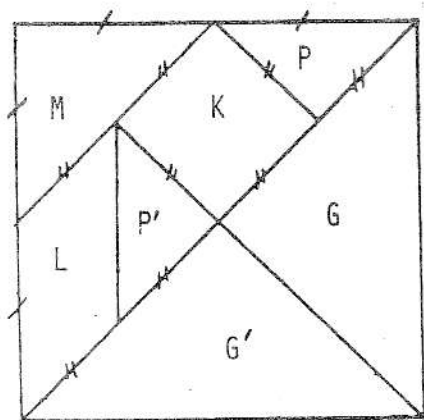


RECHERCHE ET DÉCOUVERTE COLLECTIVES DE LA FORMULE DE PICK EN CM₂

par Jean-Claude GOIX
(ORLÉANS - LOIRET)

La formule de Pick, dont la démonstration (difficile) a été fournie à l'article précédent, peut donner lieu à d'intéressantes manipulations dès l'école élémentaire.



LE TANGRAM

Les activités se sont déroulées en février 1976 dans la classe de M. MICHEL (CM₂) de l'Ecole Annexe Charles PEGUY de l'Ecole Normale de Garçons d'ORLÉANS.

Les enfants ont l'habitude de travailler avec des planchettes à clous à réseaux carrés. Ils ont entre autre fait des recherches sur les polygones et plus spécialement sur les quadrilatères.

C'est en recherchant une autre exploitation de la planchette à clous que j'ai voulu essayer d'arriver avec eux à la formule de PICK. Je me suis inspiré d'un compte rendu de Simone SAUVY dans A.R.P. Mais contrairement à la démarche de Simone SAUVY qui travaillait avec un groupe restreint d'enfants volontaires nous avons impliqué la classe dans son ensemble. Notre démarche a été volontairement directive.

I - OBJECTIFS

1) Découverte de la formule de PICK à partir de l'observation de tableaux de résultats numériques.

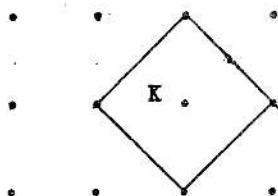
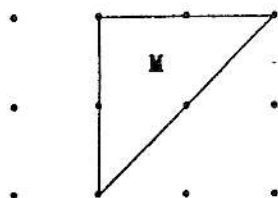
2) Construction, manipulation d'objets géométriques ; prise de conscience de la notion de figures superposables - évaluation d'aire.
En fait, dans la préparation préalable nous avions décidé de ne pas faire de l'obtention de la formule de PICK une fin en soi, ce qui explique les objectifs secondaires et le déroulement un peu particulier des quatre séquences.

II - MATERIEL UTILISE

- deux à trois planches à clous par groupe de 4 à 5 enfants.
- feuilles quadrillées figurant les planches à clous.
- TANGRAM (j'anime un club mathématique dans cette école où nous utilisons à titre de jeux des TANGRAM, j'ai voulu intégrer ce matériel dans un cadre plus scolaire).

III - PREMIERE SEANCE

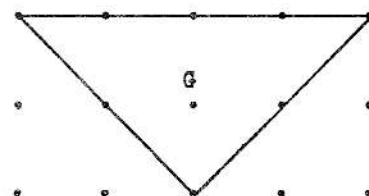
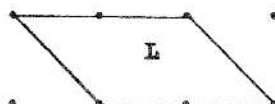
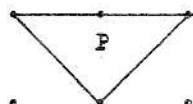
a) Construction à l'aide d'un organigramme, d'un carré dans lequel seront découpés les sept pièces du TANGRAM.
Le premier travail purement géométrique a été relativement long, les enfants ayant de grosses difficultés à effectuer un travail précis. Les deux points les plus difficiles ont été la construction du carré initial et le découpage.



b) Observation et comparaison des sept pièces du TANGRAM : On a d'abord demandé aux enfants de représenter sur leur feuille pointée les sept pièces du TANGRAM. Le maître ayant représenté l'une de ces pièces au tableau. Il a été conseillé aux enfants de commencer par représenter ces éléments du TANGRAM sur leur planche à clous.

La représentation du carré a donné lieu à de nombreuses erreurs. La solution de la construction du carré a été présentée par MANUEL : "J'ai remarqué que si on met le triangle P et le triangle P' collés, on obtient le carré K".

Par la suite on distinguera le carré K du TANGRAM du carré imité en exprimant que K a 4 points sur la frontière et 1 à l'intérieur.



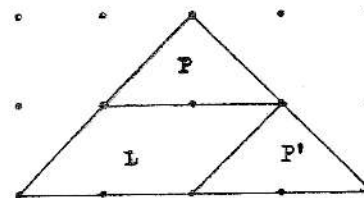
IV - DEUXIEME SEANCE

On reprend les sept pièces obtenues dans la leçon précédente et le maître propose de faire des remarques sur ces pièces et de les comparer. Les enfants ont déjà remarqué que P et P' étaient isométriques (par superposition). On obtient ensuite des relations entre les aires, toujours à partir de superpositions.

Voici un exemple de solution assez élaborée :

$$s(G) = s(L) + 2s(P)$$

On arrive à la conclusion qu'il est possible d'évaluer l'aire d'une pièce avec une autre comme unité.



a) Il est alors proposé aux élèves de remplir le tableau suivant :

		G	G'	K	P	P'	L	M
aire S	1' unité est le triangle P	4	4	2	1	1	2	2
	1' unité est le carré K	2	2	1	0,5	0,5	1	1
	1' unité est le carré formé par 4 clous	4	4	2	1	1	2	2

Les élèves ont travaillé par groupe de 4 ou 5 sur ce tableau. Ils ont presque tous eu recours à la "superposition" pour remplir la première ligne. Il n'y a pratiquement pas eu d'échecs dans cette première phase. Le changement d'unité d'aire en prenant cette fois le carré K comme unité a été la source de plusieurs difficultés. La superposition étant impossible directement certains enfants ont été bloqués. Certains groupe se sont vite aperçu que l'aire de K étant double de celle de P, ont obtenu facilement la 2ème ligne. Les erreurs les plus fréquentes ont été celles pour P et P', où au lieu de 0,5 on a trouvé 1. Lors de la mise au point collective des enfants ont mis en évidence le rapport $\times 2$ entre les deux premières lignes. Ce sera la seule fois au cours des quatre séances où on parlera d'opérateurs. La troisième évaluation qui nous semblait le plus difficile a été bien vu par l'ensemble de la classe. Très vite les enfants ont vu la nécessité de découper le carré unité en deux et de faire des sommes : l'additivité des aires ne leur a pas posé de problèmes.

b) On a demandé ensuite aux enfants de remplir un deuxième tableau où apparaissent les variables : i = nombre de points intérieurs à la figure,
f = nombre de points situés sur la frontière,
s = aire (1'unité est le carré formé par 4 points) $\square$

	G	P	M	L	K
s	4	1	2	2	2
i	1	0	0	0	1
f	8	4	6	6	4

Le tableau rempli, le maître a demandé à titre indicatif "Peut-on trouver une loi, (le terme avait été expliqué précédemment) entre s - f et i ?"

- Une proposition : " s " c'est 4, i c'est divisé par 4, f c'est multiplié par 2 et le même élève d'ajouter aussitôt : "C'est pas une loi parce que ça ne marche pas pour les autres".

Le maître a alors arrêté la discussion, il était évidemment trop tôt pour réfléchir utilement sur la formule de PICK.

"Pour arriver plus facilement à la loi nous allons faire un troisième tableau"

- c) Vous allez construire sur votre planchette à clous ou sur votre feuille pointée des figures simples n'ayant aucun point à l'intérieur de la frontière.

Vous remplirez alors le tableau suivant :

s	f	i
		0
		0
		0
		0

La recherche est faite par groupes et les solutions sont nombreuses et assez variées. Presque tous les enfants utilisent la planchette à clous.

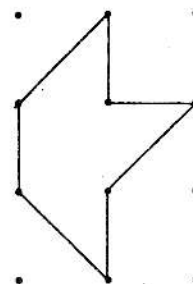
On trouve le plus fréquemment des solutions du type (a) ou (b), mais aussi des figures très élaborées (c).



(a)



(b)



(c)

Le maître fait alors le recensement des résultats numériques en remplissant le tableau proposé : on n'accepte que des résultats différents.

La séance se termine sur des remarques sur les résultats.

Catherine propose tranquillement : "J'ai remarqué que f c'est s multiplié par 2 plus 2".

"C'est vrai" ; "C'est pas vrai" ; la classe est divisée. Le maître propose de noter l'hypothèse de Catherine et de la vérifier la prochaine fois.

$$f = 2s + 2$$

s	f	i
4	10	0
2	6	0
1,5	5	0
6	14	0
2,5	7	0
1,5	5	0
4,5	11	0
3	8	0
5	12	0
1	4	0

V - TROISIEME SEANCE

On s'est proposé de vérifier l'hypothèse de Catherine et de le reformuler (pour la dernière séance) sous forme

$$s = \frac{f}{2} - 1$$

Dans ce but le maître a réordonné le tableau de résultat précédemment obtenu :

- Le maître propose aux enfants de compléter le tableau ainsi présenté :

"On peut faire 3,5 pour s , ça fait 9 clous à la frontière, on le vérifie avec la planchette à clous".

Accord général et même opération avec vérification sur la planchette à clous pour d'autres valeurs ($s = 4$, $s = 6$, $s = 7$)

La classe se met d'accord pour accepter l'hypothèse de Catherine $f = 2s + 2$. Il n'est pas possible de vérifier au delà de $s = 9$ mais on a suffisamment de résultats pour adopter la formule.

Au cours de cette phase une élève, Valérie, a fait la remarque suivante : on cherche à remplir la case $s = 7$.

" i c'est 4, de 1 à 7 il y a 6, on le multiplie par 2 et on ajoute les 4 cela fait 16".

La classe ne suit pas Valérie, c'est trop compliqué, par contre le maître reprend l'idée pour essayer d'obtenir s en fonction de f .

On observe les 2 premières lignes du tableau : "Quand s augmente de 0,5

f augmente de 1". Valérie reprend aussitôt "C'est simple pour trouver $s = 7$

on cherche combien de demi il y a de 1 à 7 : il y en a douze puis on ajoute les 4 de 1". Quelques élèves approuvent mais l'ensemble de la classe ne suit pas.

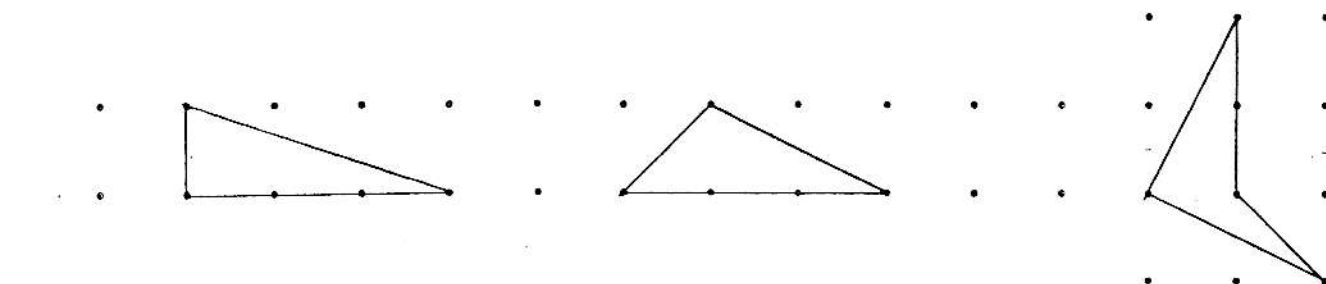
s	f	i
1	4	0
1,5	5	0
2	6	0
2,5	7	0
3	8	0
4,5	11	0
5	12	0

Je recentre le débat "Voilà je connais f je veux trouver s . Regardez bien le tableau." Patrick : "Pour $f = 8$ on divise par 2 et on retire 1".
"Ca marche aussi pour $f = 6$ "

Le maître reprend la proposition et c'est Patrick qui va écrire au tableau sa formule $s = \frac{f}{2} - 1$.

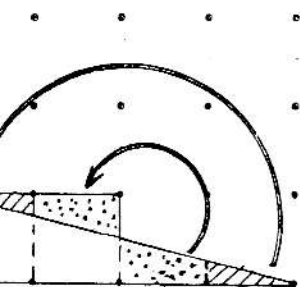
On vérifie que "ça" marche pour les autres exemples déjà vus.

La séance se termine en application : le maître propose des surfaces à mesurer du type :



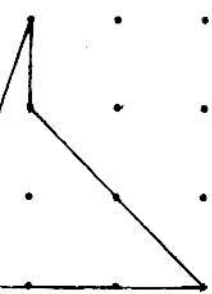
Cette application donne lieu à d'excellentes remarques d'ordre géométrique :

Ainsi, pour mesurer le triangle ci-contre et vérifier que la formule de Patrick est juste, Manuel vient proposer la manipulation suivante.



Il explique qu'en reportant le triangle hachuré et le trapèze pointé il obtient un rectangle de 2 unités d'aires. Certains lui rétorquent que c'est pas une démonstration et que c'est approximatif, mais finalement comme cela permet de retrouver la formule de Patrick $s = \frac{f}{2} - 1$ on finit par être d'accord. Manuel simplifiera lui même sa démonstration en constatant que l'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle ayant les mêmes côtés.

- QUATRIEME SEANCE



- a) Le maître rappelle la formule de PICK $s = \frac{f}{2} - 1$ dans le cas où $i = 0$. On fait quelques vérifications puis on se propose de calculer l'aire de la figure ci-contre :

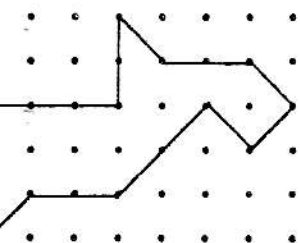
"Un élève remarque aussitôt que la formule $s = \frac{f}{2} - 1$ ne marche pas car il y a un point à l'intérieur" On vérifie quand même :

Calcul direct : $s = 3,5$ u.a.

$$s = \frac{f}{2} - 1 \quad s = \frac{7}{2} - 1 = 2,5 \text{ u.a.}$$

On va chercher une nouvelle formule qui marche aussi dans le cas où il y a des points à l'intérieur.

- b) Dans cette ultime recherche les enfants vont travailler à nouveau avec les pièces du TANGRAM. J'ai construit une dizaine de figures à l'aide des 7 pièces, qui peuvent toutes être représentées sur la planche à clous ou la feuille "pointée". Cette fois les enfants vont travailler avec f et i variables et s constant. Les enfants doivent en groupe réaliser les puzzles proposés (ils sont à l'échelle du carré initial et peuvent être obtenus par superposition, ceci pour ne pas ajouter de difficultés) et remplir le tableau suivant après avoir représenté les puzzles sur leur feuille pointée.



	s	f	i
A	16	18	8
B	16	20	7
C	16	14	10
D	16	22	6
E	16	16	9
F	16	12	11
G	16	24	5

Le travail prend une demi-heure environ. Les enfants ont des difficultés au niveau de la représentation. Il leur est indispensable de se servir de la planchette à clous.

Remarques sur le tableau

Une fois collectivement établi le maître propose d'en faire l'examen :

Boudou "La surface c'est toujours 16, c'est normal par ce qu'on utilise toujours les mêmes pièces".

Valérie "A c'est 18 pour f et 8 pour i

B c'est 20 pour f et 7 pour i

Quand on augmente f de 2 le i diminue de 1".

Catherine "On ajoute f et i on divise par 2 et si i est un nombre impair on retranche 0,5 et si i est pair on trouve exactement s".

Le maître inscrit ces remarques mais propose de réordonner le tableau : un élève propose de ranger suivant les valeurs de i en commençant par i = 5.

Le maître propose de continuer le tableau sans regarder le précédent :

Philippe : Si i = 11, il y en aura 12 pour f.

Rachid : si i = 12, f = 10

	s	f	i
K	16	24	5
	16	22	6
	16	20	7
	16	18	8
	16	16	9
	16	14	10

Cathy : j'ai remarqué que f décroît de 2 en 2 tandis que i augmente de 1 en 1. On voit que la remarque de Cathy est la même que celle de Valérie. On vérifie alors que la règle de Catherine ne marche pas. On l'abandonne donc. Je relance la recherche d'une loi en regardant si la loi $s = \frac{f}{2} - 1$ marche. Des enfants protestent "C'est pas possible car il y a des points à l'intérieur" On regarde cependant pour la première figure K.

$$s_K = \frac{24}{2} - 1 = 11$$

Patrick remarque aussitôt "Pour trouver 16 il suffit d'ajouter les points à l'intérieur". Ca marche aussi pour les autres. On vérifie alors et Patrick énonce sa règle "Pour trouver s on donne f par 2, on ôte 1, et on ajoute i".

$$s = \frac{f}{2} + i - 1$$

COMMENTAIRES

Le maître a réutilisé par la suite plusieurs fois la formule de PICK dans des applications concrètes de mesures d'aires.

Il est clair que l'on peut certainement parvenir plus directement au résultat en suivant la même démarche mais en évitant de se servir du TANGRAM.

IL y a eu une superposition de difficultés mais en même temps une motivation certaine et des observations très riches.

La classe qui a l'habitude d'exprimer sa lassitude n'a jamais protesté, mais au contraire a manifesté un intérêt constant jusqu'à la fin.

Nos interventions (le maître et moi-même) ont été nécessaires lors de l'exploitation collective des résultats, surtout dans la dernière phase. On peut donc penser que notre premier objectif n'a été atteint qu'en partie :

Etablissement d'une loi à partir d'un tableau de données numériques.

Nous avons repris cet objectif quelques temps après (1 mois) : on a proposé aux enfants d'établir la formule d'Euler sur les graphes plans. Nous ne sommes pas intervenus ; et, uniquement pas l'observation d'un tableau de résultats

3 groupes sur les 6 ont fourni la bonne réponse ($S + R - 2 = A$)

les 3 autres ayant proposé des réponses du type : si $R = 2$ $S = A$; si $R = 3$ $S = A + 1$.