A PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

par Raymond COUTY
(LIMOGES - Haute-Vienne)

Le point de vue d'un géomètre sur l'histoire de la géométrie et son enseignement

La géométrie, fleuron de l'esprit humain.

"Aristippus, philosophus socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata a descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur : Bene speremus, hominum enim vestigia video" (Vitruve : De architectura ler siècle avant J.C.).

Donc, Aristippe, disciple de Socrate, jeté par un naufrage sur les rivages de l'île de Rhodes apercevant des figures géométriques dessinées sur le sable, se tournant vers ses compagnons se serait écrié "nous pouvons avoir bon espoir, car j'aperçois ici des traces d'hommes". Il voulait dire évidemment d'hommes véritables, l'activité géométrique étant pour lui l'essentiel des activités de l'homme civilisé.

Mais, "ceci se passait en des temps très anciens". Depuis, si on a cessé de considérer que l'étude de la géométrie est l'essentiel de l'activité humaine, on a pendant longtemps rangé sous le vocable géométrie l'essentiel de l'activité mathématique. D'un bon mathématicien, on disait : "c'est un fin géomètre". De cette situation, il reste des traces, puisque certains de nos plus illustres mathématiciens se retrouvent à la section "géométrie" de l'Académie des Sciences.

En opposition, tout récemment de bons esprits se sont sérieusement demandés s'il fallait vraiment enseigner la géométrie, "cet enseignement viendrait plus tard", lorsque les fondements algébriques et topologiques seraient suffisamment assurés. Si mathématiquement cette attitude est parfaitement justifiée, elle ne me paraît pas raisonnable sur le plan pratique et je crois excellent de faire faire très tôt "de la géométrie". Mais quelle géométrie ? et comment ?

Avant de répondre à cette question, je voudrais faire d'abord une très brève esquisse historique en ne retenant bien sûr que les faits qui me paraissent aujourd'hui (cela peut changer...) significatifs.

De Thalès à Bourbaki par Euclide et Hilbert

Faisons, un peu arbitrairement, commencer les choses en Egypte où les arpenteurs "mesureurs de terre" ont découvert quelques propriétés de certaines figures. Puis vers le 6ème ou 7ème siècle avant notre ère arrive Thalès qui au cours d'une visite en Egypte invité par les prètres qui ont reconnu en lui un esprit supérieur se voit poser la question "peux tu estimer la hauteur de la pyramide du roi Chéops" ?

On connaît l'histoire, Thalès au grand étonnement du prêtre, par des mesures de longueurs d'ombres, va donner la réponse exacte.

Mathématiquement, sa démarche se situe à ce que l'on peut appeler le "deuxième niveau", c'est à dire que dans le cas concret qui lui est posé, il imagine une méthode qui lui permettra d'éviter la manipulation à faire et il est sûr, par son raisonnement, d'obtenir le bon résultat.
Les arpenteurs égyptiens eux, se situent au "premier niveau" : ils font des expériences, des mesures, et ils regardent et constatent.

Ensuite, vers le 4ème siècle avant notre ère arrive le premier bourbakiste de l'histoire, Euclide qui entreprend de codifier tout le savoir géométrique de son temps. Il se situe au "troisième niveau". On sait l'orgueilleuse réponse qu'il fit à Alexandrie au roi Ptolémée Philadelphe qui lui demandait s'il n'existait pas pour arriver à progresser en géométrie une méthode plus commode que les "Eléments", "En géométrie, seigneur, il n'existe point de voie royale". Mais nous savons maintenant, qu'il en existe une. En tout cas, Euclide crée une théorie axiomatisée et montre ce qu'est une démonstration mathématique.

On connaît le succès considérable de ses "Eléments" et on se souvient des discussions philosophiques qui ont suivi, sur la différence entre postulats et axiomes, la plus ou moins grande évidence des uns par rapport aux autres.

On se souvient aussi de l'enseignement de la "géométrie de papa" qui n'avait pas que des défauts, bien sûr, mais où fourmillaient les pseudo-démonstrations "lourdes d'axiomes inexprimés" car le système d'axiomes d'Euclide n'était pas très clair, en particulier il ne s'était pas posé les questions de minimalité et d'indépendance.

Dans la ligne directe d'Euclide, on eut en I899 l'ouvrage capital de Hilbert "Grundlagen der géométrie" qui donne un système d'axiomes parfaitement logique et cohérent et résout le problème de l'indépendance, il fait une construction avec cinq groupes d'axiomes (en tout une vingtaine).

"Enfin Bourbaki vint" un de ses plus éminents représentants s'écria un jour, en une formule demeurée célèbre "à bas Euclide, mort au triangle".

Pourquoi ? Parce qu'il connaissait la voie royale.
En effet, l'axiomatique d'Euclide-Hilbert basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle, "dissimule merveilleusement la structure vectorielle de l'espace et sans doute est elle responsable du fait que des siècles durant on a ignoré la notion de vecteur". Or, c'est justement là que passe la voie royale.

La polémique Choquet-Dieudonné

En I964 paraissent presque simultanément deux ouvrages importants à verser au dossier de l'historien de l'enseignement de la géométrie. L'un est de Dieudonné et a pour titre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", l'autre, de Choquet et s'intitule "l'enseignement de la géométrie".

Tous les deux reconnaissent que la voie royale c'est l'algèbre linéaire, mais alors que Dieudonné part de l'axiomatique "nue" de l'algèbre linéaire, Choquet pour faire admettre cette axiomatique réalise un compromis entre une axiomatique du type Euclide-Hilbert et l'axiomatique de l'algèbre linéaire.

Je ne sais ce que Choquet pense du livre de Dieudonné, mais par contre tout le monde sait ce que Dieudonné pense du livre de Choquet puisqu'il écrit "le système d'axiomes proposé par Choquet, d'une remarquable ingéniosité témoigne du grand talent de son auteur. Mais je le tiens pour parfaitement inutile et même nuisible. Il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien :addition des vecteurs, multiplication par un scalaire, produit scalaire de deux vecteurs étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement,or chacun sait qu'il n'en est rien".

La voie royale

Effectivement, je pense que l'on peut assez vite commencer l'enseignement de la géométrie par la "voie royale". On sait quelles en sont les étapes essentielles :
Espace vectoriel, algèbre linéaire, groupe opérant dans un ensemble; espace affine associé à un espace vectoriel.

Bien sûr, mathématiquement, on se rend bien compte que lorsqu'on fait une démonstration en géométrie affine on a des éléments artificiels, et on sait bien qu'en fixant un point on a une structure d'espace vectoriel et que les différents espaces vectoriels ainsi obtenus sont isomorphes. D'autre part un des premiers modèles d'espace affine est une variété linéaire affine d'un espace vectoriel (partie d'un espace vectoriel déduite d'un sous-espace par translation) ; et, un théorème (dont la démonstration est loin d'être évidente...) affirme que ce modèle fournit la totalité des espaces affines, plus précisément que tout espace affine est une variété linéaire affine d'un espace vectoriel.

On pourrait donc dire, et cela a été dit, avec des raisons mathématiques tout à fait valables que l'intérêt de l'espace affine est très limité. Cependant, pour des raisons physiques, son étude me paraît nécessaire. Alors s'introduit tout de suite la notion de variété linéaire affine associée à un sous-espace vectoriel qui est sa direction. Les questions d'intersection et de parallélisme trouvent ici naturellement leur place et le fameux postulat d'Euclide devient un théorème trivial. On passe ensuite à la notion d'application affine associée à une application linéaire et on étudie tout naturellement le groupe affine, dans ce cadre le célèbre théorème de Thalès se trouve relégué au rang d'un petit corollaire.

Bien entendu, si on veut aller plus loin il faut ajouter d'autres axiomes. Avec l'existence d'une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel naît la structure d'espace vectoriel euclidien et on étudie alors les applications linéaires conservant cette forme, ce sont les applications orthogonales. Signalons en passant la notion de sous-espace inéductible pour une transformation linéaire f : il s'agit d'un sous-espace V tel que $f(V) \subset V$ et tel que, s'il existe $W \subset V$ tel $f(W) \subset W$ alors $W = \{o\}$ ou $W = V$; et un théorème affirme qu'étant donné une transformation orthogonale d'un espace euclidien, il est somme directe orthogonale de sous-espaces de dimension un ou deux irréductibles pour cette transformation.

Grâce à ce théorème l'étude des transformations orthogonales d'un espace euclidien de dimension n est ramenée aux cas $n = 1$ ou $n = 2$, ce dernier cas conduit tout naturellement à l'étude du groupe des angles.

On peut passer ensuite facilement à l'étude des transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien de dimension n, il n'y a pas quant aux difficultés rencontrées de différence fondamentale de nature.

Tout cela se termine naturellement par l'espace affine euclidien et le groupe orthogonal fournit tous les éléments pour l'étude du groupe des isométries. Comparé à ce que ma génération a connu, concernant par exemple les "déplacements de l'espace", la différence est saisissante. C'est un fait remarquable, mais non isolé, que le remplacement d'une axiomatique par une autre équivalente clarifie considérablement les choses.

Et nos classes ?

Maintenant quelles conclusions tirer en ce qui concerne l'enseignement effectif dans les classes, aux enseignants de le dire..., je me bornerai simplement à quelques remarques.
D'abord, dans cette trilogie, enseignant, enseigné, matière enseignée, quel est l'objet pilote ? s'agissant de formation des maîtres on dira que c'est l'enseignant, car s'il n'est pas bien formé, il maltraitera les deux autres.

Mais, nous nous plaçons ici dans l'hypothèse du maître parfait. Alors les discussions commencent. Admettons (ce n'est pas évident pour tout le monde) que pour ce qui nous occupe l'objet pilote c'est l'enseigné. Concrètement, pour le 2ème cycle des lycées, je pense qu'il n'y a pas trop de difficultés et que l'enseignement de la géométrie tel que je viens de le décrire ne pose pas de problème majeur (du moins dans les classes scientifiques).
Pour le 1er cycle, la situation est tout autre. Il y eut d'abord les programmes de 1971 construits par la commission ministérielle avec les commentaires qui les accompagnaient, destinés aux professeurs et que des éditeurs de manuels ont feint de croire destinés aux élèves. Il s'agit d'une construction mathématique irréprochable ; mais on sait très bien que cela a "mal passé". On a invoqué des raisons, par exemple que les professeurs n'étaient pas préparés, peut-être... mais je crois surtout que la raison principale est qu'il n'y a pas eu d'expérimentation préalable comme cela s'était produit pour les programmes de 6ème et 5ème. S'il y en avait eu on se serait sans doute aperçu qu'il était prématuré de vouloir faire assimiler cette construction en 4ème - 3ème.
Vous savez les remarques et critiques que ces programmes ont soulevé et puis il y a eu la circulaire ministérielle du 19 février 1973. Il semble qu'elle n'ait pas eu l'audience qu'elle méritait, pourtant c'est un document qu'il faut lire et méditer car il donne aux enseignants une grande liberté et ne les enferme pas dans le carcan strict d'une construction rigoureuse.
Il me semble que dans cette affaire il faudrait retenir deux principes : d'abord que la géométrie est la première théorie physique, ensuite que "l'homme n'est ni ange ni bête et qu'à vouloir trop faire l'ange, il fait la bête".

Concrètement la conséquence du premier principe est qu'il faut réhabiliter la pédagogie de la manipulation et cela très tôt, en 6ème et 5ème faire des dessins, des constructions géométriques et pas simplement avec la règle et le compas, (c'est paraît-il une idée de Platon), mais utiliser toutes sortes d'instruments à faire réaliser en travail manuel, instruments qui réalisent des transformations de figures : translateurs, pantographes etc... Il ne s'agit pas ici de géométrie mais d'activités géométriques qui seront motivantes par la suite.

Le deuxième principe est qu'il ne faut pas, pour cet âge se donner comme but exclusif l'accession au 3ème niveau et par conséquent il ne faut pas chercher à présenter d'abord une axiomatique globale de la géométrie parce qu'on risque fort de lâcher dans la vie des élèves qui n'auront même pas accédé au 2ème niveau, c'est à dire une certaine idée du raisonnement mathématique et un certain savoir faire autre qu'une petite recette applicable dans un cas particulier dont on sera incapable de sortir.

Au niveau des classes de 4ème et de 3ème on peut très vite introduire le vectoriel. Bien entendu, il faut des motivations. Sans entrer dans les détails qui dépasseraient le cadre de cet exposé on peut dire que des travaux sur quadrillage qui peuvent avoir été commencés en 5ème sont un bon moyen. Des expériences déjà réalisées paraissent confirmer ce point de vue. On part des quadrillages $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur lesquels on pratique des cheminements, des transformations ; puis on passe au plan repéré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on abandonne ensuite le repère. L'équivalence, les translations, leur composition, la multiplication d'un vecteur par un scalaire peuvent être présentés à partir de tracés associés à de nombreux calculs intégrant algèbre et géométrie dans une même étude.

Cette façon de procéder qui a l'avantage de s'insérer dans un processus continu prépare l'élève à admettre que l'on fonde l'édifice algébrico-géométrique sur des propriétés dont il lui est possible de vérifier sur des exemples l'exactitude expérimentale.