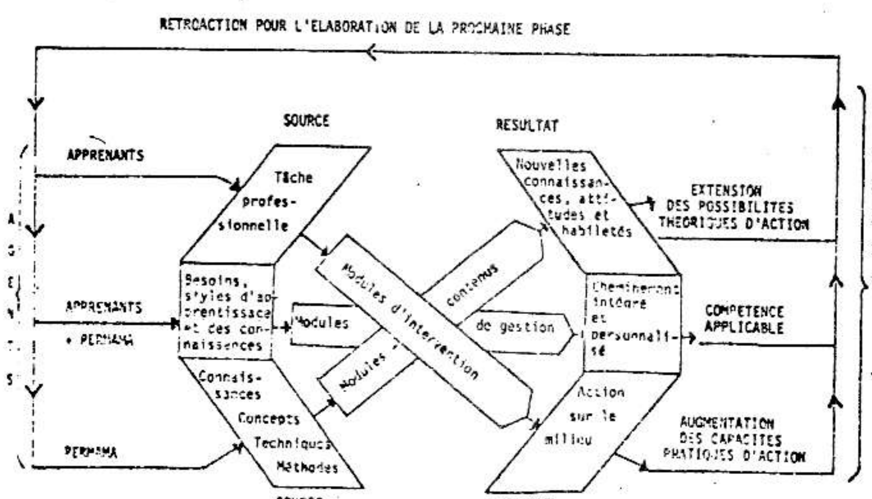
Ainsi les besoins en formation de l'enseignant (devenu apprenant) seront définis par lui-même à partir des problèmes qu'il rencontre, dont il a fait l'analyse et à la résolution desquels il travaille, avec d'autes collègues (du même établissement ou d'établissements voisins) à travers plusieurs types d'activité (groupées en éléments de cours de 45h) :

- éléments de gestion qui vont lui permettre d'établir, en collaboration avec PERMAMA le cheminement qui correspond le mieux à ses besoins, en coordonnant éléments d'intervention et éléments contenus. [Ex. : Planification de cheminement pédagogique.]

- éléments d'intervention qui regroupent en activités directement liées à sa tâche professionnelle. Il s'agira de résoudre un problème d'apprentissage de la mathématique au niveau secondaire : implantation de nouveaux contenus, utilisation d'outils pédagogiques, personnalisation de l'enseignement, modes d'évaluation...

- éléments contenus par lesquels l'apprenant réalise un apprentissage : il peut s'agir de l'étude d'une théorie mathématique [Ex. : algèbre de Boole, théorie des graphes, structures algébriques]; de l'étude de l'activité mathématique [Ex. : résolution de problèmes]; de l'étude de méthodes d'enseignement [Ex. : rédaction de fiches de travail, relations professeurs-élèves.]

La meilleure (!) façon de caractériser le modèle est de reproduire le schéma de base, schéma du modèle de perfectionnement, qui a fait l'objet d'une diffusion massive (par voie d'affiches) dans tous les établissements secondaires québécois.



- Schéma du modèle de perfectionnement.

Le cheminement à l'intérieur de ce modèle n'est pas déterminé une fois pour toutes, mais fait l'objet d'un examen périodique par l'intermédiaire d'éléments de gestion. Ainsi le cheminement global est formé d'une succession de phases qui peut être schématisée de la façon suivante :

Pour employer une analogie (simplifiante) on peut dire qu'il s'agit d'une formation-préparation au baccalauréat par unités capitalisables.
L'équipe de concepteurs a la charge de préparer les éléments de cours. Cette préparation comporte une phase de définition des objectifs, des prérequis éventuels, des modalités d'évaluation, une phase de détermination du contenu, du plan de travail, des moyens à mettre en oeuvre (utilisation de bandes vidéo, textes de référence, matériels), une phase de rédaction des fascicules nécessaires, de réalisation des autres moyens (bandes vidéo, transparents,...). Une courte session de formation introduit l'élément de cours auprès des responsables de centres, à la suite de quoi il est mis au catalogue, c'est-à-dire utilisable par les étudiants. Actuellement 26 éléments thèmes mathématiques, 5 éléments activité mathématique, 8 éléments thèmes didactiques sont disponibles.

En résumé, le modèle propose de réaliser :

- un cheminement pédagogique personnalisé, défini en collégialité

par

une démarche d'auto-apprentissage liée au travail d'équipe

en

liaison avec l'exercice des fonctions professionnelles.

Où et Comment ?

PERMAMA est un programme universitaire de formation des maîtres.
PERMAMA est un programme de la Télé-Université de l'Université du Québec, géré en commun avec certaines composantes de cette dernière : Université du Québec à Trois Rivières, Université du Québec à Chicoutimi.

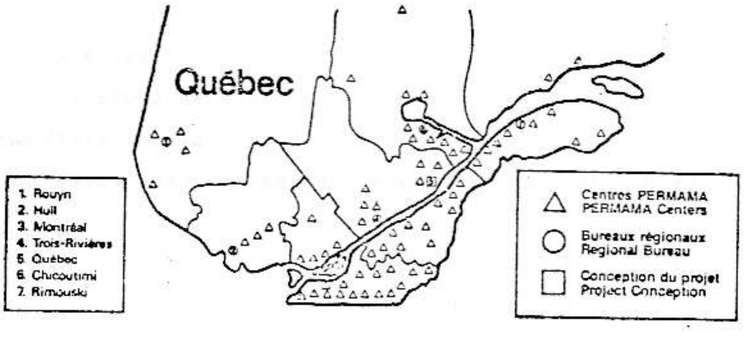
Les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, s'inscrivent librement à PERMAMA pour préparer le baccalauréat (1er cycle universitaire). En général, ils ont été formés dans des Ecoles Normales (supprimées) où ils ont reçu une formation mathématique insuffisante au regard des exigences nouvelles de l'enseignement. En outre, chaque année de scolarité supplémentaire donne droit à un avancement.

Les étudiants sont regroupés dans des centres (voir carte ci-jointe) à l'intérieur desquels ils se groupent en ateliers pour certains éléments de cours et qui sont placés sous la responsabilité d'un animateur (responsable de centre (un de leurs collègues) appointé par la Télé-Université. Ces centres sont regroupés dans 6 régions qui gèrent des responsables régionaux universitaires (contact avec les responsables de centres, prospection,...).
La conception des éléments de cours est faite à Montréal par une équipe de 22 personnes.

Les étudiants n'ont pas de décharge d'enseignement. Ils consacrent en moyenne 6 heures par semaine à leur formation. Il faut obtenir 90 crédits pour obtenir le baccalauréat, 1 crédit correspondant à 45h de travail, mais chaque étudiant se voit attribuer d'entrée 30 crédits.

En résumé,

- 1000 professeurs de mathématiques du secondaire
- 68 centres d'apprentissage
- 6 responsables régionaux universitaires
- 1 équipe centrale de 22 didacticiens de la Télé-université (Université du Québec)



Ces quelques informations ne donnent malheureusement qu'une assez pauvre idée du fonctionnement réelle de PERMAMA. Mais un tel modèle est excessivement stimulant et beaucoup d'IREM se sont engagés dans des opérations de coopération et des réalisations communes avec PERMAMA. Prochainement, un numéro spécial du bulletin Inter-IREM permettra de donner une information plus détaillée. On ne peut cependant s'empêcher d'être séduit d'une part par l'ampleur du projet, son agencement rigoureux fruit d'une réflexion approfondie en même temps que sa souplesse d'utilisation. C'est déjà une grande performance de faire accepter les choix de PERMAMA par des autorités politiques. C'en est une plus grande encore que d'avoir intégré aussi bien toutes sortes de contraintes en un modèle qui sait transformer un programme universitaire en un véritable programme de formation continue.

QUELQUES EXEMPLES DE RECHERCHE EN THÉORIE DES NOMBRES...

par Jean-Louis NICOLAS, Université de LIMOGES

(conférence du 15/10/1976 devant la Régionale de Limoges)

Pour savoir ce qui se passe dans la tête d'un chercheur. Pour comprendre la genèse de la pensée mathématique, demandons quelques illustrations à l'un d'entre eux.

La théorie des nombres a toujours posé des problèmes aux énoncés simples, mais très difficiles à résoudre. Pour les étudier, il a souvent fallu développer de façon considérable des secteurs importants des mathématiques qui n'avaient rien à voir au départ, avec l'arithmétique

La plupart des résultats exposés ici sont tirés des trois livres :

-[HW] : Hardy and Wright, an introduction to the theory of numbers, Oxford at the Clarendon Press, 4[th] édition 1960

en anglais, mais très attrayant et tout à fait abordable (la moitié du livre est accessible à un élève de terminale C)

-[BC] : Borevitch et Chafarevitch , théorie des nombres, Gauthiers Villars 1967

-[MC] : Mathématics of computation vol.29, 1975

Ce numéro spécial de la revue Mathematics of computation rassemble plusieurs articles qui montrent à quoi peut servir un ordinateur dans la recherche en théorie des nombres.

1) - le théorème de Fermat

Soit n un entier $\geqslant 3$. Il n'existe pas trois entiers x, y, z non nuls, tels que :

$$x^n + y^n = z^n$$

Sur son exemplaire des oeuvres de Diophante, Pierre de Fermat posait ce problème en 1637 et écrivait qu'il en connaissait une solution, mais que la marge était trop petite pour la contenir. De nos jours, ce problème n'est toujours pas complètement résolu, bien que de nombreux mathématiciens l'aient abordé.

Le cas n = 2 était connu de Diophante :

Si l'on a : $x^2 + y^2 = z^2$ avec

$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y) = 1$, x pair.

(l'un des deux nombres x ou y doit être pair, pour des raisons de congruence modulo 4).

Alors $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$
où a et b sont des entiers de parité opposée, avec :

$(a,b) = 1$ et $a > b > 0$.

Il y a une bijection entre les paramètres a et b et la solution x, y, z.

On trouvera dans [HW], ch.XIII, la démonstration de ce théorème. Exemples :

$a = 2$, $b = 1$ donne $3^2 + 4^2 = 5^2$

$a = 3$, $b = 2$ donne $5^2 + 12^2 = 13^2$

Si le théorème de Fermat est vrai pour n, il est vrai a fortiori pour un multiple de n puisque :

$$x^{an} + y^{an} = z^{an}$$

s'écrit aussi

$$(x^a)^n + (y^a)^n = (z^a)^n$$

Il suffit donc de démontrer le théorème de Fermat pour $n = 4$ et lorsque n est un nombre premier impair.

Fermat résolvait le cas $n = 4$ en démontrant que l'équation $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solutions non nulles.

Le cas $n = 3$ fut résolu par Euler qui a démontré que l'équation $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$ n'a pas de solutions dans l'anneau $\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ ou $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité.

Dans cet anneau, il y a des nombres premiers et une décomposition unique en facteurs premiers. Cette dernière propriété n'est malheureusement pas générale, puisque dans l'anneau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{10}$, les nombres $2, 3, 4 + \sqrt{10}, 4 - \sqrt{10}$ sont premiers et que $6 = 2.3 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$ a deux décompositions.

Pour pallier à cet inconvénient, Kummer en 1850 inventa la théorie des nombres idéaux pour lesquels il y a unicité de la décomposition en facteurs premiers. Il démontra ainsi que pour tout nombre premier p régulier, le théorème de Fermat est vrai.

Les nombres de Bernouilli B_n sont définis comme les coefficients du développement en série entière de $\frac{x}{e^x - 1}$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2} x^2 + \frac{B_4}{4!} x^4 + \dots$$

On peut calculer B_n en faisant le quotient des développements limités de x par $e^x - 1$, ou par la relation :

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} B_k = 0 \quad \text{avec} \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

On trouve $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{6}$; $B_4 = -\frac{1}{30}$; $B_6 = \frac{1}{42}$;

$B_8 = -\frac{1}{30}$; $B_{10} = \frac{5}{66}$; $B_{12} = \frac{-691}{2730}$; $B_{14} = \frac{7}{6}$; etc...

Tous les Bn, pour n impairs sont nuls à l'exception de B_1.

Ces nombres servent à développer tgx et cotgx en série entière :

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{avec } T_n = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}$$

(Tn est un nombre entier)

$$\operatorname{Cotg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n-1}$$

On peut également exprimer en fonction des B_n la somme des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ pour k entier : on a :

$$\frac{|B_{2k}|}{2k!} = \frac{2}{(2\pi)^{2k}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right)$$

On a en particulier : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Cette dernière formule donne l'ordre de grandeur des B_{2k}, car $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ est une suite décroissante de k, dont la limite est 1.

Un nombre premier p impair est dit régulier, s'il ne divise aucun numérateur des nombres de Bernouilli

$$B_2, B_4 \ldots\ldots\ldots B_{p-3}$$

Le plus petit nombre irrégulier est p = 37 qui divise B_{32}. On trouvera une table des nombres premiers irréguliers dans [BS.]

Kummer devait bien penser être près du but en donnant son critère : pour p régulier, le théorème de Fermat est vrai. Malheureusement, l'étude des nombres premiers réguliers s'avérait très difficile. On ne sait pas encore s'il existe une infinité de tels nombres. On sait cependant qu'il y a une infinité de nombres premiers irréguliers.

Depuis Kummer, des critères numériques ont été donnés pour démontrer que le théorème de Fermat était vrai lorsque p est irrégulier (cf [MC]). On a ainsi pu démontrer le théorème de Fermat jusqu'à n = 30 000 (cf [MC]) et depuis Wagstaff a poursuivi les calculs jusqu'à 100 000 à l'Université de l'Illinois à Urbana. D'autres problèmes sont soulevés par ces calculs : la répartition des nombres premiers réguliers : On conjecture que le quotient $\frac{\pi_r(x)}{\pi(x)}$ du nombre de nombres premiers réguliers $\leqslant x$ sur le nombre total de nombres premiers $\leqslant x$ tend vers $\sqrt{e} = 0{,}61$ lorsque x tend vers l'infini On étudie aussi l'index d'un nombre premier irrégulier : c'est le nombre de nombres de Bernouilli qu'il divise. Ainsi 491 qui divise B_{292}, B_{336}, et B_{338} pour index 3.

Cas simplifié

On a pu démontrer que l'équation $x^p + y^p = z^p$ n'avait pas de solution x,y,z telle que p ne divise pas x,y,z sauf si :

$$2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$$

Le petit théorème de Fermat affirme que $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Modulo p^2, c'est vrai pour p = 1093. Là encore c'est un problème bien difficile que d'étudier cette congruence.

Conjecture d'Euler

Après avoir résolu $x^3+y^3=z^3$, c'est-à-dire montré qu'un cube ne pouvait être une somme de 2 cubes, Euler avait conjecturé qu'une puissance $n^{\text{ième}}$ ne pouvait être la somme de (n-1) puissances $n^{\text{ième}}$.

L'ordinateur a mis fin à cette conjecture en donnant :

$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$

Mais est-ce le seul contre exemple ? et sinon, comment sont distribués les autres contre exemples ?

Le théorème des nombres premiers et l'hypothèse de Riemann

Euclide a démontré qu'il existait une infinité de nombres premiers, par la démonstration encore utilisée de nos jours. S'il n'y en avait qu'un nombre fini $p_1, p_2 \dots\dots p_k$, on considère $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$; ou bien N est premier et plus grand que p_k, ou bien N a un facteur premier plus grand que p_k.

En 1808, Legendre écrivait : "Quoique la suite des nombres premiers soit extrêmement irrégulière, on peut cependant trouver avec une précision très satisfaisante, combien il y a de ces nombres depuis 1 jusqu'à une limite donnée x. La formule qui résout la question est :

$$y = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

log x étant un logarithme hyperbolique".

Legendre avait basé cette conjecture sur l'étude des tables de nombres premiers.

Dirichlet a démontré que dans toute progression arithmétique an + b, avec a et b premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers. Le raisonnement d'Euclide s'adapte à certaines progressions comme 4n + 3 ou 6n + 5 (cf. [HW] , ch.2), mais pas à toutes et le théorème de Dirichlet est plus profond.

On note habituellement $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$. Tchebychev démontra qu'il existait deux réels A et B vérifiant $0 < A < 1 < B$ tels que :

$$\frac{Ax}{\log x} < \pi(x) < \frac{Bx}{\log x}$$

Pour obtenir la majoration, il considère le coefficient du binôme $M = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}$. Comme M intervient deux fois dans le développement de

$(1+1)^{2m+1}$, on a $M < 2^{2m}$

Maintenant soit $q_1 \dots\dots q_k$ les nombres premiers appartenant à $]m+1, 2m+1]$. On a $k = \pi(2m+1) - \pi(m+1)$.

D'autre part le produit $q_1 \dots\dots q_k$ divise M et on a :

$(m+1)^k < q_1 q_2 \dots\dots q_k < 2^{2m}$

d'où l'on tire

$$\pi(2m+1) - \pi(m+1) < \frac{2m \log 2}{\log(m+1)}$$

On démontre alors par récurrence sur n, la formule $\pi(n) < \frac{Bn}{\log n}$.

En utilisant des combinaisons plus compliquées :

$$\frac{x!\,(x/30)!}{(x/2)!\,(x/3)!\,(x/5)!}$$

pour x multiple de 30, Tchebychev resserrait autour de 1 les constantes A et B et démontrait que pour $x > x_0$ on avait :

$$\frac{ax}{\log x} < \pi(x) < \frac{6}{5}\, a\, \frac{x}{\log x}$$

avec $a = \log \frac{2^{1/2}\, 3^{1/3}\, 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0{,}92129$. En améliorant ces techniques, il pensait bien arriver à montrer que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Malheureusement ce n'était pas possible.

Tchebychev démontra le postulat de Bertrand : pour tout x réel > 1, il y a un nombre premier entre x et 2 x.

Riemann introduisit la fameuse fonction ζ définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}\ \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

Cette fonction est liée aux nombres premiers par la formule :

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1$$

Cette formule montre qu'il y a une infinité de nombres premiers : en effet, pour s = 2, s'il y en avait un nombre fini, le produit π serait fini et $\zeta(2)$ serait rationnel. Or, on a vu que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ qui n'est pas rationnel.

On peut donner un sens à $\zeta(s)$ pour $0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

La série $f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ est convergente pour s réel > 0 par le critère des séries alternées et pour s complexe, $\mathrm{Re}(s) > 0$ par le théorème d'Abel. Dans la somme $\zeta(s) + f(s)$ les termes pairs s'ajoutent, les termes impairs s'en vont et l'on a :

$$\zeta(s) + f(s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \frac{2}{2^s}\, \zeta(s)$$

d'où pour $s \neq 1$, $\quad \zeta(s) = f(s) \Big/ \left(\frac{1}{2^{s-1}} - 1\right)$

On a $\lim_{s \to 1} \zeta(s) = \infty$

Hadamard et De La Vallée Poussin démontrait simultanément en 1896 le théorème des nombres premiers (i-e $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$).
Ils montraient d'abord qu'il était équivalent à : $\forall t \in \mathbb{R}^*\ \zeta(1 + it) \neq 0$ puis démontraient ce dernier résultat.

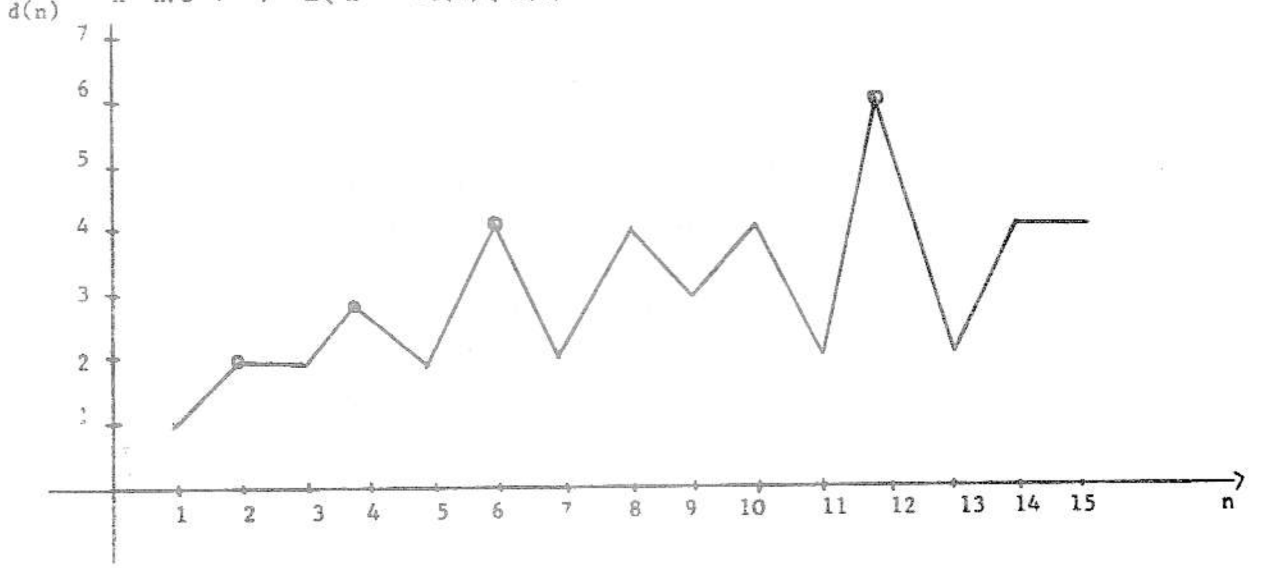
L'étude des "zéros" de la fonction ζ est donc importante. On peut montrer que dans la bande $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, ils sont placés symétriquement par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$. L'hypothèse de Riemann dit qu'ils sont tous localisés sur cette droite. Ils sont aussi placés symétriquement par rapport à l'axe réel ($\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$). Le premier zéro est $\frac{1}{2} + 14,1 \ldots i$. On a calculé (cf. [MC]) les zéros de $\zeta(s)$ dont la partie imaginaire est inférieure à 1 894 438. Il y en a plus de 3 millions et demi, tous situés sur la droite $x = \frac{1}{2}$.

En 1950, Erdos et Selberg donnait une autre démonstration du théorème des nombres premiers, dite élémentaire, c'est-à-dire n'utilisant pas la théorie des variables complexes.

Nombres hautement composés

Un entier n est dit hautement composé (h.c) s'il a plus de diviseurs que tous les nombres qui le précèdent. Soit d (n) le nombre de diviseurs de n, on a :

n h.c $\iff m < n \Longrightarrow d(m) < d(n)$



Les nombres h.c sont les nombres qui ont une vue imprenable sur $-\infty$: 2, 4, 6, 12.

Si n a pour décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_k^{\alpha_k}$$

Un diviseur d de n s'écrira $d = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$

Il y a donc $(\alpha_1 + 1)$ choix possibles pour $\beta_1, \ldots (\alpha_i + 1)$ choix possibles pour β_i et on a donc :

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots . (\alpha_k + 1)$$

L'étude des nombres hautement composés est liée à l'étude de : $\max_{n \leqslant a} d(n)$. Ce dernier problème se met sous la forme d'un problème d'optimisation en nombres entiers :

Trouver des entiers $x_i \geqslant 0$ tels que :

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \ldots + x_k \log p_k + \ldots \leqslant \log a$$

$$\max \left[\log(x_1 + 1) + \log(x_2 + 1) + \ldots + \log(x_k + 1) + \ldots\right]$$

où p_k désigne le k ième nombre premier.

Les problèmes d'optimisation en nombres entiers interviennent en Recherche Opérationnelle à des fins militaires ou commerciales. Et, j'ai eu la surprise de voir que les méthodes d'études des nombres h.c, que je croyais enfermés dans un domaine abstrait et inutile, pouvaient servir à résoudre des problèmes très concrets.

Voici quelques conclusions que l'on peut dégager de ces exemples :

- un problème n'est jamais complètement résolu,
- en théorie des nombres, il a toujours été utile de faire des calculs, de construire des tables pour en déduire des conjectures. Les ordinateurs facilitent et amplifient cette méthode.
- quand on ne sait pas résoudre un problème, on tourne autour en le généralisant ou en le restreignant, en le modifiant pour tenter de l'abattre.
- les discussions sur un problème sont très utiles d'où la nécessité des congrés, des rencontres, de l'enseignement de niveau 3ème cycle.
- il peut paraître sécurisant de penser que des gens s'intéressent au théorème de Fermat. Mais l'expérience a montré (éventuellement à long terme) que ce genre de travail pouvait développer la recherche scientifique dans bien d'autres secteurs,
- dans un récent article (13 octobre 1976) sur la Recherche Scientifique en France, "Le Monde" mentionnait : "Le chercheur est un être un peu à part qui s'amuse de choses qui n'amusent pas les autres".

Il me reste à souhaiter que les professeurs que nous sommes sachent communiquer à leurs élèves le goût de s'amuser avec les mathématiques.

ACTIVITES GEOMETRIQUES

par J. TOUILLET
(CES de PARTHENAY)

Les élèves de 4ème ont plus de difficultés à opérer dans un ensemble infini que dans un ensemble fini. Les activités de constructions géométriques constituent un support appréciable pour élaborer des concepts.

Les élèves de 4ème prennent contact avec le vectoriel, il serait ambitieux d'espérer qu'ils acquièrent la notion d'espace vectoriel, mais on peut essayer de construire avec eux un embryon.

Dans un ensemble de bipoints dont l'image géométrique est finie, on étudiera la relation d'équipollence et les translations.

Un vecteur est une classe d'équivalence de bipoints équipollents ou un vecteur est le graphe d'une translation.

La figure de base est un parallélogramme pour lequel on se donne deux programmes de construction ; si on peut, on démontrera l'équivalence des deux programmes.

1°) (A, B, C, D) est un parallelogramme si {AB , CD} et {BC , DA} sont 2 paires de parallèles de direction différentes.

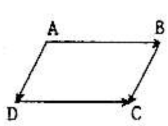
- le tracé peut se faire sur feuille blanche avec règle et équerre,

- ou sur papier quadrillé en comptant les carreaux, les élèves ont fait en 5ème des translations sur quadrillage.

2°) (A, B, C, D) est un parallélogramme si (AC) et (BD) ont même milieu ; la règle avec point milieu est assez commode dans ce cas.

Si l'on a 2 points (A,B) , combien a-t-on de bipoints ? Ce n'est pas très intéressant, on y reviendra plus tard.

Si l'on a 4 points (A, B, C, D) tels que (A, B, C, D) soit un parallélogramme, on peut rechercher les bipoints, les élèves ont vu le produit cartésien en 5ème. 10 bipoints c'est impressionnant, mais on va les classer.

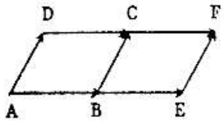


{(A,A),(B,B),(C,C),(D,D)} on peut dessiner des boucles.

{(A,B),(D,C)} {(A,D);(B,C)} c'est une conséquence immédiate de la définition de l'équipollence.

{(BA) , (CD)} {DA , CB}. Il reste encore 4 bipoints à caser ; (AC) est seul parmi les équipollents à (A,C) ; même situation pour (B,D) et leurs symétriques viennent compléter l'ensemble fini des 10 bipoints.

On peut placer à côté de ce parallélogramme un autre tel que B soit milieu de (AE) et C milieu de (D,P)

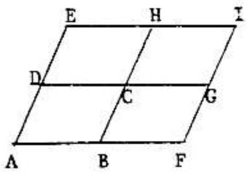


Les classes d'équivalence s'enrichissent, les représentants du vecteur nul sont les plus nombreux. Il devient intéressant de coder les classes d'équivalence, avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ on peut réaliser ce codage.

$\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{AB}$; $-\overrightarrow{AB}$; $-2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $-\overrightarrow{AD}$

On pourra dénombrer les vecteurs qui ont des représentants de ce petit dessin. On aura envie de l'agrandir, de voir un peu plus loin si la méthode d'exploration peut être étendue, l'idée de vecteur est en train de se former.

Translation sur un quadrillage construit à partir du parallélogramme (A, B, C, D)



D est milieu de (A,E)

B est milieu de (A,F)

C est milieu de (B,H) et (D,G)

FG $\cap$ EH = {I}

La translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ est une fonction définie par $t_{(\overrightarrow{AB})}(C) = G$ signifie : les bipoints (AB) et (CG) sont équipollents.

Ecrire le graphe de $t_{\overrightarrow{AB}}$ dans cet ensemble fini est assez facile et même intéressant.

$$\mathcal{G}(t_{\overrightarrow{AB}}) = \{AB, BF, DC, CG, EH, HI\}$$

Certains points n'ont pas d'image dans l'ensemble volontairement limité que nous avons construit ; certains points ne sont l'image d'aucun point de notre ensemble choisi. Si on veut l'image de E ou de H pour $t_{\overrightarrow{AD}}$ on peut la construire.

L'activité de dénombrement des translations qu'on peut représenter dans ce petit quadrillage s'appuie sur le dessin et entraîne une certaine réflexion. Je crois que les élèves éprouvent une certaine satisfaction de trouver les 25 translations.

Si on construit un réseau à 10 points, le nombre de bipoints devient 250 ; combien pouvons-nous figurer de translations ? L'espoir d'arriver à les trouver toutes est assez motivant.

Maintenant on peut sans doute aborder le calcul vectoriel, sur réseau tout fait qu'on trouve chez le marchand de papier quadrillé, ou bien en le faisant soi-même sur papier blanc avec des crayons de couleur.

BIOLOGIE, MATHÉMATIQUE ET 10 % PAR SUZANNE PIGÉ

Novembre 1975, les 23 élèves d'une classe de 6ème et leur professeur de biologie visitent une ferme, centre d'intérêt : les 42 vaches laitières.

Les élèves enregistrent au magnétophone les réponses du fermier dont beaucoup de données numériques.

Décembre 1975, les 23 élèves et leurs professeurs de biologie et de mathématique se retrouvent pendant deux heures en salle de biologie.

1- Au magnétophone "la ferme a 120 hectares".

Des élèves savent, la plupart n'ont qu'un très vague souvenir des unités d'aire, alors on travaille cette question oralement et au tableau.

"Un hectare, c'est grand ?" demande une élève.

Les élèves entreprennent alors de mesurer la longueur et la largeur de la salle ; différentes méthodes sont employées par les élèves : le mètre de bois (le zéro n'est pas à une extrémité !), les enjambées ou les pas (quelle en est la régularité ?), compter les carreaux (il y a des joints !), on recherche les résultats "les plus précis".

Une élève demande à aller au tableau faire le calcul d'aire : elle ajoute longueur et largeur...

Nous distribuons à chaque élève une fiche :

Unités d'aire

	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
ha					
a					
ca					

- La ferme vue à Ballan a une superficie de 120 ha, convertis ce nombre en m^2 : ....
- En supposant que le terrain de cette ferme ait la forme d'un rectangle de 1 km de largeur, quelle serait sa longueur en km ? ...

Pour quelques élèves c'est trop difficile.

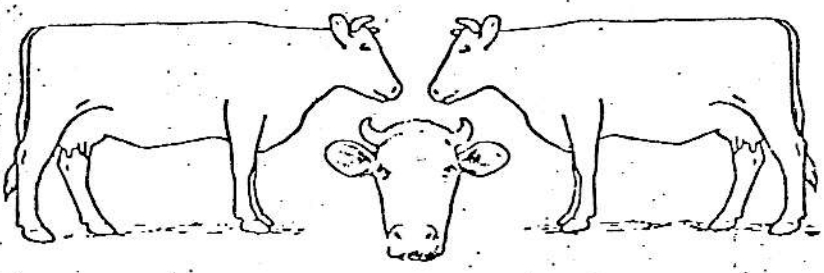
2- Nous distribuons à chaque élève la "fiche de Gélatine" l'une des vaches laitières de la ferme.:

DÉPART 37 — N° ÉLEVEUR — NOM ET ADRESSE

NOM DU PÈRE: Espoir — NUMÉRO — NOM DE LA MÈRE: Drinette — NUMÉRO

NOM DE LA VACHE: GELATINE — NUMÉRO: 3700253780

DATE DE NAISSANCE — Jour: 20 — Mois: 02 — Année: 70



RACE: 66 — H.B.

Code CICD

GPM

GMM

DESCENDANTS

N° LACT.	DATE DE VÊLAGE	AGE AU VÊLAGE	NOM DU VEAU	NUMÉRO DU VEAU	SEXE	DEST.	NOM DU PÈRE	NUMÉRO DU PÈRE
1	13.12.72	2ans 10m			M	morte		
2	26.12.73	3ans 10M			M	B	Imposant	
3	11.12.74	4ans 9	Kabylie		F	E	Jupiter	

PRODUCTIONS

LACTATION TOTALE — LACTATION DE RÉFÉRENCE

N° LACT.	INTERVALLE VELAGE	DURÉE j	LAIT l	MAT. GR. kg	MAT. AZ. kg	T. B.	T. AZ.	LAIT/JOUR LACTATION	LAIT	MAT. GR.	MAT. AZ.	T. B.	T. AZ.	LAIT
1	/	303	3346	130*	118	38.9	33.5	11.0						
2	378	300	3492	118	118	34.0	33.8	11.6						12

- Descendants, ascendants, images, antécédents, que de mots !
- Gélatine est née en 1970
  Kabylie est née en 1974 — les élèves découvrent une bijection.

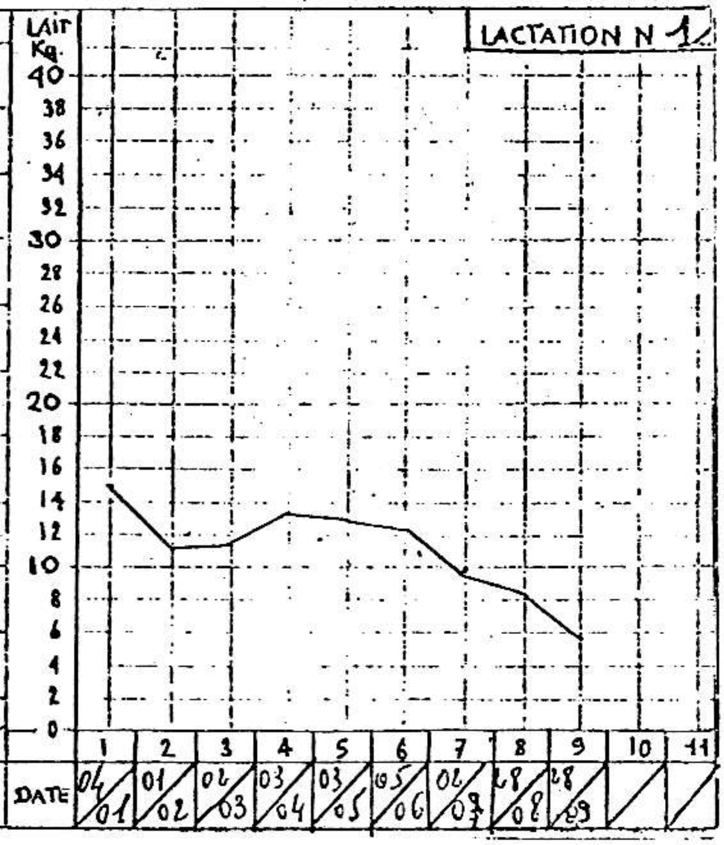
On recherche alors l'âge des vaches, taureaux et veaux nommés dans la fiche, et aussi l'âge des chiens du voisin...

Les élèves essaient de mieux suivre la vie de Gélatine, lecture des dates sur la fiche et représentation graphique :

La vie de Gélatine à la ferme de Ballan

3- La production de lait d'une vache laitière, nous distribuons les graphiques de chaque lactation établis par le fermier

N°	LAIT	T. B.	T. AZ	
1	15 0	35	32 4	
2	11 0	35	31 3	
3	11 3	39	30 8	Chaleur
4	13 4	40	33 5	
5	13 1	37	35 3	
6	12 5	39	33 8	
7	9 8	38,4	31 6	
8	8 3	44 1	35 8	
9	5 7	53 1	41 8	
10	TARIE			
11				
12				



Tableau, diagramme, "courbe",

les questions ne manquent pas

les deux heures se terminent.

Le lendemain, pendant l'heure de mathématique, nous reprenons la question de l'alimentation des vaches sous l'aspect "quantité" :

Alimentation des vaches : 45 kg par jour et par vache.

Pour 1 vache

<table>
<tr><th>en</th><th>1 jour</th><th>1 mois</th><th>6 mois</th></tr>
<tr><td>farine</td><td>2 kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ensilage de maïs</td><td rowspan="2">20 kg</td><td rowspan="2">kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
<tr><td>foin</td><td>3 kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ensilage d' herbe</td><td rowspan="2">20 kg</td><td rowspan="2">kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td></tr>
</table>

Pour 42 vaches

<table>
<tr><th>en</th><th>1 jour</th><th>1 mois</th><th>6 mois</th></tr>
<tr><td rowspan="2">farine</td><td rowspan="2">kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ensilage de maïs</td><td>kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td><td>t</td><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">foin</td><td rowspan="2">kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td><td>t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ensilage d' herbe</td><td>kg</td><td>kg</td><td>kg</td></tr>
<tr><td>t</td><td>t</td><td>t</td></tr>
</table>

On parle volume, masse, rapport de la masse du corps à la masse de nourriture par jour...

Nous n'avons pas le temps d'épuiser le sujet.

Seul l'aspect mathématique a été retenu dans ce bref compte rendu.

NOUVELLE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE

ROGERIE (ST-JUNIEN-Haute-Vienne)

En réponse à l'article de F. ROYOUX du PLOT n° 1, une présentation de la méthode d'enseignement des mathématiques par la voie expérimentale par un pionnier de la recherche pédagogique et le doyen de l'A.P.M.E.P.

Cette méthode donne la possibilité à chaque enseigné de construire un savoir mathématique à sa mesure qu'il comprend parfaitement et sait utiliser soit pour résoudre des problèmes nouveaux, soit pour l'insérer dans un savoir d'un niveau supérieur à l'aide de ses réflexions inductives portant sur le savoir déjà acquis par la méthode précitée.

Avant de présenter avec plus de précision cette méthode, il est intéressant de se reporter à l'article de F. ROYOUX*. Aux cours de ses réflexions très pertinentes sur les problèmes de compréhension des mathématiques, F. ROYOUX fait mention de trois méthodes principales de présentation du savoir mathématique :

a) la méthode d'induction guidée

b) celle de déduction programmée, et

c) la méthode de déduction.

Après avoir indiqué en quoi consiste chacune d'elles, il en apprécie l'efficacité par rapport aux exigences de l'enseignement des mathématiques.

A ce sujet, il se place aux points de vue suivants : solidité du savoir mémorisé, présence de la phase de synthèse et d'une théorie de l'exercice d'application, renforcement des procédés opératoires, maîtrise de l'obstacle linguistique, passage des mathématiques à la physique, transfert d'un apprentissage d'un domaine culturel à un autre, comparaison des réflexes donnés par une formation dans laquelle domine l'imitation et des réflexes donnés par une formation dans laquelle se manifeste la libre initiative de l'enseigné.

* *PLOT n° 1 page 5.*

Sur tous ces points, de grande importance, F. ROYOUX pense qu'il y a souvent insuffisance et même parfois carence des trois méthodes dont il fait mention. Il écrit "on le voit pour nous les exigences de l'enseignement des mathématiques sont multiples et la synthèse ne nous paraît totalement réalisée dans aucune méthode pédagogique actuellement utilisée".

La sévérité des critiques de F. ROYOUX à l'égard des trois méthodes actuellement les plus pratiquées pour présenter le savoir mathématique ne me paraissent nullement excessives. Bien au contraire. Il est en supplément d'autres exigences de cet enseignement auxquelles aucune des trois méthodes précitées ne satisfait :

Cet enseignement devrait en effet munir chaque enseigné :

1°/ de formes de connaissances à sa mesure qu'il sache utiliser soit pour résoudre les problèmes pratiques dont les solutions peuvent être déduites de ces formes, soit pour insérer ces formes dans d'autres d'un niveau supérieur, et

2°/ de méthodes de recherche de la solution de problèmes nouveaux.

Sur ces deux exigences, le pourcentage d'élèves chez qui elles ne sont pas satisfaites, déjà apparent au CE, va croissant avec la poursuite de la scolarité.

Ces deux exigences ne peuvent être satisfaites que par une nouvelle méthode d'enseignement qui serait d'abord expérimentale et inductive ensuite avant de pouvoir être déductive.

La méthode d'induction guidée marque à ce sujet un changement heureux souligné par F. ROYOUX. Cette méthode rompt, en partie, avec les méthodes traditionnelles trop exclusivement déductives et parfois dogmatiques. Elle introduit le phénomène induction comme facteur de l'acquisition du savoir mathématique. Mais la rupture reste incomplète et tardive. Dans le processus de la genèse naturelle chez l'enseigné des connaissances générales exprimées selon le symbolisme mathématique, la phase inductive de ce processus se situe au 4ème rang. La 3ème phase est celle de la résolution par la voie expérimentale effective, simulée ou seulement imaginée d'ensembles de problèmes de la même classe. Chacun de ces problèmes fournit une relation : celle qui permet de passer des données de chaque problème à sa réponse. Par ses réflexions inductives, le chercheur tire de l'ensemble des relations particulières fournies par les solutions des problèmes précités, une relation générale valable pour résoudre tous les problèmes de la classe considérée. La phase déductive du processus de genèse naturelle se situe donc au 5ème rang de ce processus.

La démarche qui constitue la génèse naturelle des connaissances générales n'est pas respectée dans la méthode d'induction guidée (du moins telle que cette méthode est présentée par F. ROYOUX).

L'activité inductive des enseignés par cette méthode, au lieu de porter sur des connaissances acquises par la voie expérimentale porte sur des formes de connaissances qu'ils ont acquises par des méthodes plus ou moins déductives ou même, en partie, par la voie dogmatique. De telles connaissances n'ont pas été construites et formulées librement par ces enseignés à partir de réalités expérimentales vécues par eux. En raison de leur mode d'acquisition, ces connaissances dans l'entendement des enseignés restent plus ou moins entièrement coupées de leur signification concrète.

Elles sont plus ou moins sans liaison suffisante, à la fois, avec les réalités expérimentales qu'elles représentent symboliquement avec les situations concrètes dont elles ont été primitivement tirées comme avec des situations analogues dans lesquelles elles trouveraient leurs applications.

Faute de cette liaison impliquant l'expérimentation vécue et la libre expression des résultats de cette expérimentation, le savoir mémorisé de l'enseigné instruit par la méthode d'induction guidée constitue pour lui un monde à peu prés clos : celui des symboles mathématiques.

La connaissance de ce monde lui permet bien de résoudre certains problèmes par des combinaisons linguistiques heureuses, mais dont il ignore au moins la totale signification dans le domaine du sensible. Cette ignorance au moins partielle rend impossible à la fois la complète compréhension de ce savoir et son utilisation dans tous les domaines dans lesquels elle peut l'être.

En définitive, si l'on se place dans l'optique de la nécessité d'une liaison établie dans l'entendement de l'enseigné entre son savoir et la signification de ce savoir dans le domaine du concret, la méthode d'induction guidée ne satisfait pas suffisamment à cette exigence de l'enseignement des mathématiques.

Cette exigence cependant est d'une importance capitale puisque sans cette liaison le savoir mémorisé de l'enseigné ne peut être qu'imparfaitement compris et appliqué, à des fins pratiques. Sans compter que son apprentissage apparaît particulièrement rebutant.

Pour ce qui concerne les deux autres méthodes de présentation du savoir mathématique dont fait mention F. ROYOUX :

- celle de déduction classique et
- celle de déduction programmée

la liaison précitée est encore plus mal assurée. Seuls les problèmes résolus par la méthode expérimentale permettent d'établir à coup sûr la liaison relative aux domaines du concret dans lesquels ces problèmes ont été pris. Avec les trois méthodes précitées pour un pourcentage d'élèves qui va croissant avec la poursuite de leurs études, aucune liaison totale ne s'établit. Dans certaines classes de 4ème et de 3ème, au moment où les nouveaux programmes y ont été appliqués selon les méthodes traditionnelles ce pourcentage, d'après les maîtres de ces classes voisinait le 95 %.

Parmi l'ensemble des enseignés chez qui cette liaison est absente, il est possible de distinguer plusieurs sous-ensembles non disjoints d'enseignés :

a) le sous-ensemble de ceux qui ont refusé les formes de connaissances générales qui leur sont présentées les trouvant incompréhensibles, sans signification

b) celui des enseignés qui ont opposé à cette présentation des réactions d'ennui, de découragement et même d'hostilité.

c) le sous-ensemble de ceux qui ne sont pas parvenus à mémoriser le savoir qui leur a été présenté et

d) le sous-ensemble de ceux qui les ayant mémorisées sont incapables de les utiliser.

Face à tant d'échecs, un changement des programmes ne saurait suffire. Les changements de programmes qui se sont multipliés ces dernières décennies en sont la preuve. Il faut procéder à un changement des méthodes actuellement pratiquées.

Il faut avoir recours à celles qui établissent dans l'entendement de chaque enseigné une liaison durable entre le savoir mémorisé d'une part et d'autre part les réalités expérimentales que ce savoir représente symboliquement, ainsi qu'avec les situations concrètes dans lesquelles ce savoir peut être puisé ou appliqué.

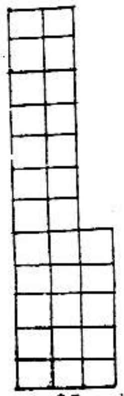
Cette liaison doit être à double effet. Par le premier effet, le savoir doit ramener à la mémoire de l'enseigné à la fois les réalités expérimentales et les situations concrètes précitées. Par le deuxième effet réciproquement le contact de l'enseigné avec ces situations doit ramener à sa mémoire le savoir qui s'y rapporte.

Par ces deux effets, ce savoir d'une part se conserve et tend même à s'enrichir, d'autre part il est correctement utilisé soit pour résoudre par des réflexions déductives de nouveaux problèmes soit en s'insérant dans un savoir d'un niveau supérieur par des réflexions inductives.

Une longue expérimentation entreprise vers 1925 poursuivie jusqu'à ce jour, ayant portée sur des sujets d'âges, de potentialités et de niveaux culturels très différents et sur moi-même m'a donné la quasi certitude que la liaison plus haut mentionnée s'établit d'elle même lorsque le sujet construit et formule lui-même son savoir mathématique à partir de connaissances fournies par la résolution des problèmes par la voie des manipulations raisonnées portant sur un matériel adéquat.

Ces manipulations sont d'abord tâtonnées. C'est ainsi que pour obtenir la longueur du côté du carré dont l'aire vaut 25 cm^2, le débutant prendra 25 cm^2 (fig. 1) portés chacun par l'une des faces d'un cm^3 et les agencera de façon à former une plaque carrée (fig. 2).

Les réflexions faites au cours de ces tâtonnements ont pour objet d'orienter les manipulations vers l'obtention de la plaque carrée.



25
fig. 1

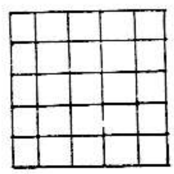


fig. 2

Ces tâtonnements sont constitués par une suite de réflexions et de manipulations enchevêtrées. Dans cette suite chaque manipulation suggère une réflexion concernant la manipulation à effectuer pour progresser vers le but visé. La validité de cette réflexion est infirmée ou confirmée expérimentalement par une nouvelle manipulation. Il s'agit donc bien d'un ensemble de manipulations et de réflexions associées qui constitue une démarche orientée vers un but précis. Cette démarche est une manifestation de l'activité de raisonnement. Les raisonnements tenus ne sont ni d'ordre inductif, ni d'ordre déductif car ils ne font passer celui qui les tient ni d'un niveau d'abstraction inférieur à un niveau supérieur ni d'un niveau supérieur à un niveau inférieur. On peut les désigner par raisonnements expérimentaux. Comme l'argumentation qu'ils permettent de soutenir ne saurait exister sans les tâtonnements qui accompagnent ces formes de l'activité de raisonnement, on peut lier à ce mode d'activité intellectuelle la notion d'assistance. Nous dirons donc dans cette première phase de la recherche de la solution d'un problème par la voie expérimentale, qu'il s'agit d'un raisonnement expérimental assisté par des manipulations tâtonnées.

La solution du problème de la détermination du côté d'un carré formé avec 25 cm^2 est une solution concrète. Son exactitude est fonction de celle du matériel employée. La réponse du problème envisagé est donnée par la mesure du côté de la plaque carrée représentée par la figure 2. On saura bien par cette mesure que ce côté vaut aux environs de 5 cm ; mais il sera difficile de choisir entre deux limites telles que 4,9 et 5,1 cm. La certitude que la longueur du côté du carré formé avec 25 cm^2 est bien 5 cm sera donnée par la deuxième phase du processus de genèse commence avec les tâtonnements. Ce processus à son terme doit aboutir :

- d'une part à la règle classique d'extration de la racine carrée d'un nombre
- et d'autre part aux notions de nombre carré parfait et de nombres irrationnels.

Il s'agit donc d'un processus qui pour être parcouru par chaque enseigné selon la méthode d'enseignement des mathématiques par la voie expérimentale exige plusieurs années scolaires. Il en est de même des autres processus. Leurs premières phases sont du domaine du C.P. et même parfois de celui des écoles maternelles. Leurs dernières phases sont atteintes seulement au niveau de la 3ème. Cette caractéristique de la méthode d'enseignement des mathématiques par la voie expérimentale permet de mettre fin aux divers cloisonnements qui séparent actuellement les différentes classes d'un même établissement ainsi que le primaire du 2ème degré.

Nous avons vu que par l'expérimentation tâtonnée on aboutit nécessairement à une solution concrète qui permet seulement une réponse approchée(mesure de la longueur du côté du carré construit - fig.2). La réponse mathématique correspondant à 25 cm^2 idéalement réalisés et mis en place par des manipulations méthodiques est donnée par la description de l'évènement mathématique qui serait obtenue par ces manipulations méthodiques portant sur les 25 cm^2 précités.

Quant aux manipulations méthodiques le chercheur parvient à les trouver par la répétition des manipulations tâtonnées. Elles sont constituées par un cheminement raisonné parfaitement déterminé et mémorisé par l'enseigné. C'est la description de ce cheminement raisonnée qui constitue la solution mathématique du problème cherché. La description de l'évènement mathématique réalisé par le cheminement raisonné tiré des manipulations méthodiques n'est pas formulé dans le langage du mathématicien. Il l'est dans le langage courant assorti de nombres naturels et précisé par un graphisme si c'est nécessaire.

Ce mode de langage, dans la méthode d'enseignement des mathématiques par la voie expérimentale constitue la forme de départ du langage opératoire de l'enseigné qui le modifiera librement en y incorporant les autres catégories de nombres et en réduisant la place occupée par les termes du langage usuel. Ainsi se trouvera surmonté l'obstacle du langage signalé par F. ROYOUX.

Cette méthode d'enseignement reste inchangée quelle que soit la discipline expérimentale ou la technique pratique qui lui fournit les les problèmes à résoudre. Dans tous les cas la recherche de la solution de tout problème nouveau peut donner lieu au même processus de manipulation et de réflexions enchevétrées.

A ce point de vue cette méthode s'inscrit comme un élément d'une pédagogie de la transdisciplinarité.

Son mérite essentiel est comme je l'ai déjà dit qu'elle munit chaque enseigné à la fois :

a) de formes de connaissance à sa mesure qu'il sait utiliser : soit pour résoudre les problèmes dont les solutions peuvent être déduites de ces connaissances, soit pour insérer ces formes dans d'autres d'un niveau supérieur et qu'il saura également utiliser de la même façon et

b) de techniques expérimentales qui lui donneront la possibilité de rechercher la solution de problèmes nouveaux et d'accroître son savoir par lui-même.

Par cette possibilité la méthode en question devient un élément non seulement d'une pédagogie pour la formation initiale mais aussi pour la formation continue.

PASCAL ET LA PREMIERE PROCEDURE RECURSIVE

par M. CAUSSE
(Lycée de SAINTES)

On connaît la correspondance de Pascal à Fermat au sujet du célèbre PROBLEME des PARTIS : soit A une somme à partager entre deux joueurs avec la règle suivante : dès que l'un d'eux a gagné N coups, il emporte toute la mise. Comment partager cette mise proportionnellement à la probabilité qu'ont respectivement les joueurs X et Y, s'ils ont respectivement gagné x et y parties - x et y respectivement inférieurs à N.

Ce problème est de grande valeur épistémologique. Pour la première fois, on y voit mettre en oeuvre les règles d'une MESURE de la probabilité. Qu'on rattache cette notion, d'une part aux spéculations des Jésuites sur la probabilité du Salut, dans les "Provinciales", d'autre part à celles de Pascal lui-même dans son célèbre pari : celui-ci, en quelque sorte, rattache l'"espérance du salut" à une <u>espérance mathématique</u>, non nulle pour les croyants... Nous avons donc ici un bel exemple, parmi d'autres, de découverte scientifique dont l'origine se rattache aux réflexions métaphysiques de l'inventeur.

La découverte des procédures récursives, en tant qu'elles généralisent le raisonnement par récurrence, permet d'analyser avec plus de précision qu'autrefois ce qui a pu faire l'objet de la controverse entre Pascal et Fermat. Il y apparaît même que, contrairement à une opinion répandue, Fermat s'était trompé. Il s'était trompé sur le problème à trois joueurs, puis s'est corrigé, jusqu'à retrouver les résultats numériques de Pascal.

La solution de Pascal est d'une extrême simplicité : soient x,y, les acquis respectifs des joueurs. Au coup suivant, on peut avoir soit (x+1 , y), soit (x , y+1), avec des chances égales si le jeu est équitable. La probabilité qu'a X de gagner est donc également répartie : la moitié de la probabilité relative à (x+1 , y) s'il gagne, plus la moitié de la probabilité relative à (x , y+1) s'il perd.
Si l'on renouvelle les coups, l'un des acquis atteint nécessairement la valeur N, et le calcul se fait de proche en proche :

$$P(N,y) = A$$
$$P(x,N) = 0$$
$$\text{Si } (N-x)(N-y) \neq 0 \quad P(x,y) = 1/2.(P(x+1\ ,\ y) + P(x\ ,\ y+1))$$

C'est la définition d'une procédure récursive ; elle s'étend immédiatement au cas de trois joueurs, et davantage :

$$P(N,y,z) = A.$$
$$P(x,N,z) = P(x,y,N) = 0$$

Si $(N-x)(N-y)(N-z) \neq 0$:

$$P(x,y,z) = 1/3 \, . \, (P(x+1,y,z) + P(x,y+1,z) + P(x,y,z+1))$$

La réalisation est très simple sur un ordinateur à langage récursif, LSE par exemple :

```
1*REGLE DES PARTIS DE PASCAL POUR 3 JOUEURS
2 PROCEDURE &P(A,B,C) LOCAL C,B,A
3 SI (3-A)=0 ALORS RESULTAT 27 SINON ALLER EN 4
4 SI (3-B)=0 ALORS RESULTAT 0 SINON ALLER EN 5
5 SI (3-C)=0 ALORS RESULTAT 0 SINON ALLER EN 6
6 RESULTAT (&P(A+1,B,C)+&P(A,B+1,C)+&P(A,B,C+1))/3
8 LIRE X,Y,Z
10 D←&P(X,Y,Z);E←&P(Y,Z,X);F←&P(Z,X,Y)
12 AFFICHER D
13 AFFICHER E
14 AFFICHER F
15 TERMINER
```

On vérifie bien, pour $A = 27$, $x = 2$, $y = z = 1$, la répartition 17,5,5 donnée par Pascal dans sa lettre à Fermat du 24 Août 1624.

Ce qu'était la solution de Fermat, on peut le conjecturer d'après ce qu'en dit Pascal :

"J'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon ; mais que s'il y a plus de deux joueurs, il n'est pas toujours juste..."

On peut en effet donner la formule suivante, pour le joueur x :

a) $P_N(x,y) = P_{N-y}(x-y\ ,\ 0)$ (X a l'anvantage sur Y)

b) $$P_N(x,0) = \frac{1}{2^{N-x}} + \frac{1}{2}\,\frac{C_{N-x}^{N-x-1}}{2^{N-x}} + \frac{1}{2}\,\frac{C_{N-x+1}^{N-x-1}}{2^{N-x+1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\,\frac{C_{2N-x-2}^{N-x-1}}{2^{2N-x-2}}$$

Que Fermat se soit rendu aux raisons de Pascal résulte de la lettre suivante de Pascal, du 27 Octobre 1654 :

"Votre lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que le l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie".

"Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin ; je ne suis capable que de les admirer..."

On pourra essayer de donner une formule résolue pour $P(x,y,z)$... Il n'est déjà pas facile de construire un programme itératif sur calculateur programmable sans piles de mémoires et langage récursif pour le parti entre deux joueurs - ou, ce qui est équivalent, pour le calcul des combinaisons $C(n,p)$ par la formule du triangle arithmétique $C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1)$.

Or Pascal a eu parfaitement conscience de la supériorité de sa méthode : (du 24 Août)

"...Je ne me fondais pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle à qui rien n'échappe, et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons".

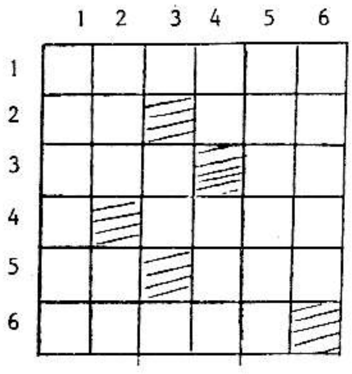
Il est aisé de voir en quel point exact se situe la différence des deux points de vue. Si l'on applique la formule de récurrence du triangle arithmétique à une fonction $f(x,y) = f(x-1,y) + f(x-1,y-1)$, il est clair que $f(x,y)$ est le tronc initial d'une arborescence, chaque noeud donnant naissance à deux branches. Il suffit de comparer à l'arborescence qui donne, en binaire, la génération des réels de l'intervalle $[0,1[$, pour voir que l'ensemble des f à considérer n'est pas dénombrable. Lorsque, dans un cas particulier, il existe une règle arrêtant automatiquement l'arborescence ; l'ensemble des f sera fini et par conséquent dénombrable ; il ne s'ensuit pas pour autant que la définition d'un ordre de dénombrement soit facile.

A vrai dire, nous ne sommes pas sûr que nos observations soient originales. Ce ne peut être en effet sans raisons qu'a été dénommé "Langage Pascal" un perfectionnement du langage Algol 60. Quoi qu'il en soit, Pascal est bien l'inventeur de la première procédure récursive, et a compris la puissance de la méthode.

NOMBRES CROISES - LABROUSSE (LIMOGES - Haute-Vienne)

/ PROBLEME N° 1 /

(Peut se faire en 4e ou en 5e)



Horizontalement

1) Période de l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$ (ou quotient de la division euclidienne de 10^6 par 7)
2) Département alsacien - ppcm de (12 et 122)
3) Qu'on le lise dans les deux sens, on trouve toujours un carré - a en base a.
4) Descartes fêtait ses 44 ans cette année là.
5) Multiple de 9 - C'est le dernier département métropolitain écrit en base cinq
6) en base deux : 111 x 11

Verticalement

1) Puissance de 11
2) Se lit de haut en bas ou de bas en haut, est un carré et est pair - An sans importance (ou nombre de voleurs d'un conte connu)
3) nombre premier
4) Sur de nombreuses plaques à Limoges - Période de l'écriture décimale de $\frac{7}{111}$
5) Puissance douzième
6) Code postal en vigueur au Mans.

La solution sera publiée dans le prochain numéro. Vous pouvez écrire à l'auteur à l'I.R.E.M. de LIMOGES, et, bien sûr, envoyer au PLOT vos grilles personnelles.

COMMENTAIRES SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SÉRIE D - ORLÉANS 1976

J. AUGRAS

Dans l'ensemble, le niveau de l'épreuve me semble bien adapté à une Terminale D, mais selon la tendance actuelle (regrettable) le sujet est sans doute un peu long, les candidats lents ou méticuleux ayant probablement eu beaucoup de mal à terminer.

Par ailleurs, le sujet lui-même (choix et libellé des questions) amène un certain nombre de remarques.

EXERCICE 1

On considère les deux nombres complexes

$$z = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{1-z},$$

α étant un nombre réel donné.

1. **Pour quelles valeurs de α le nombre z est-il défini ?**
   Pour quelles valeurs de α le nombre w est-il défini ?
2. **Calculer le module et l'argument de z et de w lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$; lorsque $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.**

Placer sur une figure les points z et w.

3. **Calculer en fonction de α le module et l'argument de z et w lorsque**
$$\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$
4. **Calculer en fonction de α le module et l'argument de z et w lorsque**
$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[.$$

A mon avis le nombre de réponses demandées est beaucoup trop élevé : a : 2 réponses ; b : 12 réponses ; c : 4 réponses ; d : 4 réponses. Ce qui fait au total 22 réponses à fournir (certaines presque immédiates cependant) on en arrive pour le candidat à une dispersion de l'attention et une lassitude avant d'aborder les questions "intéressantes" (soit les c) et d)) et pour l'examinateur à une impossibilité de tout juger.

N'aurait-il pas été préférable :

- soit de ne pas introduire le complexe W (seulement ... 11 répones)
- soit de se borner à $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,\pi\right[$ (donc élimination de α dans le b) et le c).

De plus que penser des "points z et w" ? alors que nous exigeons de nos élèves la locution "point d'affixe z". Cette sous-question ne présentait guère d'intérêt et a semble-t-il été ajoutée au texte initial. Pourquoi ?

EXERCICE II

Dans un sac, on place trois boules noires portant respectivement les nombres 1 , 2 , 2 et cinq boules blanches portant respectivement les nombres 1 , 1 , 1 , 2 , 2 . On tire trois boules simultanément. Les tirages sont supposés équiprobables.

1. A chaque tirage, on fait correspondre le nombre de boules noires tirées. On définit ainsi une variable aléatoire X. Quelles sont les valeurs prises par X ? Etudier sa loi de probabilité. Calculer son espérance mathématique.

2. A chaque tirage, on fait correspondre la somme des nombres inscrits sur les trois boules tirées. On définit ainsi une variable aléatoire Y . Quelles sont les valeurs prises par Y ? Etudier sa loi de probabilité. Calculer son espérance mathématique.

Problème :

A — On considère la fonction numérique f à variable réelle strictement positive définie par

$$f(x) = -x^2 - \text{Log}\, x \ .$$

Log désigne la fonction logarithme népérien.

Encore des tirages de boules ! C'est banal, mais cela vaut beaubeaucoup mieux que certains exercices faussement concrets rencontrés dans les annales. L'expression "variable aléatoire" a décidément la vie dure ; quand se décidera-t-on à abandonner ce vocable, et à adopter "aléa numérique" ou.... ?

PROBLEME

1. Etudier les variations de cette fonction.
2. Construire sa représentation graphique (C).
3. Démontrer que f s'annule pour une et une seule valeur, appelée a . On ne cherchera pas à calculer a mais on démontrera que $\frac{1}{2} < a < 1$.
4. En déduire le signe de f(x) .

B — Un mobile M a pour coordonnées

$$x = \frac{e^t}{2} \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{e^{2t}}{4} - t + \text{Log}\, 2 \quad , \text{ (où } t \in \mathbb{R}) \ .$$

1. Démontrer que la trajectoire de M est la courbe (C) .
2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération à la date t .
3. A quelle date le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont-ils la même direction ?

C — On considère la fonction numérique g à variable réelle strictement positive définie par

$$g(x) = 1 - x + \frac{1 + \text{Log}\, x}{x} \ .$$

1. Etudier les variations de cette fonction. (On sera amené à utiliser les résultats de A - 3. et 4.).
2. Démontrer que sa représentation graphique, appelée (C'), a une asymptote oblique d'équation $y = 1 - x$. Préciser la position de (C') par rapport à cette asymptote.
3. Construire avec soin (C') dans un repère orthonormé (unité: 2 cm). On précisera en particulier les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 1 . ainsi que le point commun à (C') et à son asymptote oblique.
4. Calculer l'aire de la surface plane délimitée par (C') et les droites d'équation $y = 1 - x$ et $x = 1$.

1ère partie

La question "étudier les variations de f" que l'on trouve dans la plupart des énoncés ne semble pas ressentie de la même façon par tous les candidats, et sans doute par leurs professeurs. Que doit-on exiger comme réponse à une telle question :

1. Domaine de définition
2. Etude de la continuité
3. Etude aux bornes
4. Sens de variation et tableau de variation
5. Etude des branches infinies, recherche et d'asymptotes
6. Recherche des points d'inflexion ?

Les points 1. 3. 4. sont étudiés par tous ; 2. et 5. par une bonne moitié ; 6 par un nombre non négligeable...
Un candidat ayant seulement démontré que f est décroissante sur R_+^* a-t-il répondu à la question ? (il a étudié le sens de variation mais peut-être pas "les variations").

Il suffirait de convenir une fois pour toutes ce qui se cache sous le vocable "étude des variations de f", que je propose de remplacer par "étude de la fonction f" ; par l'exemple l'étude des points 1. 2. 3. 4. me paraît raisonnable.

Les questions c) et d) n'ont été traitées correctement que par un nombre infime de candidats ; ceux-ci n'ont dans l'ensemble pas pensé à utiliser les théorèmes se déduisant de la continuité, ou ont très vite passé à la suite du problème pour tenter "d'aller au bout"...

2ème partie

Pouvait être supprimée sans nuire à l'ensemble du problème.

3ème partie

a) Pour éviter au candidat consciencieux de perdre un temps précieux peut-être aurait-on dû ajouter : on ne cherchera pas à calculer g(a)

b) La question : préciser la position de (C') par rapport à son asymptote peut être interprétée de deux façons :

1. Position lorsque $x \to +\infty$ (c'est mon interprétation et celle de beaucoup de candidats en raison du mot asymptote)

2. Position lorsque $x \in \left]0, +\infty\right[$ (il fallait alors distinguer $x < \frac{1}{2}$ et $x > \frac{1}{2}$). Dans ce cas la question aurait pu être rédigée ainsi : position de (C') et de la droite d'équation $y = 1 - x$

c) Construire "avec soin" : pourquoi du soin pour cette courbe et pas pour la précédente ? Est-ce synonyme de : "avec précision" ? auquel cas l'imprécision concernant $g(\alpha)$ rend cette précision difficile à réaliser ...

d) La surface plane est-elle celle dont les points ont une abscisse x telle que : 1. $\frac{1}{e} < x < 1$

ou 2. $x > 1$?

Le Les candidats ayant abordé la question ont choisi la première interprétation (peut-être parce que le calcul de l'aire était plus facile...)
Dans le 2è cas, l'aire était infinie (on pouvait le prouver en introduisant $x = \alpha$ et et en faisant tendre α vers l'infini).
Pour éviter cette anbiguïté, pouvait-on parler de "la surface plane fermée" ?

Attention!

Les prochaines Journées Nationales auront lieu
, à LIMOGES
, les 23, 24, 25 SEPTEMBRE 1976
sur le thème :
"Education Permanente et Mathématiques"

Des groupes de travail sont prévus autour des trois grandes rubriques :
- la formation continue des adultes non-enseignants
- la formation permanente des enseignants
- les retombées éventuelles sur la formation initiale.

La Régionale de LIMOGES attend avec impatience vos idées pour créer des groupes précis et vos propositions pour les animer.