AVALANCHES DE SIGNES + EN 1977

par le Groupe du Clain
(POITIERS - Vienne)

L'un de ses éléments a pu noter les réflexions d'un autre élément inspiré par la résolution d'un exercice d'Olympiade mathématique...

Niveau : de la sixième aux classes terminales.

A - OBJECTIF :

Cette fiche, construite à partir d'un problème donné à des olympiades d'U.R.S.S. en 1965, présente au début quelques exercices classiques et faciles de calcul numérique ; puis elle montre les hésitations - sinon le désarroi - que l'on peut avoir devant un problème ; enfin la solution du problème est donnée, d'abord en utilisant des procédés de calcul un peu laborieux, puis en utilisant un "outil" plus puissant : la juxtaposition de ces deux solutions devrait inciter le lecteur qui ne possèderait pas cet "outil" à l'acquérir très vite.

Méthode conseillée : Chercher le problème. A défaut chercher les exercices partiels. Ne regarder les solutions qu'après avoir cherché suffisamment.

B - ENONCE DU PROBLEME

Tous les entiers naturels de 1 à 100 sont écrits l'un à la suite de l'autre : 1234.....9899100. On met ensuite le signe + entre certains chiffres.

Démontrer que le nombre ainsi obtenu n'est pas divisible par 1965.

On peut remplacer 1965 par 1977.

C - DEVELOPPEMENT

Dans tout ce qui suit, les nombres seront des entiers positifs ou nuls.

I - QUELQUES CALCULS SIMPLES

1) Notation

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les nombres obtenus par le procédé de construction de l'énoncé.

Posons $S_1 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11 \ldots\ldots 98\ 99\ 100$

$S_2 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\ldots\ldots+98+99+100$

$S_3 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+1+2+\ldots\ldots+9+8+9+9+1+0+0$

$S_1 \in \mathcal{S}$ (par convention) ; $S_2 \in \mathcal{S}$; $S_3 \in \mathcal{S}$

2) Exercices à partir de S_1 :

1 - Combien de chiffres comporte S_1 ? (éventuellement voir §4)

2 - Trouver n tel que $10^n < S_1 < 10^{n+1}$

3 - Trouver n' tel que $10^{n'}$ soit une "bonne" valeur approchée de $8\ S_1$
Calculer une marge d'incertitude relative sur $8\ S_1$

3) Exercices à partir de S_2 :

Calculer S_2

1 - Première méthode

Ecrivons $S_2 = 1+2+3+4+\ldots\ldots+98+99+100$

et $S_2 = 100+99+98+97+\ldots\ldots+3+2+1$

soit $2\ S_2 = 101+101+101+101+\ldots\ldots+101+101+101$

$2\ S_2 = 101\ .\ 101$ $\qquad S_1 = 5050$

2 - Deuxième méthode

$S_2 = 1+2+3+\ldots\ldots 50+51 \ldots\ldots 98+99+100$

$S_2 = (1+100) + (2+99) + (3+98) + \ldots\ldots + (50+51)$

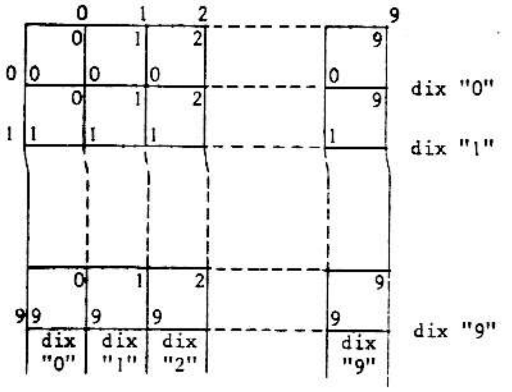
$S_2 = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots + 101$

$S_2 = 101 \times 50$ $\qquad S_2 = 5050$

3 - Application de l'identité $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 100$

4 - Eventuellement utiliser le tableau du §4.

4) Exercices à partir de S_3 :



1 - Soit le tableau ci-contre

Soit $\mathcal{A}$ la somme de tous les chiffres contenus dans le cadre en traits forts.

Montrer que $S_3 = \mathcal{A} + 1$

Il y a 20 zéros, 20 "1", ... , 20 "9"

donc $\mathcal{A} = 20(0+1+2)\ldots\ldots+9) = 900$

$S_3 = 901$

2 - **Remarque** : le tableau ci-dessus permet de trouver également S_2

Les chiffres inférieurs gauches dans chaque carreau correspondent aux dizaines des termes de S_2, les chiffres supérieurs gauches aux unités des termes de S_2, le dernier terme 100 exclu

d'où $S_2 = 10 \quad 10(0+1+2.....+9) + 10(0+1+2.....+9) + 100 = 5050.$

II - RECHERCHE DE LA SOLUTION DU PROBLEME

1) Un essai malheureux

Ce problème paraît compliqué et ardu. Des signes + "parsemés au hasard" et une somme pas forcément facile à calculer, cela n'inspire pas confiance.

Prenons un cas particulier, par exemple :

$S = 12+3456+7+8910111+213+1+415+1617........9697+989+9100$

Vraiment comment poursuivre ? Abandonnons cette vue.

2) Une nouvelle piste peu sûre :

On nous parle de 1965. Bien sûr, c'est l'année où l'exercice a été posé : ce n'est sans doute pas un renseignement très utile !

Mettons des signes + "au hasard" dans 1965

$1 + 9 + 65 = 75$, hum ! ou $1 + 9 + 6 + 5 = 21$, guère mieux !
ou $196 + 5 = 201$, vraiment non !

3) Une nouvelle tentative :

On peut décomposer 1965 en facteurs premiers $1965 = 3 \times 5 \times 131$.

1965 est un multiple de 5, c'est évident.

1965 est un multiple de 3, la somme des chiffres est divisible par 3. La somme des chiffres, tiens ! Voilà une idée. Pour S_1 ne fait-on pas des additions ! D'ailleurs la piste précédente conduisait aussi aux nombres 75, 21, 201 divisibles par 3.

4) En avant :

Et si on utilisait la même idée pour S ?

1 - On sait qu'un nombre est un multiple de 3 augmenté de la somme de ses chiffres :

Exemples : ∘ $10 = 3 \times 3 + 1$ $\qquad 100 = 99 + 1 = 3 \times 33 + 1$

Et plus généralement $10^n = \underbrace{99.....9}_{n\text{"}9\text{"}} + 1 = 3 \times 33...3 + 1$

∘ $7.10^n = 7 \times (3 \times 33...3 + 1) = 3(7 \times 33...3) + 7$

∘ $1975 = 1000 + 900 + 70 + 5 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 5.1$

$= 1 \times (3 \times 333 + 1) + 9 \times (3 \times 333 + 1) + 7 \times (3 \times 3 + 1) + 5.1$

$= 3 K + 1 + 9 + 7 + 5$

avec $K = ...$

∘ On généralise ce résultat par un nombre s'écrivant avec les chiffres $a_n, a_{n-1}, ..., a_o$ que l'on écrira symboliquement $\overline{a_n \; a_{n-1} \; ... \; a \; a_o}$

$$\overline{a_n \, a_{n-1} \, ... \, a_1 \, a_o} = a_n 10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 = a_o.1$$

$$= 3 K + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o$$

avec $K = ...$

2 - La somme de plusieurs nombres est un multiple de 3 augmenté de la somme de tous les chiffres

Exemple . $1975 = 3K + 1 + 9 + 7 + 5 = 3K + 22$

$502 = 3K' + 5 + 0 + 2 \quad = 3K' + 7$

donc $1975 + 502 = 3(K + K') + 1 + 9 + 7 + 5 + 5 + 0 + 2$

$= 3K'' + 29$

. On généralise ce résultat (voir généralisation §1 ci-dessus)

3 - En conséquence : Soit S un nombre de l'ensemble $\mathcal{S}$, S est un multiple de 3 augmenté de la somme de tous les chiffres.

Donc il existe un nombre H tel que

$S = 3H + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 0 + \ldots + 9 + 8 + 9 + 9 + 1 + 0 + 0$

Soit $S = 3H + S_3$

$S = 3H + 901$

Naturellement on ne peut préciser H dans le cas général.

On peut finalement écrire $S = 3H + 900 + 1$

$S = 3K + 1$ **avec** $K = H + 300$

Dans tous les cas S est un multiple de 3 augmenté de 1

4 - Supposons que S soit divisible par 1965.

Rappelons que $1965 = 3 \times 655$. On aurait : $S = k \times (3 \times 365) = 3 \times k'$

Mais d'après la propriété précédente $S = 3K + 1$

Donc on pourrait écrire $3K + 1 = 3k'$ ou encore $1 = 3(k' - K)$

On arrive à une contradiction manifeste.

Donc S n'est pas divisible par 1965.

5) Solution plus rapide

Ci-dessus, on a "travaillé" avec les multiples de 3. Utilisons les congruences modulo 3.

1 - Soit S un nombre quelconque de $\mathcal{S}$.

$S \equiv S_3$ (modulo 3) avec $S_3 = 901$

$S_3 \equiv 1$ (modulo 3)

donc $S \equiv 1$ (modulo 3)

de plus $1965 \equiv (1+9+6+5)$ (modulo 3)

$1965 \equiv 0$

2 - Si S était un multiple de 1965, on aurait $S \equiv 0$ (modulo 3)

Il y a contradiction avec $S \equiv 1$ (modulo 3)

3 - Donc S n'est pas divisible par 1965

D - REMARQUES

1) On peut actualiser le problème avec un millésime plus récent divisible par 3, par exemple 1974, 1977.

2) On peut se contenter d'une liste S_1 plus courte de nombres entiers à condition que S_1 ne soit pas multiple de 3. Par exemple S_1 = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13.

3) Exercice

Quel est le plus petit nombre de $\mathcal{S}$? Le plus grand nombre de $\mathcal{S}$?