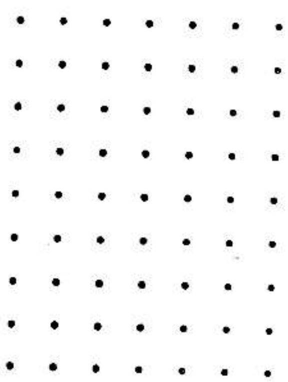
SUR LE THÉOREME DE PICK

par Marc BLANCHARD
(ROCHEFORT - CHARENTE MARITIME)

Une formule simple, et assez peu connue, permettant de déterminer l'aire d'un polygone construit sur un réseau carré : la formule de Pick.

Extrait de "Le Pentamino", bulletin de liaison des animateurs de clubs, publié par l'IREM de GRENOBLE, n° 1, Juillet 1973 :



> *"Un géoplan est une planche (en général carrée) où sont plantés des clous, formant un réseau carré. A défaut de géoplan (où servent des élastiques), on peut se contenter d'un réseau carré de points et d'un stylo... On trace un polygone fermé quelconque sur le géoplan. Essayer d'exprimer son aire (en carreaux-unités) en fonction du nombre de clous intérieurs au polygone, et placés sur le périmètre du polygone".*

Ce qui suit, est sauf erreurs, une solution de ce problème.

Les seuls polygones envisagés sont les polygones non aplatis dont tous les sommets sont des points du réseau. On écrira $A(i,n)$, l'aire d'un polygone ayant i points intérieurs et n points sur le périmètre, tous points du réseau. Cette notation sera justifiée ultérieurement, quand on aura montré que cette aire ne dépend que de i et de n, et non de la forme du polygone. On supposera notre géoplan non limité.

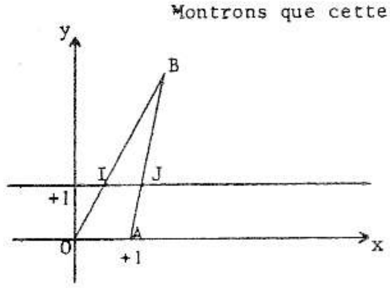
<u>Montrons dans un premier temps que : $A(0,3) = 1/2$</u>

On ne s'intéresse donc qu'aux triangles sans point du réseau intérieur et dont les seuls points du réseau sur le périmètre sont les sommets. Soit (OAB) un tel triangle. On rapporte le réseau à un repère orthonormé Ox , Oy de façon que les axes contiennent les 4 points du réseau les plus proches de O . Nous allons envisager successivement 2 cas :

1) A est situé sur un axe ;
2) A n'est pas situé sur un axe.

1) <u>Si A est situé sur un axe</u>, alors nécessairement ses coordonnées a et a' vérifient : $\{|a|, |a'|\} = \{0, 1\}$. Sans nuire à la généralité, prenons $(a,a') = (1,0)$. Cherchons les coordonnées de $B(b,b')$. b et b' sont étrangers, sinon leur P.G.C.D. noté $D(\neq 1)$ serait tel que le point de coordonnées $(b/D, b'/D)$ appartiendrait au réseau et à $]0,B[$. Ce qui contredit le choix de (OAB).

Supposons $|b'| \neq 1$, sans nuire à la généralité, on peut prendre $b' > 1$. Montrons que cette hypothèse est absurde.



On appelle I et J les points de $]0,B[$ et $]0,A[$ d'ordonnée 1. Le segment $[I,J]$ est intérieur au triangle, et :

$I(b/b',1)$; $J((b+b'-1)/b',1)$.

E désigne la fonction "partie entière", et la division euclidienne de b par b' donne : $b = kb'+r$ ($1 \leqslant r < b'$, car b et b' sont étrangers). On obtient :

$E(b+b'-1)/b') = 1+k = 1+E(b/b')$.

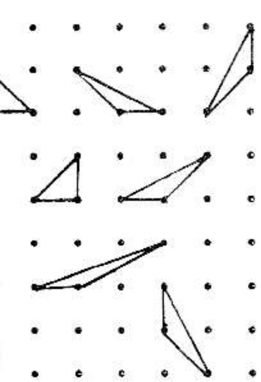
Le point de coordonnées $(E((b+b')/b'),1)$ appartient au réseau et est intérieur au triangle comme élément de $]I,J[$. Ce qui contredit le choix du triangle. Nécessairement, $|b'| = 1$.

Dans le triangle (OAB), si $[0,A]$ est la base, $|b'|$ mesure la hauteur.

Donc : $A(0,3) = 1/2$ (quand A est situé sur un axe).

2) <u>Si A n'est pas situé sur un axe</u>, ni A, ni B n'est l'un des quatre points du réseau les plus proches de O (si B est l'un d'eux, on est ramené au cas précédent). On pose : $A(a,a')$ (a et a' non nuls). Il est nécessaire que a et a' soient étrangers. Une équation de la droite (OA) est : $a'x - ay = 0$. Soit $B(x,y)$, en appelant d la distance de B à (OA), $d = |a'x-ay| / \sqrt{a^2+a'^2}$. d est minimale non nulle, B étant un point du réseau $|a'x-ay| = 1$. Comme a et a' sont étrangers, d'après l'identité de Bezout, il y a des couples solutions de la forme (x_0+ka, y_0+ka'), $k \in \mathbb{Z}$, (x_0, y_0) étant une solution quelconque. On sait que dans l'ensemble $[1, a-1] \times [1, a'-1]$, il n'y a que deux solutions (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) vérifiant respectivement : $a'x_1 - ay_1 = 1$ et $a'x'_1 - ay'_1 = -1$.

Mais $|a'x-ay| = \|\overrightarrow{OA} \wedge OB\|$, c'est donc le double de l'aire de (OAB), qui vaut alors 1/2 ; lorsque B est situé sur l'une des deux droites d'équation $a'x-ay = 1$ ou $a'x-ay = -1$. Il ne peut y avoir de point du réseau intérieur au triangle ou sur son périmètre autre que les sommets, car la distance de tels points à (OA) serait strictement inférieure à $d = 1$. Pour tout point du réseau $|a'x-ay|$ étant entier, il serait plus petit que 1, donc nul, ce qui est absurde. On a bien : $A(0,3) = 1/2$.



A(0,3) = 1/2

Il faut chercher maintenant si ce sont les seules solutions.

Soit $C(c,c')$, tel que : $a'c-ac' = n$ ($|n| > 1$). C est-il solution ? Nous allons montrer que non, c'est-à-dire que le triangle (OAC) admet un point du réseau intérieur ou sur ses côtés autre que les sommets. a et a' étant étrangers, les couples (c,c') solutions de $a'c-ac' = n$, s'écrivent $(nx_1+ka, ny_1+ka')(k \in \mathbb{Z})$. Montrons que si <u>n est positif</u> ($n > 1$), il existe α, β, γ positifs tels que : $\alpha, \beta, \gamma = 1$ et λ étant un relatif que l'on calculera, $B_{1,\lambda}$ $(x_1+ a, y_1+ a')$ est le barycentre de $(0,\alpha)$; (A,β) ; (C,γ). Si cela est $B_{1,\lambda}$ est un point du réseau appartenant à l'enveloppe convexe de O, A, C.

Il faut : $x_1+ \lambda a = \beta a+ \gamma(nx_1+ka)$ et $y_1+ \lambda a' = \beta a'+\gamma(y_1+ka')$. Ce qui équivaut au système : $(\beta-\lambda+\gamma k)a+(\gamma n-1)x_1 = 0 = (\beta-\lambda+\gamma k)a'+(\gamma n-1)y_1$. Système homogène de Cramer à 2 inconnues $(\beta-\lambda+\gamma k)$ et $(\gamma n-1)$.

Donc : $\gamma = 1/n$ (>0) ; $\beta - \lambda + k/n = 0$.

Comme on veut $0 \leqslant \beta \leqslant (n-1)/n$; on doit avoir $0 \leqslant \lambda - k/n \leqslant (n-1)/n$, soit : $k/n \leqslant \lambda \leqslant (n+k-1)/n$. Il vient donc : $\lambda = E((n+k-1)/n)$.

$B_{1,\lambda}$ appartient à l'enveloppe convexe de O, A, C, comme un au plus des coefficients α, β, γ est nul, $B_{1,\lambda}$ diffère de O, A, C. Alors (OAC) admet un point du réseau intérieur ou sur son périmètre autre que les sommets. Ce cas est à rejeter.

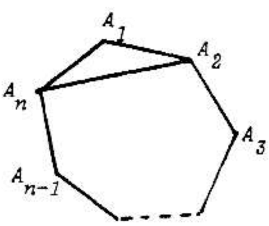
Si <u>n est négatif</u> $(n < -1)$, la démonstration est analogue en considérant $B'_{1,\lambda}\,(x'_1+\lambda a, y'_1+\lambda a')$. $(-nx'_1, -ny'_1)$ est solution particulière de : $a'c-ac' = n$.

On a donc trouvé le premier résultat fondamental suivant :

$$\boxed{A(0,3) = 1/2}$$

<u>Calculons maintenant $A(0,n)$</u>.

Soit un polygone sans point du réseau intérieur, ayant n points distincts du réseau sur le périmètre : $A_1,\ldots,A_n$, de façon qu'entre 2 points consécutifs de cette suite (ou entre A_n et A_1), il n'y ait pas de point de la suite. On note $(A_1\ldots A_n)$, le polygone formé par ces points.



Supposons que A_1 soit un sommet, appartenant à la frontière de l'enveloppe convexe des points de la suite, alors :

$(A_1A_2A_n) \cup (A_2\ldots A_n) = (A_1\ldots A_n)$ et $(A_1A_2A_n) \cap (A_2\ldots A_n) = [A_2A_n]$ (d'aire nulle).

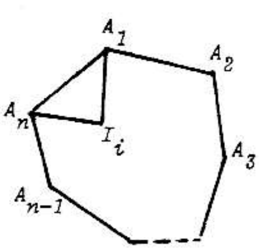
On en déduit :

$$A(0,n) = A(0,3) + A(0,n-1)$$

La suite $A(0,n)$ est arithmétique de raison 1/2 et de 1er terme 1/2.

Donc $\boxed{A(0,n) = n/2 - 1}$ pour tout naturel $n (n \geqslant 3)$.

Montrons <u>par récurrence sur i</u>, que plus généralement $A(i,n) = n/2 - 1 + i$. L'hypothèse est démontrée pour tout n, naturel, $n > 3$, et i nul ; on la suppose vraie jusqu'à $i-1$.



Soit $(A_1\ldots A_n)$, un polygone, $A_1\ldots A_n$ étant les points du réseau sur le périmètre dans cet ordre. On suppose que le polygone a i points du réseau intérieurs, $I_1,\ldots,I_i$. On considère le polygone $(A_1\ldots A_nI_i)$ et le triangle $(A_nI_iA_1)$ (I_i peut ne pas appartenir au côté (A_1A_n), par un choix convenable).

Alors : $(A_nI_iA_1) \cup (A_1\ldots A_nI_i) = (A_1\ldots A_n)$;

et $(A_nI_iA_1) \cap (A_1\ldots A_nI_i) = [A_1I_i] \cup [A_nI_i]$.

On en déduit que l'aire de $(A_1\ldots A_n)$ est la somme des aires de $(A_nI_iA_1)$ et de $(A_1\ldots A_nI_i)$.

On notera j (resp. j') le nombre de points intérieurs, et p (resp. p') le nombre de points sur le périmètre pour $(A_1\ldots A_nI_i)$ (resp. $(A_nI_iA_1)$).

Si α est le nombre des points $I_1,\ldots,I_{i-1}$ appartenant à $]A_1I_i[\cup]A_nI_i[$, alors : $p+p' = n+'+2\alpha$, (les α points $I_1,\ldots I_{i-1}$ sur $]A_1I_i[\cup]A_nI_i[$ $j+j' = i-1-\alpha$ sont comptés une fois sur chaque périmètre).

Comme on a supposé que, pour tout n, naturel, $(n \geqslant 3)$, pour tout k, naturel, $0 \leqslant k < i$, on a : $A(k,n) = n/2+k-1$. Ici, l'aire de $(A_1\ldots A_n)$ vaut :

$$A(i,n) = (p+p')/2 + j+j' - 2$$

$$\boxed{A(i,n) = n/2 + i - 1}$$

Ce résultat est connu sous le nom de <u>formule de Pick</u>.