

A PROPOS DES QUATERNIONS

par M. BOUTEILLER
(BRIVE - CORREZE)

Ce qu'il faut savoir sur les quaternions, et ce qu'on peut en faire.

I - RAPPELS HISTORIQUES

Il est toujours honnête de rendre à César ce qui lui revient ; en conséquence, rappelons que les nombres négatifs sont dus à BRAHMAGUPTA (628) et popularisés par N. CHUQUET (1500) que les logarithmes sont dus à NAPIER (1550-1617), les complexes à BOMBELLI (1526-1573). La représentation géométrique de $\mathbb{C}$ revient à WESSEL (1745-1818) neuf ans avant ARGAND. La définition de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}[x] / (x^2 + 1) \mathbb{R}[x]$ est due à CAUCHY (1789-1867) et celle par les couples de réels à William-Rowan HAMILTON (1805-1865) en 1833 (communication à l'Irish Academy). HAMILTON cherche en vain pendant dix ans à étendre le calcul complexe à la dimension trois et ce n'est qu'en 1843, un 16 octobre, en se promenant le long du Kings' Canal de Dublin qu'il eut l'inspiration tant attendue. Le calcaire de Brougham Bridge qui enjambe le canal en fit les frais avec $i^2 = j^2 = k^2 = ijk$ gravé au canif dans l'exaltation du moment.

Complexes, quaternions, octonions, doubles, duaux de STUDY (1862-1930) seront absorbés par les Algèbres de William Kingdon CLIFFORD (1845-1879) et celles d'Arthur CAYLEY (1821-1895). FROBENIUS en 1878 montrera que tout corps K tel que $\mathbb{R} \subset Z(K)$ et $\dim_{\mathbb{R}} K$ finie est isomorphe soit à $\mathbb{R}$ soit à $\mathbb{C}$ soit au corps des quaternions.

II - LES QUATERNIONS

J. DIEUDONNE "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" Annexe I' donne les raisons de l'échec d'HAMILTON pour la dimension 3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace base $\vec{e}_0$ unité multiplicative, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, si $\vec{u} \notin \mathbb{R} \vec{e}_0$, $\vec{e}_0, \vec{u}, \vec{u}^2, \vec{u}^3$ sont dépendants d'où en passant par $\vec{u} = x \vec{e}_0$ et en recombinant

$$\vec{u}^3 + \alpha \vec{u}^2 + \beta \vec{u} + \gamma \vec{e}_0 = \vec{0} = (\vec{u} - \lambda \vec{e}_0) (\vec{u}^2 + \mu \vec{u} + \nu \vec{e}_0), \quad \mu^2 - 4\nu < 0$$

Alors $(\vec{u} + \frac{\mu}{2} \vec{e}_0)^2 = (\frac{\nu}{4} - \nu) \vec{e}_0$ et si $\vec{u}' = (\vec{u} + \frac{\mu}{2} \vec{e}_0)(\nu - \frac{\mu^2}{4})^{-1/2}$ on a $\vec{u}'^2 = -\vec{e}_0$.

Pour $\vec{u} = \vec{e}_i$ on trouve $\vec{e}'_i = -\vec{e}_0$ $i = 1, 2$.

Formant $\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 = a \vec{e}_0 + b \vec{e}'_1 + c \vec{e}'_2$

on en déduit $-\vec{e}'_1 = \vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_2 = a \vec{e}'_2 + b \vec{e}'_1 \vec{e}'_2 - c \vec{e}_0$

d'où $\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 = \frac{c}{b} \vec{e}_0 - \frac{1}{b} \vec{e}'_1 - \frac{a}{b} \vec{e}'_2$ et par suite $b^2 = -1$, ce qui est irréalisable dans $\mathbb{R}$.

En l'honneur de HAMILTON, les mathématiciens notent H le corps non commutatif qu'il a découvert.

$H = \mathbb{R} 1 \oplus \mathbb{R} i \oplus \mathbb{R} j \oplus \mathbb{R} k$ avec la table de multiplication

$\curvearrowright$	i	j	k
i	-1,	k,	-j
j	-k,	-1,	+i
k	+j,	-i,	-1

à partir de laquelle le produit s'étend à H par linéarité.

Il faut bien entendu vérifier l'associativité pour les éléments de la table soit $27 - 3 = 24$ cas non évidents que l'on ramène à 9 par deux remarques :

$$a) \quad q_1 (q_2 q_3) = -q_1 (q_3 q_2) = (q_3 q_2) q_1$$

$$(q_1 q_2) q_3 = - (q_2 q_1) q_3 = q_3 (q_2 q_1)$$

$$\text{donc } q_1 (q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3 \iff q_3 (q_2 q_1) = (q_3 q_2) q_1$$

$$b) \quad q_1 (q_2 q_1) = -q_1 (q_1 q_2) = (q_1 q_2) q_1.$$

Il suffit alors de choisir l'élément central (3 possibilités) et les encadrants (3 possibilités) ce qui donne les 9 cas qu'on examine un à un :

i i i	i i k	j i k
j j i	j j k	i j k
k k i	k k j	i k j

$q \in H \iff q = \sigma + \alpha i + \beta j + \gamma k = \sigma + p$ (σ partie scalaire, p partie pure)
 $\bar{q} = \sigma - p$ est le conjugué, $q \bar{q} = \bar{q} q = \sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = N(q)$ norme algébrique et
 si $q \neq 0$, on a $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)}$ (ou bien $\bar{q} / N(q)$). Attention cependant $\overline{qq'} = \bar{q}' \bar{q}$.

Saluons en passant le groupe quaternionique d'ordre 8, non commutatif ($Q_2, .$) avec $Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dont le centre $Z(Q_2) = \{-1, 1\}$ est non réduit à l'élément neutre.

$\mathbb{C} = \mathbb{R} 1 \oplus \mathbb{R} i$ apparaît comme un sous-corps commutatif de H et comme $q = (\sigma + \alpha i) + (\beta + \gamma i) j = B + A j$, H apparaît comme un $\mathbb{C}$ - espace de dimension 2 de base $(1, j)$. A chaque $q \in H$ correspond le $\mathbb{C}$ - endomorphisme $q' \mapsto q' q$ dont la matrice dans la base $(1, j)$ est $T_q = \begin{pmatrix} \sigma + i \alpha & -\beta + i \gamma \\ \beta + i \gamma & \sigma - i \alpha \end{pmatrix}$

T_1, T_i, T_j, T_k sont les matrices popularisées par PAULI et comme

$T_{q_1 q_2} = T_{q_2} \circ T_{q_1}$ on voit que l'application $q \mapsto T_q$ est une représentation de H par matrices d'ordre 2 à coefficients complexes.

Cette structure de $\mathbb{C}$ - espace où $q = B + A j$ donne pour le produit :

$$q q' = [(\sigma\sigma' - \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma') + i(\sigma\alpha' + \alpha\sigma' + \beta\gamma' - \gamma\beta')] + \\ [(\sigma\beta' + \beta\sigma' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma') + i(\sigma\gamma' + \gamma\sigma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')] \quad (j) \\ \text{c'est-à-dire } q q' = (B B' - A \bar{A}') + (A \bar{B}' + B A') j.$$

On peut alors imaginer une construction de H comme quotient d'un anneau de polynômes par un idéal bilatère maximal.

Si $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \bar{z}$ est l'automorphisme usuel $\tau^2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$

on considère $\mathbb{C}_\tau[X]$ où $\sum_0^n a_n x^h \cdot \sum_0^m b_k x^k = \sum_0^{m+n} c_r x^r$

avec $c_r = \sum_{h+k=r} a_h \tau^h(b_k)$

Dans cet anneau $(X^2 + 1) \mathbb{C}_\tau[X]$ est un idéal bilatère en effet :

$$(X^2 + 1) \sum_0^n a_h X^h = \sum_0^{n+2} c_r X^r \quad \text{avec } c_r = a_r + \tau^2(a_{r-2}) = a_r + a_{r-2}$$

$$\left(\sum_0^n a_h x^h\right) \cdot (X^2 + 1) \sum_0^n d_r X^r \quad \text{avec } d_r = a_{r-2} + a_r = c_r$$

Les éléments de $\mathbb{C}_\tau[X] / (X^2 + 1) \mathbb{C}_\tau[X]$ sont les $A X + B$;
 $A, B \in \mathbb{C}$, $(X)^2 = -1$, donc si on note $X = j$ ce sont les $A j + B$ avec pour le produit :

$$(B + A j) (B' + A' j) = B B' + (A \tau(B') + B A') j + A \tau(A') j^2 =$$

$$(B B' - A \bar{A}') + (A \bar{B}' + B A') j.$$

$$\text{Si } A j + B \neq 0 \text{ on a } (A j + B)^{-1} = (-A j + \bar{B}) / (|A|^2 + |B|^2)$$

Remarque

En écrivant $q = (\sigma + \alpha i) + j(\beta - \gamma i)$

$$\text{on a } T_q = \begin{pmatrix} \sigma + \alpha i & -\beta + \gamma i \\ \beta - \gamma i & \sigma + \alpha i \end{pmatrix} \quad \text{et } T_{q_1 q_2} = T_{q_1} \circ T_{q_2}$$

III - APPLICATIONS DES QUATERNIONS

I - CALCULS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN REEL DE DIMENSION TROIS

a) Rappel sur les complexes

Pour apprécier le rôle des quaternions, il est utile de rappeler celui des complexes dans le plan euclidien réel. A chaque valeur $\vec{z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le

complexe $z = x + iy$ alors $2 \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$ et $\vec{z}^2 = z \bar{z} = |z|^2$.

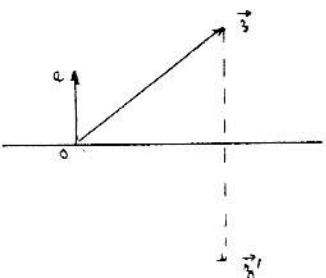
Le groupe O_2 des isométries vectorielles étant engendré par les symétries vectorielles par rapport à des droites vectorielles, on a pour une telle symétrie

$$s_{\vec{a}}^\perp : \vec{z}' - \vec{z} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{z} + \vec{z}') = 0 \quad \text{d'où } \lambda = -2 \vec{a} \cdot \vec{z} / \vec{a}^2 \quad \text{et } [\vec{z}' = \vec{z} - \frac{2 \vec{a} \cdot \vec{z}}{\vec{a}^2} \vec{a}]$$

$$\text{qui donne } z' = z - \frac{a \bar{z} + \bar{a} z}{a \bar{a}} a \quad \text{et } z' = -\frac{a}{\bar{a}} \bar{z}.$$

$$\text{Pour la rotation } s_b^\perp \circ s_a^\perp \text{ on aura } z'' = \frac{a b}{\bar{a} \bar{b}} z = r z, \quad r \in s_1 = \mathbb{U}$$

groupe des complexes de module un.



Si $r = u + i v \in S_1$ la matrice de la rotation Γ_r est celle de l'endomorphisme $\mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto rz} \mathbb{C}$ du $\mathbb{R}$ -espace $\mathbb{C}$ pour la base $(1, i)$ à savoir $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ $u^2 + v^2 = 1$.

On a l'isomorphisme de groupes $(S_1, \cdot) \xrightarrow{\Gamma} (SO_2, \circ)$
 $r \mapsto \Gamma_r$

b) Calcul dans E euclidien réel de dimension trois.

A chaque vecteur $\vec{p} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on associe le quaternion pur $p = \alpha i + \beta j + \gamma k$, on notera aussi $q = (\sigma, \vec{p})$ ou $\sigma + \vec{p}$ par abus de mélange. Alors si " $\wedge$ " est le produit vectoriel on vérifie le formulaire : $p_1 p_2 = -\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2$;

$$p_1 p_2 + p_2 p_1 = -2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 ; p^2 = -\vec{p}^2$$

$$q_1 q_2 = (\sigma_1 \sigma_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + (\sigma_1 \vec{p}_2 + \sigma_2 \vec{p}_1 + \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) ;$$

$$q \text{ quaternion pur} \iff q^2 \in \mathbb{R}_-^* .$$

(Ainsi l'équation dans H : $q^2 + 1 = 0$ a pour solution $q = \alpha i + \beta j + \gamma k$; $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, c'est-à-dire l'image dans H de la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$, à ne pas confondre avec $S_3 = \{q ; N(q) = 1\}$).

Les isométries vectorielles forment le groupe O_3 , elles sont engendrées par les symétries planaires vectorielles et pour une telle symétrie

$$s_{\vec{a}}^\perp : s_{\vec{a}}^\perp(\vec{p}) = \vec{p}' = \vec{p} - \frac{2\vec{a} \cdot \vec{p}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} \text{ donne } p' = p - \frac{ap+pa}{a^2} a = -a p a^{-1} = a p a / N(a).$$

(La non commutativité de H rend le calcul plus pénible). Pour la rotation

$$s_{\vec{b}}^\perp \circ s_{\vec{a}}^\perp \text{ on trouve } p'' = (b a) p (b a)^{-1} = t p t^{-1}.$$

Réciproquement, si $p'' = t p t^{-1}$, $t \in H^*$, $\vec{p} \mapsto \vec{p}''$ est une rotation Γ_t ; en effet, on voit que Γ_t est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace E , que

$$\Gamma_{t_1} = \Gamma_{t_2} \iff t_1 = \lambda t_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}. \text{ On peut par suite se limiter au cas } t \in S_3, \text{ on écrit}$$

$$\text{alors : } t = \sigma + \vec{p}, N(t) = \sigma^2 - \vec{p}^2 = \sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \text{ et on pose}$$

$$\vec{p} = \rho \vec{u}, \vec{u}^2 = 1 = -\rho^2 \text{ d'où } \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, t = \sigma + \rho u, t^{-1} = \sigma - \rho u.$$

Dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E , il vient
 $u = v w, v = w u, w = u v,$

$$\text{puis } \begin{cases} \Gamma_t(u) = u \\ \Gamma_t(v) = (\sigma^2 - \rho^2) u + 2 \rho \sigma w \text{ soit } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 - \rho^2 & -2 \rho \sigma \\ 0 & 2 \rho \sigma & \sigma^2 - \rho^2 \end{pmatrix} ; \\ \Gamma_t(w) = (\sigma^2 - \rho^2) w - 2 \rho \sigma v \end{cases}$$

Γ_t est la rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}u$ d'angle 2α ou $2\alpha - 2\pi$ avec $\cos \alpha = \sigma$, $\sin \alpha = \rho$.

L'application $H^* \xrightarrow{N} \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto N(t)$ est un morphisme de groupes,

$\text{Ker } N = S_3$ et $S_3 \xrightarrow{\Gamma} SO_3$ $t \mapsto \Gamma_t$ est un morphisme de groupes, surjectif mais non injectif vu que

$$\begin{cases} \sigma^2 - \rho^2 = a \\ 2 \rho \sigma = b \end{cases}, a^2 + b^2 = 1 \text{ entraîne } \sigma = \pm \sqrt{\frac{1+a}{2}},$$

$\rho = \pm \sqrt{\frac{1-a}{2}}$. Ainsi $\text{Ker } \Gamma = \{-1, +1\}$ d'où SO_3 is $S_3 / \{-1, 1\}$

(alors qu'en géométrie plane SO_2 is S_1).

(Par un raisonnement assez délicat, J. DIEUDONNE montre dans l'annexe IV que Γ n'a pas d'inverse à droite. En théorie des groupes de Lie S_3 est un revêtement universel de SO_3 dit revêtement spinoriel $\text{Spin}(3, \mathbb{R})$, $\text{Spin}(3, \mathbb{R})$ n'est pas le produit semi-direct de $\text{Ker } \Gamma$ par un sous-groupe isomorphe à SO_3).

II - APPLICATION A LA GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

On trouvera dans l'exposé de Monsieur COUTY préparatoire à la conférence de Monsieur LICHNEROWICZ à l'U.E.R. de LIMOGES (1975), les indications sur la structure symplectique en géométrie différentielle et mécanique analytique. On va indiquer ici la présentation donnée par CHEVALLEY à partir de H .

Pour $n \geq 1$, $H^n = \{\vec{a} = (a_i) \mid 1 \leq i \leq n; \forall i, a_i \in H\}$ est un H -espace vectoriel et si $\vec{a}, \vec{b} \in H^n$, on définit leur produit symplectique :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \in H, \quad \vec{a}^2 = \sum_{i=1}^n N(a_i) \in \mathbb{R} \subset H, \quad \vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}.$$

Comme $\vec{b} \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^n b_i \bar{a}_i = \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ on a les propriétés d'un produit hermitien. $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2}$ est la norme symplectique.

La géométrie de H^n se développe comme celle de tout espace vectoriel, on définit les endomorphismes de H^n , éléments de $\text{End}(H^n)$ et leurs matrices.

$f \in \text{End}(H^n)$ est dit symplectique si pour tout $\vec{a} \in H^n$ $\|f(\vec{a})\| = \|\vec{a}\|$, il est équivalent de dire $f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ou encore $t_{\vec{f}} = f^{-1}$ en notant $t_{\vec{f}}$ la transposée de l'application conjuguée. Les endomorphismes symplectiques forment le groupe symplectique $\text{Sp}(n)$.

On a vu que $q = (\sigma + \alpha i) 1 + (\beta + \gamma i) j \in \mathbb{C} 1 \oplus \mathbb{C} j$

alors si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in H^n$ et si on pose : $a_k = x_k + x'_k j = x_k + x_{n+k} j$ en notant $x'_k = x_{n+k}$, $x_k, x_{n+k} \in \mathbb{C}$; au vecteur $\vec{a} \in H^n$ correspond le vecteur $\vec{a}' \in \mathbb{C}^{2n}$ $\vec{a}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$.

A chaque $f \in \text{End}(H^n)$ correspond $f' \in \text{End}(\mathbb{C}^{2n})$ $f'(\vec{a}') = (f(\vec{a}))'$, cette correspondance donne un isomorphisme de $\text{Sp}(n)$ avec un sous-groupe $\text{SpL}(n, \mathbb{C})$ de $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$ appelé groupe symplectique linéaire (il reçoit la topologie induite par celle de $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$), $\text{Sp}(n)$ est alors muni de la topologie initiale transformant en homéomorphisme l'application $f \mapsto f'$.

Th. $f' \in \text{SpL}(2n, \mathbb{C})$ si et seulement si elle laisse invariante la forme

$$\text{bilinéaire } \sum_{k=1}^n (x_k y_{n+k} - y_k x_{n+k}) \text{ et appartient à } \mathcal{U}(2n).$$

* Soit $f = (q_{st}) \in \text{Sp}(n)$, $f' = (r_{kl}) \mid 1 \leq k, l \leq 2n$ son associée dans $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$, $\vec{a}' \in \mathbb{C}^{2n}$, $\vec{b}' \in \mathbb{C}^{2n}$ associés à $\vec{a} \in H^n$, $\vec{b} \in H^n$.

$$f'(\vec{a}') = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2n}), \quad f'(\vec{b}') = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2n}) \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_k = \sum_{l=1}^{2n} r_{kl} x_l, \quad \tilde{y}_k = \sum_{l=1}^{2n} r_{kl} y_l$$

$$\text{On } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n (x_k + x_{n+k} j) \overline{(y_k + y_{n+k} j)} = \sum_{k=1}^n (x_k + x_{n+k} j) (\bar{y}_k - \bar{y}_{n+k} j)$$

(se rappeler que : $y_k + y_{n+k} j = (\sigma_k + \alpha_k i) + (\beta_{n+k} + \gamma_{n+k} i) j$)

$$\text{donc } \overline{y_k + y_{n+k}} j = (\sigma_k - \alpha_k i) - \beta_{n+k} j - \gamma_{n+k} k =$$

$$(\sigma_k - \alpha_k i) - (\beta_{n+k} + \gamma_{n+k} i) j = \overline{y_k} - y_{n+k} j,$$

$$\text{d'où } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n (x_k \overline{y_k} + x_{n+k} \overline{y_{n+k}}) + \sum_{k=1}^n (x_{n+k} y_k - x_k y_{n+k}) j$$

$$(\text{Noter que } -x_{n+k} j y_{n+k} j = -x_{n+k} \overline{y_{n+k}} j^2 = x_{n+k} \overline{y_{n+k}} \text{ et } x_{n+k} j \overline{y_k} = x_{n+k} y_k j)$$

$$\text{Ainsi } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{b}' + \sum_{k=1}^n (x_{n+k} y_k y_{n+k}) j \text{ où } \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ est le produit}$$

symplectique et $\vec{a}' \cdot \vec{b}'$ le produit hermitien dans $\mathbb{C}^{2n}$.

$$\text{De même } f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b}) = f'(\vec{a}') \cdot f'(\vec{b}') + \sum_{k=1}^n (\tilde{x}_{n+k} \tilde{y}_k - \tilde{x}_k \tilde{y}_{n+k}) j = \vec{a}' \cdot \vec{b}' \text{ si et seulement}$$

si $f \in \text{Sp}(n)$ c'est-à-dire $f' \in \text{SpL}(2n, \mathbb{C})$. On conclut que $f' \in \text{SpL}(2n, \mathbb{C})$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n (x_k y_{n+k} - y_k x_{n+k})$ est conservée et $f'(\vec{a}') \cdot f'(\vec{b}') = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$.

Remarque : Les éléments de $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$ qui sans être unitaires conservent la forme bilinéaire $\sum_{k=1}^n (x_k y_{n+k} - y_k x_{n+k})$ constituent un sous-groupe $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ dit groupe symplectique complexe.

On a $\text{SpL}(2n, \mathbb{C}) \subset \text{Sp}(n, \mathbb{C}) \subset \text{GL}(2n, \mathbb{C})$.

Dans chacun des groupes $\text{Sp}(n)$, $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ il existe un voisinage de zéro homéomorphe à un ouvert d'un $\mathbb{R}^m$ avec $m = 2n^2 + n$ pour $\text{Sp}(n)$ et $2(2n^2 + n)$ pour $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$.

On en trouvera la démonstration dans C. CHEVALLEY :

Theory of Lie Groups, page 23. Les soixante sept premières pages de cet ouvrage forment la suite naturelle de l'annexe IV de DIEUDONNE.

Autres ouvrages :

- 1) Les corps non commutatifs par André BLANCHARD (PUF/Sup)
- 2) YAGLOM : Les nombres complexes (DUNOD)
- 3) Encyclopédia Universalis : Groupes classiques par J. DIEUDONNE
- 4) BOURBAKI : L 2 - chapitre 3 - édition ne varietur
- 5) La géométrie des groupes classiques : J. DIEUDONNE (Springer)
- 6) Pour l'Histoire :
BOURBAKI, BECKER et HOFMANN
BOYER : History of mathematics (Wiley)
G. CHILOV : Analyse mathématique. Fonctions de plusieurs variables réelles - 1^{ère} et 2^{ème} parties - page 357 (Mir)
- 7) BIRKOFF - MAC LANE - Algèbre, tome 1, page 291
- 8) GODBILLON : Géométrie et mécanique - chapitre VII
- 9) HUSEMOLLER : fibre bundles - chapitre 11, page 139