

DÉCOUVERTE DES LOIS DU HASARD A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

par Joël BRIAND

(équipe «école élémentaire» IREM de BORDEAUX)

Un "briant" exposé le 28 janvier 1976 à Angoulême relatait une expérience d'initiation aux Probabilités conduite dans une classe de cours moyen par l'équipe "enseignement des mathématiques à l'école élémentaire" de l'IREM de Bordeaux animée par Guy BROUSSEAU.

I - INTRODUCTION

A - 1) Le processus d'apprentissage étudié ressemble à la méthode de redécouverte, mais on tente de réaliser en fait la méthode par adaptation.

Une bouteille opaque permet de faire très rapidement des tirages avec remise. Les enfants connaissent le nombre total des billes de la bouteille (5). Il s'agit d'abord de décider quel contenu de la bouteille on retient pour expliquer et prévoir les tirages, ensuite élaborer une méthode (un algorithme) pour décider du contenu d'une bouteille quelconque. Après une ou deux vérifications, les enfants construisent leur conviction et tentent d'emporter celle de leurs camarades par des preuves intellectuelles.

D'emblée, ils élaborent, puis valident des algorithmes divers, construisent les principales notions de probabilités et de statistiques, non pas indépendamment les une des autres, mais associées en modèles. Très vite, ils comprennent le sens du test d'hypothèses.

2) La plupart des projets actuellement à l'étude envisagent l'apprentissage suivant des schémas classiques : entre 6 et 12 ans, l'enfant est systématiquement mis en présence de situations aléatoires, invité à l'emploi d'un vocabulaire spécial, entraîné à des dénombrements et à l'analyse combinatoire, habitué à des descriptions statistiques. Ces petits morceaux de "savoir" seront censés se recoller le moment venu pour s'organiser en une théorie mathématique formelle, voire axiomatisée. L'habitude, l'imprégnation progressive est supposée capable de donner du sens à toutes ces activités.

La signification profonde des concepts et des méthodes, leur justification, leur fondement théorique et expérimental n'apparaîtront qu'à la fin des études, dans le cadre de réflexions, non nécessairement mathématiques, comme un complément culturel réservé au plus curieux.

3) Un apprentissage par adaptation à propos de ces mêmes concepts implique au contraire que l'on pose aux enfants un problème à résoudre, suffisamment global pour que le but et le sens de l'action soit le guide de la mathématisation en cours. Les rôles réciproques des probabilités et des statistiques apparaissent de façon correcte dans une réponse de l'enfant à un problème épistémologique complet. Les étapes de l'apprentissage sont alors des reprises successives de la situation avec des niveaux de compréhension, de formulation et de formalisation de plus en plus élevés et efficaces.

B - a) Cette tâche paraît bien difficile pour des enfants de cet âge, mais elle s'éclaire au fur et à mesure qu'ils progressent dans trois directions :

- * Décrire et analyser des résultats d'expériences : (tirages, suites de tirages) à l'aide de statistiques : fréquence d'apparition d'une boule noire, mode, moyenne...

- * Distinguer les événements qui peuvent se produire dans une expérience et fabriquer un système pour prévoir leur apparition.

- * Emettre des hypothèses sur le contenu d'une bouteille qu'il observe.

L'enfant établit des liaisons convenables entre les éléments de statistiques, de probabilités, et les hypothèses qu'il conçoit. Ces liaisons constituent le modèle probabiliste.

b) Le processus :

L'enfant est conduit à construire des modèles de plus en plus satisfaisants qui relient et expliquent de façon de plus en plus précise un plus grand nombre de faits.

Le processus consiste en une confrontation de ces 3 sortes d'approche à travers les expériences, les prévisions et les modèles.

Cette confrontation permet :

- * Une relance constante de l'activité des enfants. Exemple : pour expliquer des résultats statistiques, les enfants émettent une hypothèse sur le contenu de la bouteille à laquelle ils rattachent certaines prévisions qu'ils essaient de vérifier par une expérience nouvelle.

- * De comprendre que finalement, ce n'est pas découvrir la composition de la bouteille qui compte mais plutôt trouver un moyen d'être convaincu qu'il s'agit de telle ou de telle composition.

C'est pour cela, que passées les deux premières leçons, les enfants ne devront plus ouvrir les bouteilles pour vérifier.

Plus tard, l'enfant est amené à se préoccuper du risque qu'il prend lorsqu'il décide de telle composition. En effet, on ne peut dissocier une prévision de sa probabilité de réalisation.

c) Rapports avec la formation mathématique des enfants :

Pour valider leurs prédictions, les enfants choisissent certains outils mathématiques qui correspondent au modèle probabilités qu'ils envisagent.

Tout au long de cette série de leçons, les outils suivants ont été utilisés :

- * De très nombreux calculs (additions, divisions, etc...)
- * Les décimaux,
- * Les intervalles;
- * Les représentations graphiques,
- * Les fonctions linéaires (proportionalité).

II - LE DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION

A - PRISE DE CONTACT AVEC LE HASARD

Les enfants manipulent des bouteilles opaques contenant 5 billes : des noires et des blanches.

Chaque groupe d'enfants doit trouver une méthode pour découvrir la composition de sa bouteille.

a) Les enfants cherchent un moyen pour résoudre le problème. Une fois convenu de ne pas ouvrir la bouteille, ils décident de prendre en compte les apparitions des billes au travers du bouchon.

Cette première séquence d'activités s'achève. Elle a permis aux enfants de prendre contact avec le hasard, d'appréhender diverses statistiques. Aucune n'a fait l'objet d'une mise au point par les maîtres, mais le rôle du nombre de tirages et l'intérêt de traiter la plus grande quantité d'informations possibles ont été perçus de façon intuitive, ainsi que la stratégie générale du test d'hypothèse : affirmer une prévision et constater par l'expérience dans quelle mesure cette prévision peut-elle ou non être infirmée. Ce qui est infirmé est faux, mais ce qui n'est pas infirmé n'est pas forcément vrai. Cette dissymétrie est intuitivement perçue dans plusieurs cas.

B - DECOUVERTE DE LA PROBABILITE

Les enfants sont maintenant convaincus que les relations entre le contenu de la bouteille et les suites de tirages obtenus ne dépendent sans doute pas du moment de l'observation. En effet, ils cumulent les résultats, découpent en sous-séquences de 5 tirages.

Ceci va les conduire, pour faire des prévisions qui leur donnent satisfaction sur des plus grands nombres de tirages, à postuler la linéarité (voir ci-après)

La vérification de ces prévisions exige de grands tirages et permet de choisir celle qui apparaît la meilleure : la valeur de convergence.

Ils admettent aussi que cette valeur représente la meilleure prévision pour des petits nombres de tirages et le vérifient en considérant les séries de tirages qu'ils possèdent.

Les enfants travaillent par groupes

LES PREVISIONS (3 séances)

La maîtresse demande aux enfants : "voici une bouteille dans laquelle il y a 3 billes blanches et 2 billes noires. Pouvez-vous prévoir sur 100 tirages ce qui peut sortir ? Vous n'écrirez ces prévisions que lorsqu'elles satisferont tout le groupe".

FIGURE 6

(59B, 41N)
(58B, 42N)
(60B, 40N)
(62B, 38N)
(65B, 35N)

Les enfants marquent les résultats qu'ils estiment possibles (figure 6)

LA LINEARITE (2 séances)

"Prévoyez sur 200 tirages ce qui peut sortir".

Certains enfants prévoient à nouveau ; d'autres utilisent les prévisions faites pour 100 tirages pour prévoir sur 200 tirages.

Exemple : Prévision pour 100 tirages 58B 42N

donc prévision pour 200 tirages $2 \times 58, 2 \times 42$: 104B 84N.

UN GRAND NOMBRE DE TIRAGES (2 séances)

Les enfants pressentent que la vérification expérimentale doit être en accord avec leurs prévisions sur un grand nombre de tirages.

Exemples de prévisions :

100 ^e tirages :	59B	41N
500 ^e tirages :	295B	205N
.....		
10 000 ^e " :	5900B	4100N

100 ^e tirages :	58b	42N
500 ^e tirages :	290B	210N
.....		
10 000 ^e " :	5800B	4200N

100 ^e tirages :	65B	35N
500 ^e tirages :	325B	175N
.....		
10 000 ^e " :	6500B	3500N

Ainsi pour prévoir d'une manière satisfaisante pour eux, les enfants fabriquent une application "prévisions" linéaire qui soit la plus "proche" des applications "résultats" qu'ils possèdent.

Ce sont les résultats sur un grand nombre de tirages qui vont permettre de choisir cette application linéaire.

10 ^e 000 ^e tirages :	6 000B	4 000N
5 ^e 000 ^e tirages :	3 000B	2 000N
500 ^e tirages :	300B	200N

Remarque : pour faciliter leur travail, la maîtresse donne aux enfants des listes de tirages toutes prêtes issues de bouteilles de composition connue.

RETOUR AUX PETITS TIRAGES (2 séances)

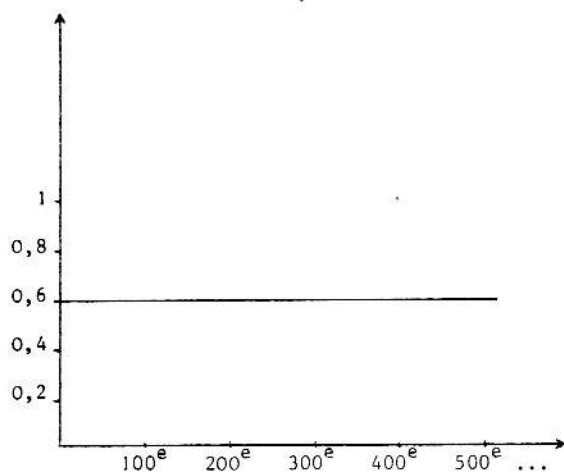
Les enfants s'accordent pour juger cette application également satisfaisante pour des petits tirages. Ils font des vérifications expérimentales.

Remarque :

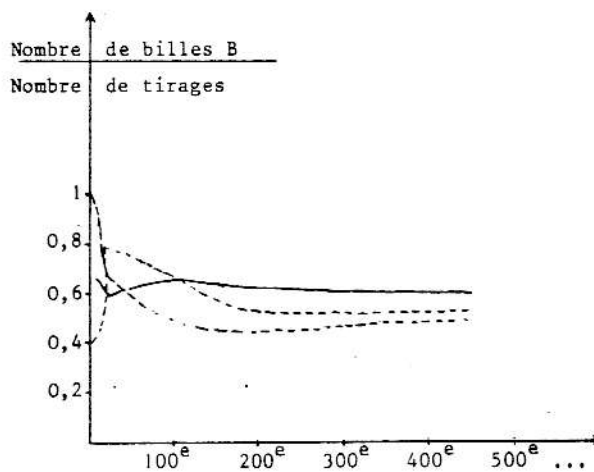
A cette époque, les mots : probabilités (opérateur prévision) et fréquence ont été introduits pour faciliter la discussion.

P R E V I S I O N S			:	R E S U L T A T S		
Tirage	B	Opérateur prévisions	:	Tirage	B	Fréquence
10 ^e	6	$\times 0,6$	:	10 ^e	7	0,7
30 ^e	18	$\times 0,6$	:	30 ^e	19	0,63
100 ^e	60	$\times 0,6$	:	100 ^e	68	0,68
200 ^e	120	$\times 0,6$	:	200 ^e	128	0,64
300 ^e	180	$\times 0,6$	:	300 ^e	187	0,62
500 ^e	300	$\times 0,6$	:	500 ^e	306	0,61

PREVISIONS (pour 3B 2N)



RESULTATS



Les enfants découvrent alors que, pour prévoir on peut prolonger l'application linéaire et la définir directement à partir de la composition de la bouteille :

Exemple :

5 billes :	3 Blanches	2 Noires
100 ^e tirage :	60B	40N
200 ^e tirage :	120B	80N
.....		
10 000 ^e tirage :	6000B	4000N

Ainsi, la probabilité apparaît d'une part, comme résultat d'un calcul a priori (combinatoire à partir de la composition de la bouteille), d'autre part comme valeur expérimentale où semble se stabiliser la fréquence cumulée (loi des grands nombres).

Formulation de la stratégie à l'occasion d'une nouvelle expérience

Une bouteille contient 8 billes. La maîtresse dispose de séries de 50 tirages, de 100 tirages issues de cette bouteille. Chaque groupe doit trouver la composition de la bouteille en demandant le nombre de séries de 100 ou 50 tirages qu'il souhaite.

Les groupes demandent 150 ou 200 tirages, calculent la fréquence, cherchent la probabilité qui se rapproche le plus de cette fréquence et concluent.

Exemple :

Un groupe trouve la fréquence d'apparition des blanches, égale à 0,712. Ce groupe pressent 5 blanches 3 noires ou 6 blanches 2 noires. Il calcule la probabilité associée à :

5 blanches : $(5/8 = 0,625)$

6 blanches : $(6/8 = 0,750)$ et conclue 6B 3N.

Commentaire :

a) les décimaux à 3 chiffres sont un facteur de difficulté

b) nous avons constaté un retour, pour deux groupes, à des stratégies plus archaïques que celles qui utilisaient la fréquence.

Exemple :

"sur 100 tirages, on a trouvé 65B et 35N. Si c'était 6B et 2N, on aurait 75B et 25N : si c'était 5B et 3N, on aurait 52,5 et 37,5. Alors le plus près, c'est 5B 3N".

Cette régression est normale. Les enfants disposaient de ce moyen assez efficace pour décider. Pourtant, ils ont bien compris ce que les fréquences pouvaient apporter et améliorer. Mais, une méthode qui a permis d'avancer dans l'analyse ne s'abandonne pas immédiatement au profit d'une autre. Les deux se confrontent. Cette démarche est caractéristique d'une mathématisation.

Cette deuxième partie s'achève. Les enfants expriment :

- l'idée de la convergence de la fréquence vers la probabilité

Exemple : "plus on fera de tirages avec la bouteille 3 blanches 2 noires, plus la fréquence va être près de 0,6".

- la stratégie à adopter pour découvrir le contenu d'une bouteille

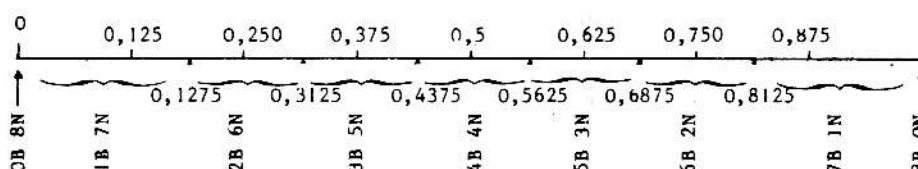
"On fait le plus de tirages possibles, on prend la fréquence des blanches et on voit si c'est près de 0,6 ou 0,2 ou 0,4 ou 0,8".

- des opinions à propos de la sûreté dans la prévision.

C - LA DECISION, LE RISQUE

LES INTERVALLES DE DECISION (2 séances)

Les enfants mettent au point un tableau afin de décider vite lorsque l'on connaît la fréquence.



Probabilité d'apparition des blanches
pour chacune des compositions possibles.

OB 8N : 0
1B 7N : 0,125
2B 6N : 0,250
3B 5N : 0,375
4B 4N : 0,5
5B 3N : 0,625
6B 2N : 0,750
7B 1N : 0,875
8B 0N : 1

Intervalles de décision :

Pour décider	OB 8N	0
" "	1B 7N	] 0 ; 0,1375 [
" "	2B 6N	] 0,1875 ; 0,3125 [
" "	3B 5N	] 0,3125 ; 0,4375 [
" "	4B 4N	] 0,4375 ; 0,5625 [
" "	5B 3N	] 0,5625 ; 0,6875 [
" "	6B 2N	] 0,6875 ; 0,8125 [
" "	7B 1N	] 0,8125 ; 1 [
" "	8B 0N	1

Commentaire :

Les enfants ont longuement discuté sur des questions précises comme :

- et si on trouve 0,8125, comme fréquence ? on dit quoi ?

- on continue les tirages !

- et si on trouve 0,999999 ? et si on trouve 0,00001 ?

Ces discussions à propos de la "barrière" qui doit être à côté de 0 pour séparer la décision 0 blanche 8 noires, de la décision 1 blanche 7 noires, ont beaucoup intéressé les enfants.

Le risque :

"Plus on a de tirages, plus on est sûr, mais c'est long". "Avec 150 tirages on est presque sûr".

La maîtresse propose de préciser cette phrase, elle distribue à chacune des 4 équipes de la classe une série de 100 tirages issus d'une même bouteille contenant 8 billes. 3 séries permettent de conclure à la bonne composition, la 4ème conduit à une conclusion fausse.

Le groupe qui a travaillé sur cette liste et qui a conclu faussement est convaincu de la justesse de sa démarche.

"Il faudrait continuer les tirages, on serait plus sûr".

La classe décide alors d'étudier les risques d'échecs en fonction du nombre de tirages.

Les enfants ont à leur disposition :

- 20 séries de 200 tirages.

Ils vont examiner expérimentalement le nombre de conclusions fausses qui seraient faites si l'on concluait au 10ème tirage, 20ème tirage, 30ème, etc...

III - PROLONGEMENTS (Calcul des probabilités)

Les 20 séances des phases précédentes ont permis aux enfants de dégager les principales notions de probabilités et de statistiques dans leurs rôles et leurs significations réciproques. Aucune de ces notions n'a fait l'objet d'une définition formelle, mais un certain vocabulaire de base a été introduit correctement.

Il semble nécessaire que l'enfant appréhende ainsi des situations de manière globale avant d'en faire l'analyse.

A la suite de ces activités, les maîtres donnent divers jeux de hasard : dés, roulette, icosaédres, pièces, etc...

A cette occasion, les enfants recensent les issues possibles de l'expérience (événement) : une séance, et tentent de leur attribuer une mesure de probabilité : 2 séances.

On peut même proposer des expériences indépendantes successives (arbres) et calculer des produits de probabilités indépendantes (3séances).

Publications A.P.M.E.P.

**Bibliothèque de travail
du professeur de mathématique**

POUR VOS COMMANDES,
adressez vous
à VOTRE REGIONALE

Mots I, brochure 74, prix 6 F (8 F port compris).

Elem-Math I, brochure 75, prix 3 F (4,15 F port compris).

Carrés magiques, Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 48 pages, prix 4 F (5,15 F port compris).

Mots II, brochure 1975, prix 6 F (8 F port compris).

Substitutions et groupe symétrique, par J. Dautrevaux, prix 6 F (7,15 F port compris).

Mathématique pour la formation d'adultes, CUEEP, par P. Loosfelt et D. Poisson ; prix 15 F (18 F port compris).

A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième, (IREM de Toulouse - APMEP) ; prix 15 F (18 F port compris).

Mots III, brochure 1976, prix 6 F (8 F port compris).

Elem-Math II, prix 3 F (4,15 F port compris).

Hasardons-nous, prix 25 F (28 F port compris)