CALCUL INFINITESIMAL ET ANALYSE NON-STANDARD

compte rendu d'un exposé
de WALLET

par Jacques PINAUD

A l'occasion des journées inter-IREM sur les nombres réels organisées par l'IREM de Nantes à la faculté des sciences d'Angers les 9 et 10 avril 1976, Guy WALLET a animé un atelier "Analyse non-standard" : Jacques Pinaud y participait... (*)

"... Il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme si il y avait des atomes..." Leibniz

Le calcul infinitésimal a présenté tout au long de son histoire une dualité de méthodes : utilisation d'une part de quantités infiniment petites, élaboration d'autre part de procédés de démonstration permettant d'évacuer les mêmes quantités. C'est Leibniz qui le premier dégage l'infiniment petit de sa gangue géométrique (voir Archimède, Fermat, Pascal, Huygens, Barrow) et en fait un nombre c'est-à-dire un objet mathématique susceptible de s'intégrer à des calculs. C'est à peu près ceci : une grandeur est infiniment petite non pas lorsqu'elle est nulle ou non nulle mais à l'instant où elle s'annule !
A l'aide de cet outil il va pouvoir reconnaître et isoler les concepts fondamentaux du calcul infinitésimal. Mais à partir du XVIII^e siècle ces "quantités évanouissantes" sont rejetées (qualifiées de métaphysique par d'Alembert).
Après Cauchy, Bolzano et Weierstrass, l'un des piliers de l'analyse *est maintenant le concept de limite. L'histoire* semble avoir donné son verdict : il n'y a plus que les physiciens qui fassent appel aux infiniment petits et infiniment grands. Mais en 1960, un logicien américain Abraham Robinson a l'idée d'utiliser un modèle non-standard pour valider la notion d'infiniment petit. La théorie qu'il met au point, nommée Analyse Non-Standard est une véritable revanche posthume de Leibniz.
Il est démontré que l'on peut reconstruire l'analyse classique en plongeant le corps des réels $\mathbb{R}$ dans un corps non-archimédien $^*\mathbb{R}$ dont certains éléments sont appelés infiniment grands ou petits.

(*) *un autre participant, J. BETREMA a publié ses notes dans le Bulletin de liaison de l'IREM de Nantes, n°4, pages 17-25.*

I- CONSTRUCTION DE $^*\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathcal{U}$ un ultra-filtre[1] contenant le filtre de Fréchet.

• Sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels on définit la relation :

si $\alpha = (\alpha_k)$ et $\beta = (\beta_k)$ sont deux suites alors

$$\alpha \,\mathcal{R}\, \beta \iff \{R \in \mathbb{N} \mid x_k = y_k\} \in \mathcal{U}.$$

<u>Proposition 1</u> : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

<u>Définition</u> $\quad ^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}$ (ensemble quotient)

• En définissant dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les opérations $(\alpha_k) + (\beta_k) = (\alpha_k + \beta_k)$

$$(\alpha_k) \times (\beta_k) = (\alpha_k \beta_k)$$

en notant $\overline{\alpha}$ la classe d'équivalence de α.

On définit dans $^*\mathbb{R}$ les opérations $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$

$$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$$

<u>Proposition 2</u> : $(^*\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

Eléments neutres : classe suite constante nulle $\overline{(0)}$ et $\overline{(1)}$

Opposé de $\overline{\alpha}$: $-\overline{\alpha}$

Inverse de $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R} - \{0\}$: $\overline{\beta}$ telle que $\begin{cases} \beta_k = \alpha_k^{-1} & \text{si } \alpha_k \neq 0 \\ \beta_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$

(puisque $\overline{\alpha} \neq \overline{(0)}$, $\{k \in \mathbb{N} / \alpha_k \neq 0\} \in \mathcal{U}$)

• Relation d'ordre dans $^*\mathbb{R}$.

Définissons la relation $\leqslant$ dans $^*\mathbb{R}$ par :

$$\overline{\alpha} \leqslant \overline{\beta} \iff \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k \leqslant \beta_k\} \in \mathcal{U}$$

La compatibilité étant prouvée on a

<u>Proposition 3</u> :

$(^*\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

En effet soient $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ deux éléments de $^*\mathbb{R}$. Introduisons :

$$\left.\begin{aligned} P &= \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k < \beta_k\} \\ Q &= \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k = \beta_k\} \\ R &= \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k > \beta_k\} \end{aligned}\right\}$$

alors $\mathbb{N} = P \cup Q \cup R$

Démontrons que l'un de ces ensembles appartient à $\mathcal{U}$.

Si $P \notin \mathcal{U}$ alors $Q \cup R \in \mathcal{U}$. Si de plus $Q \in \mathcal{U}$ alors $P \cup R \in \mathcal{U}$.

donc $R = (Q \cup R) \cap (P \cup R)$ appartient à $\mathcal{U}$.

• $^*\mathbb{R}^+$ (défini trivialement) est stable pour l'addition et la multiplication.

• $i : \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ est un homomorphisme de corps conservant l'ordre.

$\quad x \longrightarrow \overline{(x)}$

On confondra donc $i(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$, $\overline{(x)}$ sera notée x

• L'application valeur absolue est définie trivialement.

II- INFINIMENT PETITS ET INFINIMENT GRANDS

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad |\bar{\alpha}| < x$

Un tel élément $\bar{\alpha}$ est appelé infiniment petit.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha = +\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \bar{\alpha} > x$

On parlera alors d'infiniment grand pour $\bar{\alpha}$

- Soit I l'ensemble des infiniment petits

  Soit F l'ensemble des éléments de ${}^*\mathbb{R}$ finis en définissant

$$a \in {}^*\mathbb{R} \text{ est fini } \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \cdot |a| \leqslant x$$

Alors : - F est un anneau

- I est un idéal maximal de F
- $F/I = \mathbb{R}$

<u>Proposition 4 :</u>

- ${}^*\mathbb{R}$ est non archimédien.
- Définition : soient x et y deux éléments de ${}^*\mathbb{R}$. On définit $\sim$ (infiniment proche) par :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$$

Alors : $\forall x \in F \quad \exists! u \in \mathbb{R} \cdot x \sim u$

- Soit $x \in F$. Alors $A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \leqslant x\}$ a une borne supérieure réelle infiniment proche de x.

III- PROLONGEMENT D'UN SOUS-ENSEMBLE DE $\mathbb{R}$ dans ${}^*\mathbb{R}$

Soit $X \subset \mathbb{R}$. On définit ${}^*X \subset {}^*\mathbb{R}$ par

$$\bar{\alpha} \in {}^*X \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k \in X\} \in \mathcal{U}$$ (${}^*\mathbb{N}$: entiers non-standards)

<u>PROLONGEMENT D'UNE FONCTION</u>

Soit $f : x \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit ${}^*f : {}^*X \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } \bar{\alpha} \in {}^*X \quad \text{alors } {}^*f(\bar{\alpha}) = \bar{\beta} \quad \text{où } \beta_k = \begin{cases} f(\alpha_k) \text{ si } \alpha_k \in X \\ 0 \text{ si } \alpha_k \notin X \end{cases}$$

<u>ECRITURE EN ANALYSE NON-STANDARD</u> de définition en analyse classique

- Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{X}$

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in {}^*X \quad (x \sim a \Rightarrow {}^*f(x) \sim 1)$
- f continue sur $X \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall y \in {}^*X \quad (x \sim y \Rightarrow {}^*f(x) \sim {}^*f(y))$
- f uniformément continue sur $X \Leftrightarrow \forall x \in {}^*X \ \forall y \in {}^*X \ (x \sim y \Rightarrow {}^*f(x) \sim {}^*f(y))$

En lisant "$\sim$" : "infiniment proche" les formulations ci-dessus expriment bien les idées primitives de limite et de continuité.

NOTE :

(1) $\mathcal{U}$ est un ultra filtre de $\mathbb{N}$ signifie :

i) $\mathcal{U}$ est un filtre,

$\left\{\begin{array}{l} \emptyset \notin \mathcal{U} \qquad \mathcal{U} \text{ est stable par l'intersection} \\ \text{Si une partie de } \mathbb{N} \text{ est dans } \mathcal{U} \text{ alors toute partie le contenant} \\ \text{y est aussi.} \end{array}\right.$

ii) Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est tel que soit lui-même, soit son complémentaire est dans $\mathcal{U}$.

BIBLIOGRAPHIE

L'ouvrage fondamental de ROBINSON [6] présente $^{*}R$ à partir de concepts généraux de logique, rappelés dans un premier chapitre. On aura un aperçu de cette démarche en consultant l'article de LIGHTSTONE [2].

(1) BADIOU A. — LA SUBVERSION INFINITESIMALE
Cahiers pour l'Analyse. N° 9. Editions du Seuil

(2) LIGHTSTONE A.H. — INFINITESIMALS
The American Mathematical Monthly. Vol 79, N° 3, 1972.

(3) LUXEMBURG W.A.J. — APPLICATIONS OF MODEL THEORY TO ALGEBRA, ANALYSIS AND PROBABILITY
HOLT, RINEHART and WINSTON. New-York 1969.

(4) LUXEMBURG W.A.J. — WHAT IS NONSTANDARD ANALYSIS ?
The American Mathematical Monthly. Vol 80, N° 6, Part II (1973).

(5) MACHOVER M., HIRSHFELD J. — LECTURES ON NONSTANDARD ANALYSIS
Lectures Notes in Mathematics 94 1969.

(6) ROBINSON A. — NONSTANDARD ANALYSIS
North-Holland, Amsterdam 1966.

(7) VAN OSDOL D.H. — TRUTH WITH RESPECT TO AN ULTRAFILTER OR HOW TO MAKE INTUITION RIGOROUS
The American Mathematical Monthly Vol 79, N° 4, 1972.