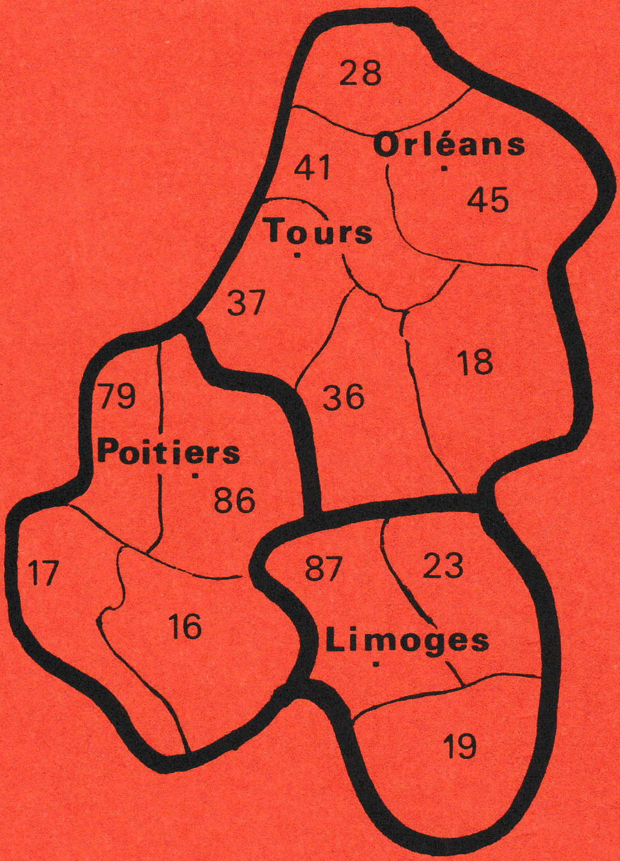
PLOT

n° 2



BULLETIN DES REGIONALES APMEP DE POITIERS LIMOGES ET ORLEANS-TOURS

trimestriel: **octobre 1976**

5f

plot

BULLETIN DES RÉGIONALES APMEP
DE POITIERS, LIMOGES ET ORLÉANS-TOURS

Sommaire du n°2 :

Rencontres

Pratique

Echanges

Communications

Agenda

TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉ*musique*

par Bernard PARZYSZ
Lycée de VANVES - IREM de PARIS-SUD

Une approche des procédés imitatifs en musique à l'aide des mathématiques. Où l'on découvre que Bach, Schoenberg et bien d'autres, manipulaient le groupe de Klein sans le savoir ...

Que la Musique et les Mathématiques présentent des affinités ne fait aujourd'hui plus de doute pour personne. Cela se comprend aisément, d'ailleurs la Musique est basée sur le Son, qui est un phénomène physique caractérisé en particulier par :

- sa durée (→rythme, c'est-à-dire séquence de rapports de durées, donc de nombres)
- sa hauteur (basée sur les vibrations d'une corde, d'un colonne d'air,...).

LEIBNIZ ne qualifiait-il pas la Musique d'"arithmétique secrète" ? Et, aux origines des gammes -chinoise ou occidentale- ne trouve-t-on pas la division d'une corde vibrante ou d'un tuyau sonore ?

Ceci étant posé, il se trouve que nos élèves du secondaire ont à leur programme d'études aussi bien des Mathématiques que de la Musique (en option seulement dans le second cycle). D'où l'idée toute naturelle d'essayer de coordonner, sur certains points précis, l'enseignement de ces deux disciplines. Cette coordination fut amorcée au Lycée Michelet de Vanves, en ce qui concerne l'approche de la gamme, et même (projet ambitieux, mais dont l'écho qu'il trouva auprès des élèves tendrait à prouver que nous avions eu raison) l'étude détaillée de l'écriture d'une Invention de BACH.

Je voudrais donc ici esquisser une approche, en classe, de notre gamme dite "tempérée" (1), ainsi que des principaux procédés "imitatifs" de la musique dite classique, ce qui nous permettra de déboucher sur la musique sérielle, telle que l'ont conçue et développée SCHOENBERG et l'Ecole de Vienne.

(1) Pour ceux que cela pourrait intéresser, j'ai retracé sa (lente) genèse, en tant qu'approximation des gammes antérieures, dans un article du Bulletin de l'APMEP (n°296.pages 777-808) : Approximation en Musique.

I - LES TONALITES

Matériel nécessaire : Carillon (métallophone, xylophone,...) chromatique à deux rangs, c'est-à-dire dont les barres sont disposées comme les touches d'un clavier de piano. Si les noms des notes sont marquées sur les barres, les cacher au début. Il serait bon de "préparer le terrain auditif", d'abord par une prise de contact des élèves avec l'instrument (deux rangées de barres, sons de plus en plus aigus de la gauche vers la droite, etc...), mais également par des exercices de sensibilisation de l'oreille ; par exemple deux barres du carillon étant frappées successivement par le maître, déterminer (à l'audition uniquement) lequel des deux sons émis est plus aigu (plus "haut") que l'autre ; on restreint progressivement l'intervalle entre les deux sons, pour arriver jusqu'au demi-ton, en inventant au besoin d'autres types d'exercices pour permettre de résoudre les difficultés locales.

1) L'octave :

On n'utilise ici que la première rangée du carillon (correspondant aux touches blanches du piano). On demande aux enfants de choisir une barre quelconque (mais plutôt vers le milieu de la rangée), et de rechercher la barre dont le son "va le mieux" avec celui de la barre prise comme référence (en frappant simultanément la barre de référence et une autre barre du carillon). Ils constateront que la nouvelle barre est située 7 crans à droite (ou à gauche) de la barre de départ, et ceci, quelle que soit cette barre.
Contrôle : une mailloche dans chaque main, on part de la barre la plus à gauche du carillon (main gauche) et de la barre située 7 crans plus à droite (main droite) ; en frappant simultanément les deux barres, puis en recommençant la même chose par translations successives des deux mains d'un cran vers la droite, on constate que dans tous les cas les sons obtenus sont bien appariés.

2) Les notes :

Pour "baptiser" les barres de la première rangée du carillon on peut, ou bien donner un nom différent à chacune, ou bien -étant donné ce qui précède- ne prendre que 7 noms (d'où 7 classes d'équivalence de barres) et repérer chaque barre à l'intérieur de sa classe par un procédé quelconque (numéro ou autre). On débouche ici sur l'appellation traditionnelle des sons : La 3, Sol 2, etc...

Les enfants ont alors fait connaissance avec les sons ("bruits" émis par les barres), puis avec les notes (identifiées par leurs noms : DO, RE,....,LA,SI)

3) La tonalité de DO Majeur :

On demande d'essayer de jouer les premières notes de "Frère Jacques" jusqu'à "Dormez-vous" inclus (2),en n'utilisant cette fois encore que les barres de la première rangée. On constate que cela n'est possible qu'en partant des barres marquées DO ou SOL. On peut alors essayer de comparer entre eux (c'est-à-dire, finalement, de classer) les "écarts de son" entre deux barres consécutives de la première rangée du carillon.

(2) ou tout air simple, connu de tous (à condition qu'il soit écrit dans une tonalité majeure).

On a vu ci-dessus que, partant d'un DO ou d'un SOL, on peut dans les deux cas jouer "Frère Jacques" sur la première rangée du carillon. Si on écrit, en regard de la syllabe correspondante de la chanson, le nom de la lame jouée, on obtient le tableau suivant :

Paroles	Frè	re	Ja	cques	(bis)	Dor	mez	vous ?	(bis)
1ère barre : DO	DO	RE	MI	DO		MI	FA	SOL	
1ère barre : SOL	SOL	LA	SI	SOL		SI	DO	RE	

Ce tableau nous permet d'établir les équivalences suivantes entre écarts :

(DO,RE) ∼ (SOL,LA) ("Frè-re")
(RE,MI) ∼ (LA,SI) ("re-Ja")
(MI,FA) ∼ (SI,DO) ("Dor-mez")
(FA,SOL) ∼ (DO,RE) ("mez-vous ?")

Proposons maintenant aux enfants de jouer la même chose, mais en partant de RE, cette fois. Bien entendu, on sait d'après les essais précédents que ce sera impossible si l'on s'impose de n'utiliser que la première rangée de carillon ; d'où une recherche en deux temps :

a) détermination de la barre "qui ne va pas"

b) remplacement de cette barre par une barre de la deuxième rangée (si c'est possible) qui permette de retrouver l'air connu.
On arrive alors au résultat suivant : lorsqu'on commence par un RE, la barre qui ne convient pas est le FA ; le problème admet cependant une solution, qui consiste à remplacer la barre FA par la barre voisine (mais appartenant à l'autre rangée du carillon) marquée "FA#" (3). La question qui vient alors naturellement à l'esprit est : Qu'est-ce que c'est que ce "FA#"? Et d'abord, est-il plus aigu ou plus grave que le FA ? Réponse aisée grâce aux exercices préparatoires : "FA#" est plus aigu que FA. Conséquence logique : l'écart (MI,FA) est "plus petit" que l'écart (MI, FA#).

(3) Pour l'instant, # n'est qu'un signe graphique, permettant de distinguer les deux barres "FA" et "FA#".

On a alors le tableau de correspondance suivant :

Paroles	Frè	re	Ja	cques	Dor	mez	vous ?
1ère barre : RE	RE	MI	FA#	RE	FA#	SOL	LA

Ce tableau, comparé avec le précédent, montre que l'on peut classer les écarts rencontrés en deux classes (d'équivalence) seulement :

. Ecarts "de type A" (appelés tons) : (DO,RE), (RE,M), (FA,SOL), (SOL,LA), (LA,SI)
. Ecarts "de type B" (plus "petits" appelés "demi"- tons): (MI,FA) et (SI,DO).

On peut alors schématiser l'octave de la façon suivante, où des écarts équivalents sont représentés par des segments de même longueur.

figure 1

Voilà donc les enfants en possession de la structure de la tonalité de DO Majeur ; ils pourront constater (en essayant) que la plupart des airs qu'ils connaissent peuvent être joués (en choisissant judicieusement la note de départ) en utilisant uniquement la première rangée du carillon. Mais il reste maintenant à justifier l'appellation de "demi-ton" donnée aux écarts de type B (ce qui, par la même occasion, nous conduira à la gamme chromatique tempérée).

4) La gamme chromatique :

On poursuit la recherche commencée plus haut, et qui consiste à jouer "Frère Jacques" (jusqu'à "Dormez-vous ?") en prenant comme points de départ successifs les barres de la première rangée du carillon.
Les cas où on part de DO, RE et SOL ont déjà été vus. Si l'on part de MI, on constate qu'on est obligé de "hausser" le FA (→FA #) et le SOL (→SOL #).
Si l'on part de FA, il faut cette fois "baisser" le SI et remplacer la barre correspondante par une barre marquée "LA #" ou "SI b" (4) (suivant le modèle de carillon utilisé)... Finalement, la recherche pourra être schématisée par le tableau ci-dessous :

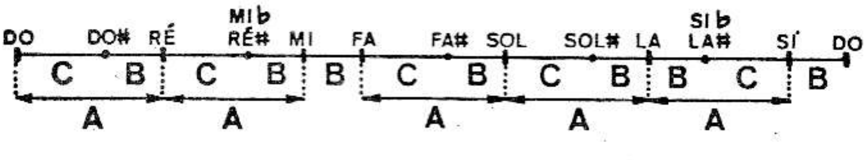
(4) b n'est lui aussi, qu'un signe pour l'instant.

Paroles	Frè	re	Ja	cques	Dor	mez	vous?
1ère barre : DO	DO	RE	MI	DO	MI	FA	SOL
1ère barre : RE	RE	MI	FA #	RE	FA #	SOL	LA
1ère barre : MI	MI	FA #	SOL #	MI	SOL #	LA	SI
1ère barre : FA	FA	SOL	LA	FA	LA	SI b	DO
1ère barre : SOL	SOL	LA	SI	SOL	SI	DO	RE
1ère barre : LA	LA	SI	DO #	LA	DO #	RE	MI
1ère barre : SI	SI	DO #	RE #	SI	RE #	MI	FA #

Le classement des écarts nous permet de répartir les 12 notes (5) obtenues au total de la manière suivante.

(5) notes et non pas sons; il est facile de vérifier que les barres de la seconde rangée portant le même nom sont appariées (octave) comme celles de la première rangée.

figure 2



Par rapport à la structure à 7 notes trouvée auparavant (figure1), on voit que les écarts de type A ont été "amputés" d'un écart de type B, ce qui fait apparaître un nouveau type d'écart (type C). Entre deux barres consécutives (première et deuxième rangées ensemble) on n'a donc que deux types d'écart :

. Type B : (DO #,RE), (MI,FA) etc.
. Type C : (DO,DO #), (RE,RE #) etc. (6)

(6) Ces deux types correspondent respectivement aux demi-tons diatonique et chromatique.

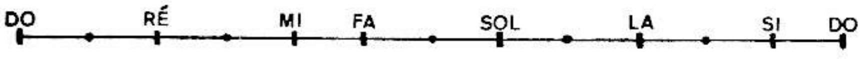
Proposons-nous maintenant de comparer ces deux types d'écart , il suffit par exemple de recommencer à jouer "Frère Jacques", mais en partant cette fois de FA # ; on obtient le résultat suivant :

Paroles	Fré	re	Ja	cques	Dor	mez	vous?
1ère barre : FA#	FA#	SOL#	LA# (SI♭)	FA#	LA# (SI♭)	SI	DO#

Comparé avec ce que l'on avait en partant de DO, ce tableau nous amène à la conclusion que (LA#,SI) ∼ (MI,FA), et donc que les écarts de type B et de type C sont équivalents. Il n'y a donc, dans cette gamme chromatique, qu'un seul type d'écart : le demi-ton.

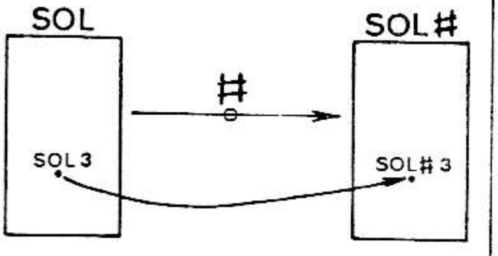
Ceci, du même coup, justifie l'appellation de "demi" ton, et précise la structure de la tonalité de DO Majeur.

figure 3

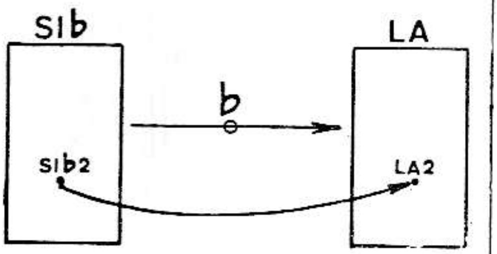


NOTA BENE: On peut faire remarquer que, les barres dont le nom est suivi de "#" étant un demi-ton plus hautes que les barres originelles, rien n'empêche de considérer une application (notée #) portant sur les notes et qui associe, à la classe d'un son quelconque, la classe du son situé un demi-ton plus haut que le premier.

Ceci ne pose pas de problème puisque l'application #, définie au départ sur un ensemble de sons, est compatible avec la relation d'équivalence dont les classes sont les notes.



On pourra également définir, de la même manière, l'application ♭



5) Les notations :

Les enfants sont déjà en possession des appellations classiques des sons ; on peut maintenant leur demander de chercher des codages pour les barres (→ sons) du carillon, en tenant compte de la notion de note ; ils seront donc amenés à rechercher des codages avec :

- un premier système à 12 signes (puisqu'il y a 12 notes différentes)
- un second système qui indiquera l'élément choisi dans chaque classe (7).

S'ils veulent transcrire des partitions dans leurs codages, ils auront besoin d'indiquer également la notion de durée, d'où un troisième système, qui se superposera aux deux précédents.

(7) Remarquons que l'écriture musicale classique ne procède pas de cette façon, puisqu'elle se base sur les 7 noms de notes de la tonalité de Do Majeur.

Après ces codages "expérimentaux", on pourra introduire (s'il n'a pas déjà été trouvé par les enfants eux-mêmes) le chiffrage suivant, qui présente d'autant plus d'intérêt que c'est celui qui est utilisé par les compositeurs actuels qui s'aident d'un ordinateur : les sons sont codés grâce à un système de numération à base 12 :

. unités du premier ordre : chaque barre est repérée, à l'intérieur d'un octave (DO→DO) par le nombre de demi-tons la séparant de la barre "DO" la plus grave (d'où 12 "chiffres", habituellement notés 00,01,02,..., 09,10,11)

. unités du second ordre (que l'on a déjà rencontrées) : les "numéros" d'octave habituels, croissant du grave à l'aigu (8). C'est ainsi que le "nombre" (à 2 "chiffres") 3.06 représentera le FA# 3 (ou encore le SOL♭ 3).

(8) Cette notation exclut les notes les plus graves, qui ne sont d'ailleurs jamais utilisées.

Il resterait à établir un codage pour les notes ; le plus simple est bien sûr de les identifier aux unités du premier ordre utilisées ci-dessus : le SOL sera noté 07, le MI♭ : 03, etc... Les notes étant classes d'équivalence de sons, nous aurons ainsi : 06 = {0.06,1.06,2.06...} .

Début du Thème des Variations pour orchestre op. 31 d'Arnold Schoenberg

(mesures 34 à 38)

Instrumentation

1 : Hautbois

2 : Cor anglais

3 : Clarinette

4 : Cor

5 : Basson

6 : Contrebasse

7 : Violoncelle

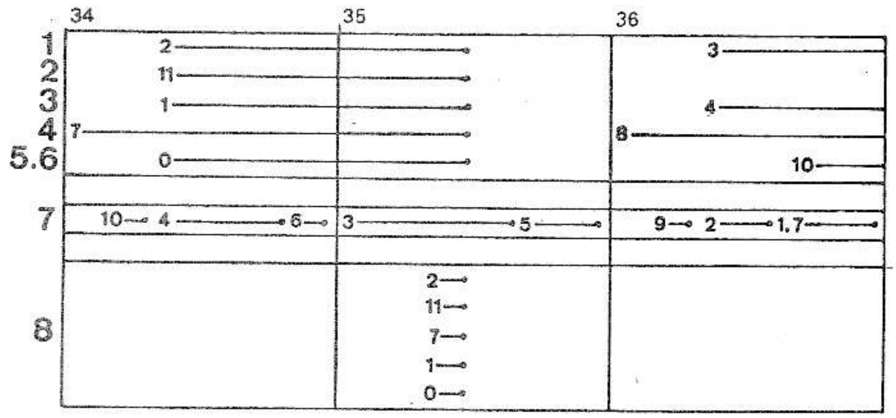
8 : Harpe

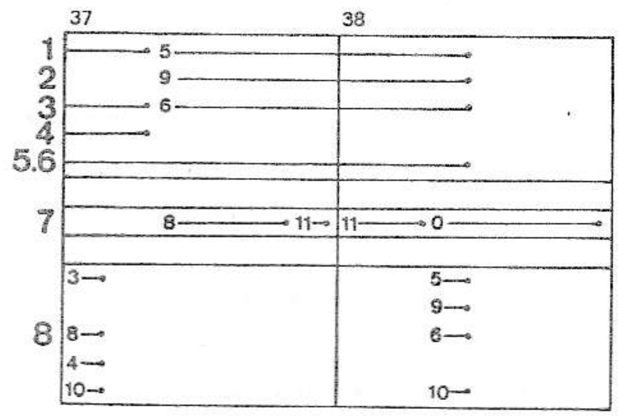
6) Dans le second cycle :

Avec les élèves de second cycle, l'approche de la gamme pourra se faire plus rapidement et aisément si on la rattache à une étude sommaire, en Physique, des cordes vibrantes, qui montrera que la fréquence du son fondamental émis par une corde est inversement proportionnel à sa longueur (toutes autres choses restant égales par ailleurs), soit $f = \frac{k}{l}$

On se procurera ensuite par un moyen quelconque une guitare (objet très courant parmi les élèves de second cycle), que l'on fera observer attentivement : principe de production du son, tension de la corde, présence de "filets" métalliques divisant le manche en "cases", longueur de corde qui vibre selon la position du doigt,...
Expérience : on "sonne" une corde à vide, puis on cherche expérimentalement la position du doigt sur le manche qui donne l'octave du premier son. Si on mesure alors les longueurs de corde qui vibrent dans les deux cas, on constate (si la guitare est bien montée) que l'octave est obtenue lorsque la longueur qui vibre est moitié de la longueur à vide ; si f est la fréquence du premier son, celle du second est donc 2f.

On constate par la même occasion que l'octave est obtenue lorsque le doigt est placé sur la 12è case (en partant de l'extrémité du manche) : la guitare est donc construite de façon à placer 12 sons dans l'octave. Question qui vient alors tout





<u>Page de gauche</u> : Notation du passage en écriture classique (d'après Editions Universal 1956).

<u>Ci - dessus</u> : <u>Transcription chiffrée du passage précédent</u>, avec les conventions suivantes :

1) Seules les notes (non les sons) sont représentées et, pour des raisons d'économie de place, elles sont codées 0, 1, 2, ... 11 au lieu de 00, 01, ... 11 théoriquement.

2) Les instruments de l'orchestre (numérotés de la même façon que dans la représentation en écriture classique) correspondent chacun à une ligne, sauf la harpe qui, pouvant produire plusieurs sons simultanés, a par conséquent droit à plusieurs lignes (ici 5).

3) Le temps est représenté en abscisses, le trait faisant suite à une note signifiant que celle-ci se prolonge jusqu'à l'instant correspondant au point final.

naturellement à l'esprit : Comment est faite cette répartition des 12 sons ? Pour le savoir il suffit de demander aux élèves de mesurer les longueurs vibrantes de corde, le doigt étant posé successivement sur les cases du manche (en partant de l'extrémité), et de chercher comment chaque nouvelle longueur est liée à la précédente. Après quelques tâtonnements et calculs, quelqu'un trouvera certainement que le rapport de deux longueurs consécutives semble être constant. Admettant alors cette hypothèse, on en déduit immédiatement que le rapport r des fréquences de deux sons consécutifs est constant (puisque $f = \frac{k}{l}$)

et enfin que ce rapport est égal à $2^{1/12}$ (puisque $\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \dots = \frac{f_{12}}{f_{11}} = r$ et que $f_{12} = 2f$)

Les fréquences successives des 12 sons de l'octave sont par conséquent :
f ; $2^{1/12}f$; $2^{2/12}f$;...; $2^{11/12}f$.
La répétition du procédé de division de l'octave vers l'aigu et vers le grave montre qu'on peut identifier chaque son au numérateur i de la fraction i/12 intervenant dans l'expression de sa fréquence ; ceci nous fournit donc une "échelle de sons" $\mathcal{E}$ en bijection avec $\mathbb{Z}$. Une fois établie cette bijection, on fera remarquer que la relation $\mathcal{R}$: "différer d'un nombre entier d'octaves" est une équivalence sur $\mathcal{E}$, et que l'on a : $i \mathcal{R} j \Leftrightarrow i \equiv j \ (12)$.
Les classes d'équivalence sont les <u>notes</u>, et l'ensemble-quotient $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ (identifié à $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$) la <u>gamme chromatique</u>. On peut alors aborder le problème du codage des sons (voir plus haut).

7) Les tonalités majeures :

Nous pouvons, on l'a vu, définir la tonalité de DO Majeur comme étant le sous-ensemble suivant de l'ensemble des 12 notes :
M_o = {00 ; 02 ; 04 ; 05 ; 07 ; 09 ; 11}.
(en utilisant le chiffrage vu plus haut). La note 00, c'est-à-dire DO, est appelée la tonique de la tonalité.

Etant donnés que tous les écart entre sons consécutifs de l'échelle de sons sont équivalents, chacune des 12 notes de la gamme chromatique peut jouer le rôle de tonique, et on peut donc définir ainsi 11 autres tonalités majeures (toutes distinctes ou non, on le verra plus loin). Un problème intéressant (et important pour la musique tonale) peut être soulevé ici : celui des tonalités (majeures) voisines. Il peut se formuler ainsi : "Quelle doit être la tonique pour que la nouvelle tonalité ait le plus possible de notes communes avec DO Majeur ?" Ce problème peut se résoudre de deux façons :

. expérimentale, à l'aide du carillon ; on essaie de "monter la gamme" en partant des diverses barres (des deux rangées), et en utilisant le moins possible la seconde rangée.

. théorique, à l'aide d'une feuille de papier et d'un crayon, en écrivant les translatés successifs (dans $Z/_{12Z}$) de M_o, et en repérant le nombre de notes communes :

M_o : 00 02 04 05 07 09 11
M_1 : 01 03 05 06 08 10 00 2 notes communes
M_2 : 02 04 06 07 09 11 01 5 notes communes
....
M_{11}: 11 01 03 04 06 08 10 2 notes communes

Résultats de cette recherche :

a) Il y a bien 12 tonalités majeures distinctes

b) Il existe deux tonalités majeures qui ne diffèrent que par une seule note de DO Majeur. Ce sont :

. FA Majeur (note différente : 10 au lieu de 11, soit SI♭)

. SOL Majeur (note différente : 06 au lieu de 05, soit FA♯).

Dans le Second cycle, et dans la mesure où le niveau des élèves le permettra, on pourra ainsi aborder les 7 tonalités à dièses et les 7 tonalités à bémols (9). Sinon, on ne les définira que dans la mesure des besoins.

(9) Pour plus de détails, voir la brochure APMEP : Musique "classique" et mathématique "moderne".

8) Les tonalités mineures :

On définit cette fois la tonalité de DO mineur comme étant le sous-ensemble (également à 7 notes) :
m_o = {00 ; 02 ; 03 ; 05 ; 07 ; 08 ; 11}
Par rapport à DO Majeur, on trouve deux notes différentes :

. 03 au lieu de 04, c'est-à-dire MI♭ ;
. 08 au lieu de 09, c'est-à-dire LA♭.

Comme pour le Majeur, il existe 12 tonalités mineures ; chacune d'elles est dite "relative" d'une tonalité majeure dont elle ne diffère que d'une note, et le problème du "voisinage" s'étend à l'ensemble des tonalités, majeures et mineures(10).

(10) voir note 9

II - PRINCIPAUX TYPES D'IMITATION

L'écriture d'une oeuvre musicale dans une tonalité donnée est une contrainte (qui s'explique historiquement) : on s'oblige à n'utiliser (sauf "accident"), parmi les 12 notes existantes, que 7 d'entre elles, appartenant à la tonalité choisie. La musique dite "classique" a été la plupart du temps construite autour de la notion de "thème", phrase musicale caractéristique qui revient à diverses reprises dans l'oeuvre. Il peut y avoir plusieurs thèmes différents, d'importance inégale, et ils constituent, avec la tonalité, l'un des facteurs d'unité de la pièce. Pour éviter cependant de lasser l'auditeur, cest thèmes réapparaissent souvent sous des formes voisines ("imitées"), reconnaissables en général, mais différentes de la forme initiale (11). Ces distorsions du thème varient suivant les contraintes que s'impose le musicien, qui a à résoudre le problème suivant : "Etant donnée une phrase musicale P, construire une phrase P' ressemblant le plus possible à P, mais respectant certaines contraintes (C_i)". Ce problème peut être posé aux élèves, en leur donnant les contraintes à respecter. Par exemple :

(11) La forme la plus élémentaire d'imitation consiste bien sûr à répéter purement et simplement le thème; on trouve parfois la même phrase dans deux voix différentes, l'une étant légèrement décalée dans le temps par rapport à l'autre (imitation en canon).

<u>1er type de contraintes : P' doit commencer par un son donné (transposition)</u>

D'après ce qui a été vu au §1, cette seule contrainte n'offre pas de difficultés. Avec la notation des sons en base 12, on obtiendra le passage P' par une simple translation dans l'échelle des sons, l'amplitude de cette translation étant déterminée par le premier son de P et le premier son (donné) de P'.
Reprenons l'exemple de "Frère Jacques", qui s'écrit, en notation traditionnelle :

et donc, avec la numération à base 12 (et en supprimant les reprises), sous la forme du n-uplet suivant :

$$P = (3.00, 3.02, 3.04, 3.00, 3.04, 3.05, 3.07).$$

Si la contrainte est de prendre comme nouveau son de départ le MI 3 (chiffré 3.04), la translation à utiliser sera définie par :

$$t : 3.00 \longmapsto 3.04$$

Ceci permettra de trouver de proche en proche les images de tous les éléments de P, et donc d'obtenir P' :

$$P' = (3.04, 3.06, 3.08, 3.04, 3.08, 3.09, 3.11)$$

Soit en notation classique :

N.B. : Le chiffrage à base 12 présente l'échelle de sons comme un <u>sous-ensemble</u> de N, ce qui pose des problèmes théoriques en ce qui concerne les <u>translations</u> : ce ne sont pas des bijections de $\mathcal{E}$, mais de simples fonctions. Cependant, dans la pratique, on se place toujours "loin des bords" de $\mathcal{E}$, ce qui fait qu'on n'a pas de problème pour définir l'image de P ; un moyen d'atténuer cette difficulté est de considérer non plus les sons, mais les notes, dont l'ensemble peut être -on l'a vu- identifié à $Z/_{12Z}$. Les translations à considérer sont maintenant des translations de $Z/_{12Z}$, donc bijectives et sans problème. Une telle translation associe une note à une autre ; il reste donc à choisir, pour chaque note, le représentant (son) qui convient, ce qui peut se faire aisément en considérant l'amplitude des intervalles successifs dans le passage P. Reprenons notre bon vieux "Frère Jacques" ; du point de vue des notes, il s'écrira cette fois :

$$p = (00, 02, 04, 00, 05, 07)$$

Le transformé de p doit commencer par un MI (c'est-à-dire 04) ; la translation à considérer est donc :

$$t_4 : Z/_{12Z} \longrightarrow Z/_{12Z}$$
$$i \longmapsto i+4$$

et on aura p' = (04,06,08,04,08,09,11).
Le <u>son</u> de départ étant MI 3 (3.04), le deuxième son de P' sera forcément le FA♯3 (par comparaison avec les deux premiers sons de P), et ainsi de suite...
Une telle imitation s'appelle une <u>transposition</u> de P. Elle présente la particularité de fournir un passage P' qui est écrit <u>dans une autre tonalité</u> que P (on dit qu'elle fait "moduler") : la tonalité de P' est, par construction même, la translatée de la tonalité de P.
Pour les élèves plus âgés, on peut alors donner des exemples moins élémentaires.

Voir un exemple musical tiré de la littérature classique dans l'Annexe (page suivante).

<u>2è type de contraintes : P' doit commencer par un son donné, mais être écrit dans la même tonalité que P (imitation directe sans modulation)</u>

Les enfants qui sont partis de la manipulation du carillon ont déjà été confrontés à ce problème (jouer "Frère Jacques" en commençant pas une barre quelconque, et sans utiliser les barres de la seconde rangée). Ils ont déjà remarqué qu'il admettait en général pas de solution et qu'i fallait utiliser une ou plusieurs barre de la seconde rangée si on voulait obtenir coûte que coûte un résultat. Si l'on s'impose de ne pas "tricher", on n'obtiendra qu'une "approximation" de l'air initial. Les enfants pourront constater expérimentalement que la meilleure approximation possible (la barre de départ étant fixée) sera obtenue par une translation sur les barres de la première rangée du carillon.

Il est donc plus simple, en ce qui concerne ce type d'imitation, d'utiliser un codage qui ne fasse intervenir que les 7 notes de la tonalité à l'intérieur de laquelle on s'impose de rester (et non plus les 12 notes de la gamme chromatique). Le plus naturel consiste à identifier les 7 notes de la tonalité donnée (majeure ou mineure) aux 7 éléments de $Z/_{7Z}$.
Ce codage présente l'avantage intéressant que les translation envisagées ci-dessus correspondent aux translations habituelles dans $Z/_{7Z}$.

Exemple : dans la tonalité de DO Majeur, nous aurons :
DO : □ ; RE : I ; MI : II ; FA : III ; SOL : IV ; LA : V ; SI : VI . (12)

(12) *Utilisation des chiffres romains pour éviter toute confusion avec le codage dans Z/12Z. Il a fallu inventer un "pseudo zéro".*

"Frère Jacques" sera donc cette fois codée :

π = (□, I, II, □ , II, III, IV)

Si on en cherche l'imitation directe sans modulation commençant pas le MI 3, elle sera obtenue grâce à la translation :

$$t_{II} : Z/_{7Z} \longrightarrow Z/_{7Z}$$
$$T \longmapsto T + II$$

ANNEXE

1) *TRANSPOSITION*

Extraits du "Solo per il Cembalo" (J.-S. Bach), du Klavierbüchlein :

A 

B 

Transcription dans Z/12Z :

A : 03 07 10 10 10 00 02 03 03 05 07 08 07 05 03 02 00 10 08 07 10 03
B : 10 02 05 05 05 07 09 10 10 00 02 03 02 00 10 09 07 05 03 02 05 10

N.B.: Noter les changements d'octave dans la transposition du thème.

2) *IMITATION DIRECTE SANS MODULATION*

Extrait du Menuet de la Deuxième Suite Française (J.-S. Bach) :

Transcription dans Z/12Z (MI♭ Majeur).

A : III II I III VI V IV VI I III II I
B : II I □ II V IV III V □ II I □

3) *IMITATION A L'UNISSON DANS LA TONALITE HOMONYME*

Extraite du 1er mouvement de la Sonate pour piano K.533 (Mozart)

A 

B 

Transcription dans Z/7Z (Pour A: FA Majeur. Pour B : FA Mineur).

IV III II I □ II I III VI □ IV

Et nous aurons alors :

$\pi' =$ (II,III,IV,II,IV,V,VI), c'est-à-dire (MI,FA,SOL,MI,SOL,LA,SI).
Quant à la détermination des sons, elle se fera sans problème comme dans le cas de la transposition.; il y aura cependant ici, dans certains cas, de légères variations d'amplitude des intervalles :

(Exemple musical : voir Annexe ci-contre)

3è type de contraintes : P' doit commencer par le même son que P, mais être écrit dans une autre tonalité (imitation à l'unisson)

Le cas le plus fréquent est celui de l'imitation à l'unisson dans la tonalité homonyme (deux tonalités sont dites homonymes si elles portent le même nom, mais l'une étant majeure et l'autre mineure).

Exemple : "Frère Jacques" est écrit en DO Majeur, c'est-à-dire en n'utilisant que les éléments de $M_o = \{00;02;04;07;09;11\}$.

Si on veut l'imiter à l'unisson dans la tonalité homonyme, son transformé sera écrit en DO mineur, $m_o = \{00;02;03;05;07;08;11\}$.

Comme on l'a déjà remarqué, DO mineur s'obtient à partir de DO Majeur en remplaçant simplement MI (04) par MI♭ (03), et LA (09) par LA♭ (08).
On aura donc l'imitation cherchée en remplaçant, à chaque fois qu'elles apparaîtront les notes MI et LA respectivement par MI♭ et LA♭. Ceci revient à remplacer chaque note de DO Majeur par la note de DO mineur portant le même numéro (dans l'identification avec $Z/_{7Z}$). Dans le cas de "Frère Jacques" on aura donc :

$Z/_{7Z}$	DO Majeur	DO mineur
□	00	00
I	02	02
II	04	03
III	05	05
IV	07	07
V	09	08
VI	11	11

L'imitation de "Frère Jacques" sera donc ici :

p' = (00,02,03,00,03,05,07), soit en définitive

(Exemple musical : voir annexe ci-contre)

4è type de contraintes : P' doit commencer par un son donné, être écrit dans la même tonalité que P, mais le sens des intervalles successifs de P doit être inversé, et leur amplitude respectée dans la mesure du possible (imitation par mouvement contraire)

Premier problème : Quel type de notation utiliser ? Celle qui est basée sur $Z/_{12Z}$ ou celle qui est basée sur $Z/_{7Z}$?
Puisque l'on s'impose de rester à l'intérieur d'une même tonalité, la seconde notation sera certainement plus adaptée.

Un premier résultat qui peut être constaté par les élèves (sur un exemple) est que le respect intégral de l'amplitude des intervalles est en général impossible. Soit à imiter "Frère Jacques" (pourquoi changer ?) par mouvement contraire, en commençant par SOL 3 :

Expérimentalement, si l'on veut respecter l'amplitude des intervalles, on obtient le résultat suivant (en écrivant les sons de P et en notant l'amplitude des intervalles successifs par le nombre de demi-tons séparant les deux sons, affecté du signe + si on passe du grave à l'aigu, et du signe - dans le cas contraire)

FRE — RE JA — CQUES DOR — MEZ VOUS ?

ORIGINAL : $3.00 \xrightarrow{+2} 3.02 \xrightarrow{+2} 3.04 \xrightarrow{-4} 3.00 \xrightarrow{+4} 3.04 \xrightarrow{+1} 3.05 \xrightarrow{+2} 3.07$

IMITATION : $3.07 \xrightarrow{-2} 3.05 \xrightarrow{-2} 3.03 \xrightarrow{+4} 3.07 \xrightarrow{-4} 3.03 \xrightarrow{-1} 3.02 \xrightarrow{-2} 3.00$

On obtient ainsi, on le voit, la note 03 (MI♭), étrangère à la tonalité de DO Majeur. On peut penser à la remplacer par la note 04 (MI), inutilisée jusque-là et voisine de 03. Cette recherche expérimentale montre que le principe consisteà établir une <u>permutation</u> de $Z/_{7Z}$ qui "inverse" le sens des intervalles, en changeant aussi peu <u>que possible</u> leur amplitude. L'idée qui peut venir à ce moment est de considérer les <u>symétries</u> de $Z/_{7Z}$, c'est-à-dire les applications de la forme :

$$\begin{aligned} s_U : Z/_{7Z} &\longrightarrow Z/_{7Z} \\ T &\longmapsto U-T \end{aligned}$$

Reprenons l'exemple de "Frère Jacques" que l'on veut imiter cette fois par mouvement contraire en commençant par SOL 3. DO doit être transformé en SOL, donc on doit avoir $s_U(\square) = IV$; d'où U = IV. On aura donc :

$$\begin{aligned} s_{IV} : Z/_{7Z} &\longrightarrow Z/_{7Z} \\ \square &\longmapsto IV \\ I &\longmapsto III \\ II &\longmapsto II \\ III &\longmapsto I \\ IV &\longmapsto \square \\ V &\longmapsto VI \\ VI &\longmapsto V \end{aligned}$$

et, puisque $\pi = (\square, I, II, \square, II, III, IV)$, on aura :

$\pi' = (IV, III, II, IV, II, I, \square)$; soit finalement

(Exemple musical : voit annexe ci-contre).

<u>5è type de contraintes : Le "Canon à l'écrevisse" (imitation récurrente)</u>

Il s'agit cette fois du procédé -tout à fait abstrait du point de vue musical- qui consiste à énoncer une phrase musicale en commençant pas le dernier son ; c'est-à-dire que, si l'on a $P = (S_1, \ldots, S_n)$ on aura $P' = (S_n, \ldots, S)$.
Ce procédé n'est pas du tout imaginaire, et à été utilisé par des compositeurs aussi illustres que J.S. BACH (voir exemple en annexe).

Voici ce que donnerait "Frère Jacques" (jusqu'à "Dormez-vous ?") transformé par ce procédé :

N.B. : Cette transformation n'introduit bien sûr aucun changement de tonalité. D'autre part, il est normalement impossible (à moins d'avoir un esprit extra-ordinairement abstrait) de reconnaître à l'audition la phrase dont on est parti.

(Exemple musical : voir annexe ci-contre)

Voici donc passés en revue les principaux types d'imitation utilisés par les compositeurs "classiques". Ces divers types peuvent bien sûr être combinés entre eux pour donner de nouvelles imitations (les exemples fourmillent). D'autre part on peut, avec les élèves les plus âgés, prolonger l'étude précédente pour déboucher sur la musique "sérielle", dont -comme on le verra- un certain nombre de règles sont issues des procédés imitatifs rencontrés ci-dessus.

ANNEXE

4) *IMITATION SANS MODULATION PAR MOUVEMENT CONTRAIRE*

Extraits de "l'Art de la Fugue" (J.-S. Bach).

A 

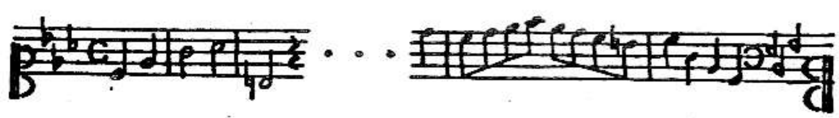
B 

Transcription dans Z/7Z (RE Mineur).

A : IV II VI I II III II I
B : IV II IV V IV III II I II III IV

5) *CANON A L'ECREVISSE*

Le n° 3a (Canon a deux voix) de "l'Offrande Musicale" (J.-S. Bach).



(La première voix joue la partition dans le sens habituel tandis que la seconde la joue de droite à gauche, en commençant par la fin).

III - OU KLEIN FAIT POINTER LE BOUT DE SON GROUPE

Si nous jetons un regard en arrière sur celles des imitations rencontrées qui ne font pas moduler, nous trouvons :

- les imitations directes sans modulation (bien sûr)
- les imitations par mouvement contraire
- l'imitation récurrente.

Les deux premiers types ont été représentés, en première approche, comme des permutations de $Z/_{7Z} = \{O; I; II; III; IV; V; VI\}$

- les imitations directes comme translations :

$t_U : T \longmapsto T+U$

- les imitations par mouvement contraire comme symétries :

$s_U : T \longmapsto U-T$

En fait, une phrase musicale étant représentée comme un n-plet d'éléments de $Z/_{7Z}$;
$\pi = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ses imitations directes seront les 7 n-uplets
$T_U(\pi) = (t_U(X_1), t_U(X_2), \ldots, t_U(X_n))$. (Bien sûr, on a $T_O(\pi) = \pi$).
De même, ses imitations par mouvement contraire seront les 7 n-uplets.
$S_U(\pi) = (s_U(X_1), s_U(X_2), \ldots, s_U(X_n))$, et l'imitation récurrente de π sera
$R(\pi) = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$.

Comme nous l'avons dit plus haut, ces procédés peuvent être composés les uns avec les autres de toutes les façons possibles, et ceci peut servir de base à une recherche des élèves (par groupes, pas exemple) :

" - Qu'obtient-on alors ?"
" - De nouveaux types d'imitation apparaissent-ils ?"

Donnons ici sans démonstration les résultats d'une telle recherche (qui bien sûr se ramène à des compositions d'applications) :

a) Même procédé utilisé deux fois :

$T_U o T_V = T_{U+V}$

$S_U o S_V = T_{U-V}$ (en particulier, $S_{\square}$ o $S_{\square}$ est l'identité)

RoR est l'identité.

(Remarque : les 7 imitations S_U peuvent être considérées comme les produits de composition de la symétrie $S_{\square}$ par les translations T_U ; on a en effet :
$S_U = T_U o S_{\square}$ $(S_{\square} o T_{-U})$

b) Composition de deux procédés différents :

$T_U o S_V = S_{U+V}$

$S_U o T_V = S_{U-V}$

$T_U oR = RoT_U$ est d'un nouveau type

$S_U oR = RoS_U$ est également d'un nouveau type, et on a de plus $S_U oR = RoS_U = T_U o(S_{\square} oR)$

$\circ$	ε	$S_{\square}$	R	$S_{\square}\circ R$
ε	ε	$S_{\square}$	R	$S_{\square}\circ R$
$S_{\square}$	$S_{\square}$	ε	$S_{\square}\circ R$	R
R	R	$S_{\square}\circ R$	ε	$S_{\square}$
$S_{\square}\circ R$	$S_{\square}\circ R$	R	$S_{\square}$	ε

Conclusion : Tous les types d'imitation sans modulation rencontrés jusqu'à présent peuvent donc être considérés comme les composés, par les translations, des éléments de l'ensemble $K = \{\varepsilon; S_{\square}; R; S_{\square} oR\}$ ε étant l'identité de $(Z/_{7Z})^n$
La table de la loi o dans cet ensemble K est, d'après ce que nous venons de voir, la table ci-contre :

On reconnaît là la table d'un groupe de Klein. Conséquence de la stabilité de K pour la loi : en composant autant de fois qu'on le voudra les procédés imitatifs étudiés, on n'en obtiendra pas de nouveaux. En définitive, un thème musical pourra donc se présenter sous 4 formes :

- l'original
- son "renversement" $S_{\square}(\pi)$
- sa forme récurrente $R(\pi)$,
- le renversement de sa forme récurrente $S_{\square} oR(\pi)$ (qui est d'ailleurs également la récurrence du renversement).

Ces 4 formes sont définies, en quelque sorte, "à une translation près".

IV - LES REGLES DU DODECAPHONISME

Les années 1880-90 marquèrent la désagrégation de la musique tonale, par un besoin général de "dépasser les limites des lois harmoniques" (13). Parmi les musiciens qui cherchèrent alors à créer un nouveau langage musical, on ne saurait ignorer Arnold SCHOENBERG (1874-1951) qui, vers 1923, codifia le résultat de ses recherches sur le "dodécaphonisme". En effet, les règles de la tonalité une fois abolies, la Musique se trouvait dans une situation quelque peu anarchique ; la nécessité d'un système de remplacement se fit alors sentir, et c'est ce à quoi se consacra -entre autres- SCHOENBERG. Voici quelques-unes des règles qu'il édicta (14) :

(13) in "La Musique du XXè siècle" (R. Laffont-Grammont 1975).

(14) Il y en a d'autres, mais qui sortiraient du cadre de cet article.

1) Aucune des 12 notes de la gamme tempérée ne doit être privilégiée, de quelque façon que ce soit, par rapport aux autres. En particulier, la fréquence d'apparition devra être la même pour toutes.

2) Règle du "total chromatique" : elle impose à une note quelconque de ne pas réapparaître avant que toutes les autres aient été énoncées. Allant même plus loin, SCHOENBERG impose que

3) toute oeuvre musicale soit basée sur un arrangement, choisi à l'avance, des 12 notes (la série) : $S = (n_1, n_2, \ldots, n_{12})$, où $n_i \in Z/_{12Z}$, et $(i \neq j) \Longrightarrow (n_i \neq n_j)$.
Cet arrangement est chronologique, c'est-à-dire que, dans un tel 12-uplet, une note placée à gauche d'une autre sera émise avant (ou en même temps que) celle-ci.

C'est cette série qui fondera l'unité de l'oeuvre musicale ; elle remplacera en quelque sorte (bien qu'étant d'essence différente) à la fois la tonalité et le thème des oeuvres antérieures. Se souvenant des techniques du contrepoint, et en particulier des procédés imitatifs, SCHOENBERG applique à $Z/_{12Z}$ les procédés que les musiciens antérieurs utilisaient dans $Z/_{7Z}$ (voir ci-dessus) : puisqu'ici la "série" a remplacé le "thème" tonal, SCHOENBERG impose à S de n'apparaître -à une translation près- que sous l'un des quatre avatars suivants :

. S elle-même, bien sûr : $S = \mathcal{E}(S) = (n_1, n_2, \ldots\ldots, n_{12})$

. son renversement : $rv(S) = (-n_1, -n_2, \ldots\ldots, -n_{12})$

. sa récurrence : $rc\ (S) = (n_{12}, n_{11}, \ldots, n_1)$

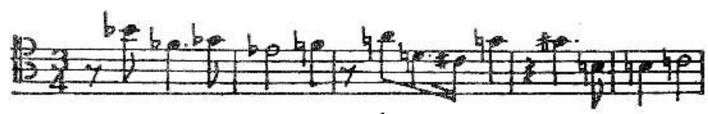
. la récurrence de son renversement : $rc\circ rv(S) = (-n_{12}, -n_{11}, \ldots, -n_1)$.

Bien entendu, comme dans le cas de la musique tonale, l'ensemble $K' = \{\mathcal{E}; rv; rc; rc\circ rv\}$ muni de la composition des applications est un groupe de Klein.

On peut alors, avec une classe, se proposer d'étudier de ce point de vue un passage d'une oeuvre sérielle, pour voir comment y sont utilisées les règles qui viennent d'être décrites. Voici, à titre d'exemple, la série servant de base aux "Variations pour orchestre", op. 31, de SCHOENBERG :

$S = (10,04,06,03,05,09,02,01,07,08,11,00)$

Cette série apparaît au début du "Thème" sous la forme suivante :



(cf la partie de violoncelle (n° 7) page 6)

On retrouve d'ailleurs dans ce Thème les 4 formes de la série (15) :

. S, déjà indiquée, ainsi que $T_3(S) = (01,07,09,06,08,00,05,04,10,11,02,03)$
. $T_5\circ rv(S) = (07,01,11,02,00,08,03,04,10,09,06,05)$
. $rc(S) = (00,11,08,07,01,02,09,05,03,06,04,10)$
. $T_5\circ rc\circ rv\ (S) = (05,06,09,10,04,03,08,00,02,11,01,07)$

(15) Pour une étude plus détaillée de ce Thème, voir la brochure de l'IREM de Paris Sud intitulée : la Musique adoucit les Maths.

Après ce tour d'horizon qui nous a conduits à travers divers aspects dela de la Musique, je n'ai qu'un seul souhait à formuler : c'est que cet article incite certains collègues à envisager une coordination de leur enseignement avec celui de la Musique, en s'assurant, bien sûr, le concours du collègue musicien enseignant dans la classe concernée.
Ceci aurait pour avantage d'offrir à nos élèves un champ d'application des Mathématiques un peu différent de ceux auxquels ils sont habitués, et ne même temps de leur permettre d'appréhender un peu mieux les oeuvres musicales, c'est-à-dire à la fois avec leur intelligence et leur sensibilité.

A PROPOS DES QUATERNIONS

par M. BOUTEILLER
(BRIVE - CORREZE)

Ce qu'il faut savoir sur les quaternions, et ce qu'on peut en faire.

I - RAPPELS HISTORIQUES

Il est toujours honnête de rendre à César ce qui lui revient ; en conséquence, rappelons que les nombres négatifs sont dus à BRAHMAGUPTA (628) et popularisés par N.CHUQUET (1500) que les logarithmes sont dus à NAPIER (1550-1617), les complexes à BOMBELLI (1526-1573). La représentation géométrique de $\mathbb{C}$ revient à WESSEL (1745-1818) neuf ans avant ARGAND. La définition de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}[x] / (x^2 + 1)\,\mathbb{R}[x]$ est due à CAUCHY (1789-1867) et celle par les couples de réels à William-Rowan HAMILTON (1805-1865) en 1833 (communication à l'Irish Academy). HAMILTON cherche en vain pendant dix ans à étendre le calcul complexe à la dimension trois et ce n'est qu'en 1843, un 16 octobre, en se promenant le long du Kings' Canal de Dublin qu'il eut l'inspiration tant attendue. Le calcaire de Brougham Bridge qui enjambe le canal en fit les frais avec $i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k$ gravé au canif dans l'exaltation du moment.

Complexes, quaternions, octonions, doubles, duaux de STUDY (1862-1930) seront absorbés par les Algèbres de William Kingdon CLIFFORD (1845-1879) et celles d'Arthur CAYLEY (1821-1895). FROBENIUS en 1878 montrera que tout corps K tel que $\mathbb{R} \subset Z(K)$ et $\dim_{\mathbb{R}} K$ finie est isomorphe soit à $\mathbb{R}$ soit à $\mathbb{C}$ soit au corps des quaternions.

II - LES QUATERNIONS

J. DIEUDONNE "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" Annexe I' donne les raisons de l'échec d'HAMILTON pour la dimension 3. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace base $\vec{e}_o$ unité multiplicative, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, si $\vec{u} \notin \mathbb{R}\,\vec{e}_o$, $\vec{e}_o$, $\vec{u}$, $\vec{u}^2$, $\vec{u}^3$ sont dépendants d'où en passant par $\vec{u} = x\,\vec{e}_o$. et en recombinant

$$\vec{u}^3 + \alpha\,\vec{u}^2 + \beta\,\vec{u} + \gamma\,\vec{e}_o = \vec{o} = (\vec{u} - \lambda\,\vec{e}_o)\,(\vec{u}^2 + \mu\,\vec{u} + \nu\,\vec{e}_o),\ \mu^2 - 4\,\nu < o$$

Alors $(\vec{u} + \frac{\mu}{2}\vec{e}_o)^2 = (\frac{\mu^2}{4} - \nu)\,\vec{e}_o$ et si $\vec{u}' = (\vec{u} + \frac{\mu}{2}\vec{e}_o)(\nu - \frac{\mu^2}{4})^{-1/2}$ on a $\vec{u}'^2 = -\vec{e}_o$.

Pour $\vec{u} = \vec{e}_i$ on trouve $\vec{e}'_i = -\vec{e}_o$ $i = 1, 2.$

Formant $\vec{e}'_1\,\vec{e}'_2 = a\,\vec{e}_o + b\,\vec{e}'_1 + c\,\vec{e}'_2$

on en déduit $-\vec{e}'_1 = \vec{e}'_1\,\vec{e}'_2\,\vec{e}'_2 = a\,\vec{e}'_2 + b\,\vec{e}'_1\,\vec{e}'_2 - c\,\vec{e}_o$

d'où $\vec{e}'_1\,\vec{e}'_2 = \frac{c}{b}\vec{e}_o - \frac{1}{b}\vec{e}'_1 - \frac{a}{b}\vec{e}'_2$ et par suite $b^2 = -1$, ce qui est irréalisable dans $\mathbb{R}$.

En l'honneur de HAMILTON, les mathématiciens notent H le corps non commutatif qu'il a découvert.

$H = \mathbb{R}\,1 \oplus \mathbb{R}\,i \oplus \mathbb{R}\,j \oplus \mathbb{R}\,k$ avec la table de multiplication

↗	i	j	k
i	− 1,	k,	− j
j	− k,	− 1,	+ i
k	+ j,	− i,	− 1

à partir de laquelle le produit s'étend à H par linéarité.

Il faut bien entendu vérifier l'associativité pour les éléments de la table soit 27 − 3 = 24 cas non évidents que l'on ramène à 9 par deux remarques :

a) $q_1\,(q_2\,q_3) = -\,q_1\,(q_3\,q_2) = (q_3\,q_2)\,q_1$

$(q_1\,q_2)\,q_3 = -\,(q_2\,q_1)\,q_3 = q_3\,(q_2\,q_1)$

donc $q_1\,(q_2\,q_3) = (q_1\,q_2)\,q_3 \Longleftrightarrow q_3\,(q_2\,q_1) = (q_3\,q_2)\,q_1$

b) $q_1\,(q_2\,q_1) = -\,q_1\,(q_1\,q_2) = (q_1\,q_2)\,q_1$.

Il suffit alors de choisir l'élément central (3 possibilités) et les encadrants (3 possibilités) ce qui donne les 9 cas qu'on examine un à un :

i i i	i i k	j i k
j j i	j j k	i j k
k k i	k k j	i k j

$q \in H \Longleftrightarrow q = \sigma + \alpha\,i + \beta\,j + \gamma\,k = \sigma + p$ (σ partie scalaire, p partie pure)

$\bar{q} = \sigma - p$ est le conjugué, $q\,\bar{q} = \bar{q}\,q = \sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = N(q)$ norme algébrique et si $q \neq 0$, on a $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)}$ (ou bien $\bar{q} / N(q)$). Attention cependant $\overline{qq'} = \bar{q}'\,\bar{q}$.

Saluons en passant le groupe quaternionique d'ordre 8, non commutatif $(Q_2\ ,\ .)$ avec $Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dont le centre $Z(Q_2) = \{-1, 1\}$ est non réduit à l'élément neutre.

$\mathbb{C} = \mathbb{R}\,1 \oplus \mathbb{R}\,i$ apparait comme un sous-corps commutatif de H et comme $q = (\sigma + \alpha i) + (\beta + \gamma i)\,j = B + A\,j$, H apparait comme un $\mathbb{C}$ − espace de dimension 2 de base $(1, j)$. A chaque $q \in H$ correspond le $\mathbb{C}$ − endomorphisme $q' \longmapsto q'\,q$ dont la matrice dans la base $(1, j)$ est $T_q = \begin{pmatrix} \sigma + i\,\alpha, & -\beta + i\,\gamma \\ \beta + i\,\gamma, & \sigma - i\,\alpha \end{pmatrix}$

T_1 , T_i , T_j , T_k sont les matrices popularisées par PAULI et comme $T_{q_1 q_2} = T_{q_2} \circ T_{q_1}$ on voit que l'application $q \longmapsto T_q$ est une représentation de H par matrices d'ordre 2 à coefficients complexes.

Cette structure de $\mathbb{C}$ - espace où $q = B + A\,j$ donne pour le produit :

$q\,q' = [(\sigma\sigma' - \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma') + i\,(\sigma\alpha' + \alpha\sigma' + \beta\gamma' - \gamma\beta')] +$

$[(\sigma\beta' + \beta\sigma' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma') + i\,(\sigma\gamma' + \gamma\sigma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')]\ (j)$

c'est-à-dire $q\,q' = (B\,B' - A\,\overline{A'}) + (A\,\overline{B'} + B\,A')\,j$.

On peut alors imaginer une construction de H comme quotient d'un anneau de polynômes par un idéal bilatère maximal.

Si $\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \overline{z}$ est l'automorphisme usuel $\tau^2 = id_{\mathbb{C}}$

on considère $\mathbb{C}_\tau\,[x]$ où $\sum_0^n a_n\,x^h \cdot \sum_0^m b_k\,x^k = \sum_0^{m+n} c_r\,x^r$

avec $c_r = \sum_{h+k=r} a_h\,\tau^h\,(b_k)$

Dans cet anneau $(X^2 + 1)\,\mathbb{C}_\tau\,[X]$ est un idéal bilatère en effet :

$(X^2 + 1)\sum_0^n a_h\,X^h = \sum_0^{n+2} c_r\,X^r$ avec $c_r = a_r + \tau^2\,(a_{r-2}) = a_r + a_{r-2}$

$(\sum_0^n a_h\,x^h).\,(X^2 + 1)\ \sum_0^{n+2} d_r\,X^r$ avec $d_r = a_{r-2} + a_r = c_r$

Les éléments de $\mathbb{C}_\tau\,[X]\,/(X^2 + 1)\,\mathbb{C}_\tau\,[X]$ sont les $A\,\dot{X} + B$;

$A, B \in \mathbb{C}$, $(\dot{X})^2 = -1$, donc si on note $\dot{X} = j$ ce sont les $A\,j + B$ avec pour le produit :

$(B + A_j)\,(B' + A'_j) = B\,B' + (A\,\tau\,(B') + B\,A')\,j + A\,\tau\,(A')\,j^2 =$

$(B\,B' - A\,\overline{A'}) + (A\,\overline{B'} + B\,A')\,j$.

Si $Aj + B \neq 0$ on a $(Aj + B)^{-1} = (-\,Aj + \overline{B})\,/\,(|A|^2 + |B|^2)$

Remarque

En écrivant $q = (\sigma + \alpha i) + j\,(\beta - \gamma i)$

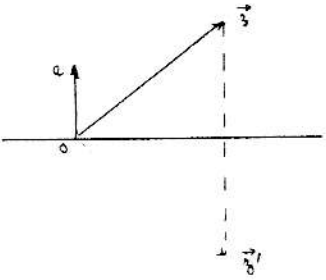
on a $T_q = \begin{pmatrix} \sigma + \alpha i, & -\beta + \gamma i \\ \beta - \gamma i, & \sigma + \alpha i \end{pmatrix}$ et $T_{q_1 q_2} = T_{q_1} \circ T_{q_2}$

III - APPLICATIONS DES QUATERNIONS

I - CALCULS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN REEL DE DIMENSION TROIS

a) Rappel sur les complexes

Pour apprécier le rôle des quaternions, il est utile de rappeler celui des complexes dans le plan euclidien réel. A chaque valeur $\vec{z}\,\binom{x}{y}$ on associe le complexe $z = x + iy$ alors $2\,\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \overline{z}_1\,z_2 + z_1\,\overline{z}_2$ et $\vec{z}^{\,2} = z\,\overline{z} = |z|^2$.



Le groupe O_2 des isométries vectorielles étant engendré par les symétries vectorielles par rapport à des droites vectorielles, on a pour une telle symétrie

$s_{\vec{a}^\perp}$: $\vec{z}' - \vec{z} = \lambda\,\vec{a}$, $\vec{a}\,.\,(\vec{z} + \vec{z}') = 0$ d'où $\lambda = -\,2\,\vec{a}\,.\,\vec{z}/\vec{a}^{\,2}$ et $\left[\vec{z}' = \vec{z} - \dfrac{2\,\vec{a}.\vec{z}}{\vec{a}^{\,2}}\,\vec{a}\right]$

qui donne $z' = z - \dfrac{a\overline{z} + \overline{a}z}{a\,\overline{a}}\,a$ et $z' = -\,\dfrac{a}{\overline{a}}\,\overline{z}$.

Pour la rotation $s_{b^\perp} \circ s_{a^\perp}$ on aura $z'' = \dfrac{a\,\overline{b}}{\overline{a}\,b}\,z = r\,z$, $r \in s_1 = \mathbb{U}$ groupe des complexes de module un.

Si $r = u + i v \in S_1$ la matrice de la rotation Γ_r est celle de l'endomorphisme $\begin{matrix}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto rz\end{matrix}$ du $\mathbb{R}$ - espace $\mathbb{C}$ pour la base $(1, i)$ à savoir $\begin{pmatrix} u, & -v \\ v, & u \end{pmatrix}$ $u^2 + v^2 = 1$.

On a l'isomorphisme de groupes $\begin{matrix}(S_1, .) & \xrightarrow{\Gamma} & (SO_2, o) \\ r & \longmapsto & \Gamma_r\end{matrix}$.

<u>b) Calcul dans E euclidien réel de dimension trois.</u>

A chaque vecteur $\vec{p} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on associe le quaternion pur $p = \alpha i + \beta j + \gamma k$, on notera aussi $q = (\sigma, \vec{p})$ ou $\sigma + \vec{p}$ par abus de mélange. Alors si "$\wedge$" est le produit vectoriel on vérifie le formulaire : $p_1 p_2 = - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2$;

$$p_1 p_2 + p_2 p_1 = - 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \ ; \ p^2 = - \vec{p}^2$$

$$q_1 q_2 = (\sigma_1 \sigma_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + (\sigma_1 \vec{p}_2 + \sigma_2 \vec{p}_1 + \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_2) \ ;$$

$$q \text{ quaternion pur} \iff q^2 \in \mathbb{R}_-^* .$$

(Ainsi l'équation dans H : $q^2 + 1 = 0$ a pour solution $q = \alpha i + \beta j + \gamma k$; $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, c'est-à-dire l'image dans H de la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$, à ne pas confondre avec $S_3 = \{q \ ; \ N(q) = 1\}$).

Les isométries vectorielles forment le groupe O_3, elles sont engendrées par les symétries planaires vectorielles et pour une telle symétrie

$$s_{\vec{a}^\perp} : s_{\vec{a}^\perp}(\vec{p}) = \vec{p}' = \vec{p} - \frac{2\vec{a}.\vec{p}}{\vec{a}^2}\vec{a} \quad \text{donne } p' = p - \frac{ap+pa}{a^2} a = - a p a^{-1} = a p a / N(a).$$

(La non commutativité de H rend le calcul plus pénible). Pour la rotation $s_{\vec{b}^\perp} \circ s_{\vec{a}^\perp}$ on trouve $p'' = (b a) p (b a)^{-1} = t p t^{-1}$.

Réciproquement, si $p'' = t p t^{-1}$, $t \in H^*$, $\vec{p} \mapsto \vec{p}''$ est une rotation Γ_t ; en effet, on voit que Γ_t est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ - espace E, que $\Gamma_{t_1} = \Gamma_{t_2} \iff t_1 = \lambda t_2$ $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut par suite se limiter au cas $t \in S_3$, on écrit alors : $t = \sigma + \vec{p}$, $N(t) = \sigma^2 - p^2 = \sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et on pose $\vec{p} = \rho \vec{u}$, $\vec{u}^2 = 1 = - u^2$ d'où $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $t = \sigma + \rho u$, $t^{-1} = \sigma - \rho u$.

Dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E, il vient $u = v w$, $v = w u$, $w = u v$,

puis
$$\begin{cases} \Gamma_t(u) = u \\ \Gamma_t(v) = (\sigma^2 - \rho^2) u + 2 \rho\sigma w \\ \Gamma_t(w) = (\sigma^2 - \rho^2) w - 2 \rho\sigma v \end{cases} \text{ soit } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma^2 - \rho^2, & -2\rho\sigma \\ 0, & 2\rho\sigma, & \sigma^2 - \rho^2 \end{pmatrix} ;$$

Γ_t est la rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ d'angle 2α ou $2\alpha - 2\pi$ avec $\cos \alpha = \sigma$, $\sin \alpha = \rho$.

L'application $H^* \xrightarrow{N} \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto N(t)$ est un morphisme de groupes, $\operatorname{Ker} N = S_3$ et $S_3 \xrightarrow{\Gamma} SO_3$ $t \longmapsto \Gamma_t$ est un morphisme de groupes, surjectif mais non injectif vu que

$$\begin{cases} \sigma^2 - \rho^2 = a \\ 2 \rho \sigma = b \end{cases}, \quad a^2 + b^2 = 1 \text{ entraine } \sigma = \pm \sqrt{\frac{1+a}{2}},$$

$\rho = \pm \operatorname{Sgn} b \sqrt{\frac{1-a}{2}}$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Gamma = \{-1, +1\}$ d'où SO_3 is $S_3 / \{-1, 1\}$ (alors qu'en géométrie plane SO_2 is S_1).

(Par un raisonnement assez délicat, J. DIEUDONNE montre dans l'annexe IV que Γ n'a pas d'inverse à droite. En théorie des groupes de Lie S_3 est un revêtement universel de SO_3 dit revêtement spinoriel Spin $(3, \mathbb{R})$, Spin $(3, \mathbb{R})$ n'est pas le produit semi-direct de Ker Γ par un sous-groupe isomorphe à SO_3).

II - APPLICATION A LA GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

On trouvera dans l'exposé de Monsieur COUTY préparatoire à la conférence de Monsieur LICHNEROWICZ à l'U.E.R. de LIMOGES (1975), les indications sur la structure symplectique en géométrie différentielle et mécanique analytique. On va indiquer ici la présentation donnée par CHEVALLEY à partir de H.

Pour $n \geqslant 1$, $H^n = \{\vec{a} = (a_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ;\ \forall\, i,\ a_i \in H\}$ est un H - espace vectoriel et si $\vec{a}, \vec{b} \in H^n$, on définit leur produit symplectique

$$\vec{a}.\vec{b} = \sum_1^n a_i\, \bar{b}_i \in H, \quad \vec{a}^2 = \sum_1^n N(a_i) \in \mathbb{R} \subset H, \quad \vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}.$$

Comme $\vec{b}\,.\,\vec{a} = \sum_1^n b_i\, \bar{a}_i = \overline{\vec{a}.\vec{b}}$ on a les propriétés d'un produit hermitien. $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2}$ est le norme symplectique.

La géométrie de H^n se développe comme celle de tout espace vectoriel, on définit les endomorphismes de H^n, éléments de End (H^n) et leurs matrices.

$f \in$ End (H^n) est dit symplectique si pour tout $\vec{a} \in N^n$ $\|f(\vec{a})\| = \|\vec{a}\|$, il est équivalent de dire $f(\vec{a})\,.\,f(\vec{b}) = \vec{a}\,.\,\vec{b}$ ou encore ${}^t\bar{f} = f^{-1}$ en notant ${}^t\bar{f}$ la transposée de l'application conjuguée. Les endomorphismes symplectiques forment le groupe symplectique Sp (n).

On a vu que $q = (\sigma + \alpha i)\,1 + (\beta + \gamma i)\,j \in \mathbb{C}\,1 \oplus \mathbb{C}\,j$

alors si $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in H^n$ et si on pose : $a_k = x_k + x'_k\, j = x_k + x_{n+k}\, j$ en notant $x'_k = x_{n+k}$, x_k, $x_{n+k} \in \mathbb{C}$; au vecteur $\vec{a} \in H^n$ correspond le vecteur $\vec{a}' \in \mathbb{C}^{2n}$ $\vec{a}' = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$.

A chaque $f \in$ End (H^n) correspond $f' \in$ End $(\mathbb{C}^{2n})$ $f'(\vec{a}') = (f(\vec{a}))'$, cette correspondance donne un isomorphisme de Sp (n) avec un sous-groupe SpL $(n, \mathbb{C})$ de GL $(2n, \mathbb{C})$ appelé groupe symplectique linéaire (il reçoit la topologie induite par celle de GL $(2n, \mathbb{C})$, Sp (n) est alors muni de la topologie initiale transformant en homémorphisme l'application $f \longmapsto f'$).

Th. | $f' \in$ SpL $(2n, \mathbb{C})$ si et seulement si elle laisse invariante le forme bilinéaire $\sum_{k=1}^n (x_k\, y_{n+k} - y_k\, x_{n+k})$ et appartient à $\mathcal{U}(2n)$.

* Soit $f = (q_{st}) \in$ Sp (n), $f' = (r_{kl})$ $1 \leqslant k$, $1 \leqslant 2n$ son associée dans GL $(2n, \mathbb{C})$, $\vec{a}' \in \mathbb{C}^{2n}$, $\vec{b}' \in \mathbb{C}^{2n}$ associés à $\vec{a} \in H^n$, $\vec{b} \in H^n$.

$f'(\vec{a}') = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{2n})$, $f'(\vec{b}') = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{2n})$ avec $\tilde{x}_k = \sum_{l=1}^{2n} r_{kl}\, x_l$, $\tilde{y}_k = \sum_{l=1}^{2n} r_{kl}\, y_l$

On $\vec{a}.\vec{b} = \sum_{k=1}^n (x_n + x_{n+k}\, j)\overline{(y_k + y_{n+k}\, j)} = \sum_{k=1}^n (x_k + x_{n+k}\, j)(\bar{y}_k - y_{n+k}\, j)$

(se rappeler que : $y_k + y_{n+k}\, j) = (\sigma_k + \alpha_k\, i) + (\beta_{n+k} + \gamma_{n+k}\, i)\, j$

donc $\overline{y_k + y_{n+k}\, j} = (\sigma_k - \alpha_k\, i) - \beta_{n+k}\, j - \gamma_{n+k}\, k =$

$(\sigma_k - \alpha_k\, i) - (\beta_{n+k} + \gamma_{n+k}\, i)\, j = \overline{y}_k - y_{n+k}\, j$),

d'où $\vec{a}.\vec{b} = \sum_{k=1}^{n} (x_k\, \overline{y}_k + x_{n+k}\, \overline{y}_{n+k}) + \sum_{k=1}^{n} (x_{n+k}\, y_k - x_k\, y_{n+k})\, j$

(Noter que $-x_{n+k}\, j\, y_{n+k}\, j = -x_{n+k}\, \overline{y}_{n+k}\, j^2 = x_{n+k}\, \overline{y}_{n+k}$ et $x_{n+k}\, j\, \overline{y}_k = x_{n+k}\, y_k\, j$)

Ainsi $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}'.\vec{b}' + \sum_{k=1}^{n} (x_{n+k}\, y_k\, y_{n+k})\, j$ où $\vec{a}.\vec{b}$ est le produit symplectique et $\vec{a}'.\vec{b}'$ le produit hermitien dans $\mathbb{C}^{2n}$.

De même $f(\vec{a}).f(\vec{b}) = f'(\vec{a}').f'(\vec{b}') + \sum_{k=1}^{n} (\tilde{x}_{n+k}\, \tilde{y}_k - \tilde{x}_k\, \tilde{y}_{n+k})\, j = \vec{a}.\vec{b}$ si et seulement si $f \in Sp(n)$ c'est-à-dire $f' \in SpL\,(2n, \mathbb{C})$. On conclut que $f' \in SpL\,(2n, \mathbb{C})$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_{n+k} - y_k\, x_{n+k})$ est conservée et $f'(\vec{a}').f(\vec{b}') = \vec{a}'.\vec{b}'$

__Remarque__ : Les éléments de $GL\,(2n, \mathbb{C})$ qui sans être unitaires conservent la forme bilinéaire $\sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_{n+k} - y_k\, x_{n+k})$ constituent un sous-groupe $Sp\,(n, \mathbb{C})$ dit groupe symplectique complexe.

On a $SpL\,(2n, \mathbb{C}) \subset Sp\,(n, \mathbb{C}) \subset GL\,(2n, \mathbb{C})$.

Dans chacun des groupes $Sp\,(n)$, $Sp\,(n, \mathbb{C})$ il existe un voisinage de zéro homéomorphe à un ouvert d'un $\mathbb{R}^m$ avec $m = 2n^2 + n$ pour $Sp\,(n)$ et $2\,(2n^2 + n)$ pour $Sp\,(n, \mathbb{C})$.

On en trouvera la démonstration dans C. CHEVALLEY : Theory of Lie Groups, page 23. Les soixante sept premières pages de cet ouvrage forment la suite naturelle de l'annexe IV de DIEUDONNE.

__Autres ouvrages__ :

1) Les corps non commutatifs par André BLANCHARD (PUF/Sup)

2) YAGLOM : Les nombres complexes (DUNOD)

3) Encyclopédia Universalis : Groupes classiques par J. DIEUDONNE

4) BOURBAKI : L 2 - chapitre 3 - édition ne varietur

5) La géométrie des groupes classiques : J. DIEUDONNE (Springer)

6) Pour l'Histoire :
   BOURBAKI, BECKER et HOFMANN
   BOYER : History of mathematics (Wiley)
   G. CHILOV : Analyse mathématique. Fonctions de plusieurs variables réelles - 1è et 2è parties - page 357 (Mir)

7) BIRKOFF - MAC LANE - Algèbre, tome 1, page 291

8) GODBILLON : Géométrie et mécanique - chapitre VII

9) HUSEMOLLER : fibre bundles - chapitre 11, page 139

MATHÉMATIQUES, STRUCTURALISME ET TRANSDISCIPLINARITÉ

par André LICHNEROWICZ

Une démonstration de l'unicité de la démarche de pensée qui préside à la formation d'un concept, à travers les différentes "disciplines"; un plaidoyer pour une formation universitaire moins spécialisée; par le "père" de la réforme de l'enseignement des mathématiques.

LES DISCIPLINES

A travers nos universités, presque partout dans le monde, la formation des hommes, les moyens et la finalité de la recherche, ainsi que l'acquis des résultats de cette recherche se trouvent fragmentés en disciplines aux frontières mouvantes, à la définition tantôt fine et tantôt grossière. Mais il est clair que, dans la terminologie courante, le mot même de discipline recouvre des notions variées relevant souvent de plusieurs conceptions philosophiques d'époques différentes et parfois contradictoires entre elles. Le concept de discipline recouvre ainsi des fonctions diverses attribuées aussi bien à l'université qu'à cette exploration du réel qu'on nomme recherche.

Sciences, Arts et Histoires

Dans un texte préparatoire à l'Encyclopédie, Diderot distingue soigneusement "les sciences, les arts et les histoires". Pour lui, grosso modo, une science se veut effort de connaissance et d'explication d'un champ de phénomènes, définie par ce champ et contribuant à la définir. Un art - nous dirions aujourd'hui une technique - est un faisceau de procédés, plus ou moins inspirés par des sciences, destiné à construire et agir. C'est dans ce sens que la France connait encore le vieux titre "d'ingénieur des Arts et Manufactures". Une histoire enfin est une description classificatrice du monde, univers physique (c'est le vrai sens de l'expression "histoire naturelle") comme univers social. Au triplet sciences, arts, histoires toujours inconsciemment présent, il conviendrait d'ajouter les disciplines dites "normatives" (droit par exemple ou grammaire au sens traditionnel) pour obtenir la quasi-totalité des étiquettes qui ornent encore les frontons de nos temples universitaires.

Comme l'ont montré les épistémologues récents, Piaget en particulier, le positivisme n'a fait qu'approfondir la définition d'une science par le champ des phénomènes observables auxquels elle a choisi de s'intéresser. Ennemi de toute entreprise véritablement théorique, le positivisme se veut cramponné aux observables et ne visant qu'à les relier par des lois numériques, aisément et directement vérifiables. Dans ses versions contemporaines, il conduit, en sciences humaines par exemple, à ces monographies basées sur une statistique à ras de sol et qui ne débouchent sur nulle globalisation ou synthèse théorique. Il s'agit là de matériaux pour la science, mais non encore de science. Les essais embarassés de classification linéaire des sciences, inspirés au XIX$^{\text{e}}$ siècle par le positivisme, apparaissent trop souvent comme l'équivalent en ce temps des analyses médiévales des différents "miroirs du Monde". C'est aussi le temps où tous croient et enseignent que les mathématiciens règnent sur la quantité et sur l'étendue ; or déjà à travers les algébristes anglais, à travers Riemann ou Dedekind, les mathématiciens ne savent plus ce qu'est cette prétendue quantité ou cette prétendue étendue. Si le positivisme a été trop longtemps la philosophie explicite de beaucoup d'hommes de science, il reste que nous savons désormais qu'il n'est pas et n'a jamais été la philosophie implicite de l'entreprise scientifique elle-même;dont l'ambition est tout autre et suppose pour son accomplissement, l'achèvement d'un stade théorétisant. Le stade dit "positif" représente en fait un stade infantile de la science. Celle-ci est devenue consciemment ce tissu indéchirable, fait d'une chaîne théorique et d'une trame expérimentale, où la chaîne peut et doit réunir bien des fils variés venus des différents domaines de notre expérience concrète.

Le positivisme, stade infantile de la science.

Une discipline n'est donc plus aujourd'hui accumulation lente et prudente de faits et de petites lois cherchant à les relier, sauf peut-être à ses débuts. Elle est d'abord méthodes et techniques, arsenal conceptuel aussi et élaboration d'un discours adapté à traduire ses conquêtes, plus encore elle est souvent point de vue privilégié sur une large fraction du monde et, par là, elle se révèle dans beaucoup de cas impérialiste vis à vis d'autres disciplines concurrentes. Il en fut ainsi hier de la physique, il en est aujourd'hui ainsi de la biologie qui, à travers l'écologie par exemple, vise la primauté de l'étude de tous les systèmes vivants, y compris ceux où participe l'homme. La sociologie, même marxiste, ne saurait abandonner à l'économie ce qu'elle considère comme de son ressort propre et se demande en vain ce que peut bien être la géographie humaine. L'histoire, au sens contemporain du terme, se veut analyse et synthèse globale de civilisations et aucune activité humaine des dix derniers millénaires ne saurait, en droit, lui être étrangère ; d'où ses difficultés à définir son statut au contact, par exemple, de l'ensemble des différentes sciences sociales.

Les disciplines, points de vue privilégiés sur le monde

Cette exigence impérialiste, manifestée par une discipline, n'est pas en soi malsaine pour les autres ; elle les oblige à recevoir, à accueillir, elle leur impose de nuancer leurs propres points de vue, d'utiliser concepts, méthodes et techniques venus d'ailleurs. Elle traduit l'impossibilité d'une définition spécifique des champs de phénomènes, et paradoxalement, l'unité de la démarche scientifique. C'est pour la discipline trop impérialiste qu'est le danger, si elle finit par transformer ses maîtres-mots et ses maîtres-concepts en idoles intellectuelles, risquant ainsi de se figer, de perdre ses pouvoirs de renouvellement.

Il est certes possible de faire indifféremment des mathématiques, de la physique ou de la biologie, de l'histoire, de la sociologie, de la linguistique, de l'économie ou de la psychologie la discipline reine, de prétexter avec une égale bonne foi qu'au début est l'être vivant, ou le langage, ou le raisonnement, ou la société des hommes et ses projets, ou le fonctionnement de notre esprit. J'ajouterai que certains ont proposé que l'épistémologie ou l'analyse des projets technico-sociaux soient des candidats à cette primauté. Mais tous ces jeux sont vains. Le "savoir-faire" global qu'est devenue au vrai notre science ou notre technique ne supporte pas un point de vue privilégié sur lui-même qui ne saurait que le mutiler et le figer.

MATHEMATIQUES CONTEMPORAINES

Ayant ainsi mis en garde contre une tentation, je vais m'empresser d'y succomber très volontairement. Ce sera, si vous le voulez bien, la règle de notre jeu d'aujourd'hui. L'activité théorétisante qui, pour moi, fait partie intégrante de l'entreprise scientifique elle-même, s'appuie sur un ensemble de méthodes déductives auxquelles participent logique, mathématiques au sens usuel et strict du terme, informatique théorique aussi. C'est cet ensemble que je baptiserai désormais mathématique au singulier, parce que tout cela est homogène à la démarche mathématique et à son ambition de bâtir un discours parfait de communication objective, un type de discours "sans bruit de fond", cohérent en soi, et contraignant pour l'autre, capable d'interdire par sa forme tout refus de son contenu.

Le meccano

Depuis un siècle et demi, mettons depuis Galois mort à 21 ans et créateur de la notion de groupe, la mathématique s'est étudiée elle-même, a pris conscience de ses ambitions véritables et des limites imposées à ces ambitions. Elle a porté partout témoignage, un témoignage aseptique sur le fonctionnement de notre esprit et sur les conditions de la communication. Elle s'est d'abord constituée en une sorte de meccano dont les pièces sont ce que nous nommons les structures élémentaires, c'est-à-dire celles où le nombre des axiomes est faible et qui surgissent fréquemment. Au lieu de commencer l'étude mathématique selon l'histoire, par des structures riches comme celles de la géométrie euclidienne, avec sa multiplicité d'axiomes, on devrait, en droit, commencer selon le bon ordre des mathématiques par l'étude des pièces élémentaires, les structures pauvres qui doivent s'emboiter les unes avec les autres pour bâtir ces machineries complexes et puissantes que sont les grandes théories.

La notion première est généralement la notion d'ensemble, d'ensemble de n'importe quoi, de nombres, de figures géométriques, mais aussi d'ensembles de mots d'un dictionnaire, des phrases de la langue allemande ou des échanges au sein d'une économie. Une telle notion, même prise très naïvement comme un langage commode et précis, se révèle très utile, même si au niveau élémentaire nulle théorie n'en est faite. Elle présente cependant des pièges dont nous avons fait l'expérience et que nous savons désormais éviter. Un ensemble est formé d'éléments, il a des sous-ensembles qui comprennent une partie de ses éléments. Entre deux ensembles convenables, il peut exister des sortes de dictionnaires parfaits : à tout élément d'un ensemble, on peut en associer un élément d'un autre ensemble et réciproquement. C'est ce que nous faisons naïvement et naturellement quand nous comptons sur nos doigts les brebis d'un troupeau ou les jours qui doivent s'écouler.

Les structures élémentaires intéressantes, toutes bâties avec la même cohérence et la même solidité, appartiennent à deux types principaux : les structures algébriques (au sens contemporain du terme) et les structures topologiques. Des premières groupe, anneau, corps, espace vectoriel, relèvent les opérations, la théorie des calculs, des secondes celles de voisinages, limites, convergence, continuité etc...

Le discours métamathématique est indispensable pour prouver la non-contradiction du discours mathématique

Ce que je viens de dire doit être modéré par quelques considérations concernant la méta-mathématique. Le paysage décrit est grosso modo celui de la mathématique proprement dite, fondée sur une théorie des ensembles convenablement axiomatisée à la Gödel et conçue comme un point de départ. Mais nous savons désormais, grâce à Gödel en particulier, que la vieille ambition d'un discours qui trouve en lui-même sa propre justification, capable d'auto-prouver sa propre cohérence, est un rêve. Plus positivement, cela veut dire qu'il faut avoir recours à une méta-mathématique pour tenter de prouver la non-contradiction des mathématiques elles-mêmes et ainsi de suite. La mathématique au sens large que j'ai défini a appris qu'elle est inépuisable non seulement vers l'aval - cela, elle l'avait toujours deviné ou su - mais aussi vers l'amont. Ce n'est que conventionnellement que nous plantons, ici ou là, un drapeau portant : "Ici commence le pays des mathématiques". Récemment le drapeau s'est déplacé, pour des raisons proprement mathématiques, avec l'apparition de la notion de catégorie, en amont de celle d'ensemble. Le point essentiel du témoignage porté par l'activité mathématique sur le fonctionnement de notre esprit et sur les conditions de la communication semble être le suivant : tout discours qui se veut sans quiproquo, ni malentendu, tout discours sans bruit de fond ne peut-être qu'un discours soumis à l'ascèse mathématique, c'est-à-dire en fait un discours mathématique. Mais l'ironie mathématique doit compléter cet énoncé par le suivant : il est impossible de prouver mathématiquement que le discours mathématique est effectivement lui-même sans quiproquo.

A qui étudie l'optique de la mathématique contemporaine sur elle-même, trois traits principaux apparaissent :

Absence de toute métaphysique

Ce qui frappe tout d'abord, je crois, c'est l'absence de toute métaphysique de l'identité et de la chose en soi, de toute idolâtrie de la chose. Sur les ensembles peuvent être définies des structures variées, la notion même de structure mathématique se prêtant aisément à une définition technique qui n'a pas sa place ici et qui repose sur deux opérations fondamentales concernant les ensembles : prendre le produit de plusieurs ensembles, prendre l'ensemble des parties d'un ensemble. Le mathématicien travaille toujours à un dictionnaire parfait près. L'identité de nature entre les êtres sur lesquels il raisonne lui importe peu. Ce qui importe, c'est la possibilité de ces dictionnaires parfaits dont j'ai parlé et l'isomorphisme correspondant des structures transportées. L'identité, pour le mathématicien identifie bien souvent, sans scrupules, des objets d'origine différente, lorsqu'un isomorphisme l'assure qu'il ne ferait que prononcer deux fois le même discours dans deux langues différentes.

Caractère non ontologique

Il m'est arrivé d'employer l'expression d'être mathématique. Au vrai, cette expression n'a pas grand sens : un ensemble est, j'ai osé le dire, un ensemble de n'importe quoi. Par suite tout donné peut être considéré comme mathématifiable, s'il consent à se soumettre au traitement des ensembles, catégories, morphismes, c'est-à-dire plus précisément, dans la mesure exacte où ce que nous négligeons ainsi - tout le contenu ontologique - ne nous importe pas. Il est essentiel de noter que ce que nous devons négliger ainsi ne peut être défini une fois pour toutes. On peut dire que, par son discours même, la mathématique a un caractère radicalement non ontologique ou, si vous préférez, qu'elle met l'Etre entre parenthèses. Ce caractère, la mathématique le transporte partout avec elle et c'est lui qui lui confère, pour une large part, sa puissance, sa fidélité et sa polyvalence. Nous pouvons toujours tresser un filet mathématique aux mailles arbitrairement serrées, mais d'où s'écoulera nécessairement l'onde ontologique.

Unité de la mathématique contemporaine

Un troisième caractère de la mathématique contemporaine est son unité. Par l'élaboration d'un langage commun et le dégagement des structures élémentaires communes, elle a brisé les vieux cadres historiques qui auraient tendu, en se remplissant, à la fragmenter en des disciplines distinctes évoluant de manière divergente. La géométrie, entre autres, est morte en tant que branche autonome ; la géométrie euclidienne n'est plus que l'étude fort intéressante d'un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'un produit scalaire et, dans cette courte phrase, tous les axiomes nécessaires sont contenus.

"La" mathématique

On voit pourquoi il nous est permis de parler de "la mathématique". On voit aussi combien le point de vue de la mathématique sur elle-même est éloigné du point de vue historique qui lui a donné naissance. Mais disait Bachelard, "dans le règne de la pensée scientifique, ce qui mérite le nom d'idée nouvelle est immédiatement réorganisation des idées anciennes". La réforme de soi qu'entraîne une idée scientifique nouvelle nous offre un passé lui-même nouveau, un passé renouvelé en même temps qu'un avenir à bâtir. Cela n'est nulle part plus vrai que dans cette mathématique qui se veut théorie unifiée au feu de l'esprit et non savoir poussiéreux acculumé couche par couche. C'est là, bien souvent, l'origine de l'économie de pensée dûe aux mathématiques.

MODELES ET STRUCTURES

Pour le savant contemporain, c'est la science toute entière qui est une, en droit comme en fait. L'interdisciplinarité n'apparait pas comme un produit de la mode, mais comme une nécessité du succès global de la recherche. Nous allons en donner tout à l'heure quelques exemples.

Pour qui prend au sérieux la science et son unité, nous avons vu que celle-ci apparait comme un tissu indéchirable dont la trame est faite des résultats des analyses et des expériences privilégiées par lesquelles nous enserrons le réel, tandis que la chaîne procède de la démarche théorique, donc mathématique.

es deux niveaux de nos athématiques

Nos mathématiques jouent là en fait à deux niveaux : elles peuvent être outil auxiliaire de presque toutes les disciplines, intervenant notamment dans l'analyse du réel soit par l'informatique théorique, soit par l'approche statistique et probabilitaire. Elles peuvent se faire aussi instrument véritable de pensée. L'ambition asymptotique de tout savant, ambition avouée ou non, est l'élaboration d'un modèle mathématique permettant de prévoir et de dominer, à une approximation aussi grande que possible, une classe de phénomènes aussi large que possible. Un tel modèle n'est autre qu'une structure plus ou moins riche. Ce n'est que lorsqu'un tel modèle a pu être construit que nous considérons qu'il y a véritablement explication et dénouement de la complexité des apparences.

L'introduction de la notion de modèle appelle quelques réflexions : tout d'abord savoir mettre les mathématiques à son service consiste aussi à ne jamais leur faire dire plus qu'elles ne peuvent, à mettre en pleine lumière, de manière correcte, les présupposés et les approximations propres à chaque domaine. De présupposés, servant d'axiomes, trop éloignés de l'expérience, on ne tire, mathématiquement ou non, que des sottises.

xpérience et imagination héorique

D'autre part, si l'expérience peut conduire à écarter certaines structures, si l'accord avec elle demeure la condition impérative, qui nous assure que nous ne faisons pas vainement la théorie de quelque monde imaginaire, il reste que ce n'est pas de l'expérience, en dernière analyse, que dépend le surgissement d'un modèle nouveau, mais de l'imagination d'un esprit théorique, le jeu royal que le savant joue ne trouvant sa justification qu'à posteriori. Nous sommes ici bien loin du positivisme. Cela fut vrai de Newton comme de Maxwell, d'Einstein comme de Pauli, de Walras comme de Von Neumann. La théorie quantique des champs et une part notable de l'économie attendent aujourd'hui de nouveaux modèles suffisamment raffinés.

Il convient aussi d'observer, à la lumière de ces exemples, qu'il existe une hiérarchie naturelle des modèles correspondant d'une part à leurs champs d'action respectifs, d'autre part à la généralité et à la simplicité des postulats qui les engendrent. Il ne faut pas confondre le petit modèle phénoménologique local, à l'ambition limitée, et les grands modèles théorétisants, visant à synthétiser les phénomènes de champs apparus initialement comme distincts.

Enfin, pour ces derniers modèles, il importe de ne pas succomber à une tentation, ce que nous faisons trop souvent : identifier modèle et réalité, confondre par exemple l'espace de la géométrie euclidienne et l'espace où jouent les phénomènes physiques à notre échelle. Tel modèle traduit au mieux, à un certain degré d'approximation, tout ce que nous pouvons dire de sérieux aujourd'hui sur tels phénomènes physiques ou économiques. Demain, il se trouvera englobé dans quelque nouveau modèle plus satisfaisant, mais que nous n'avons pas plus de raison de "croire vrai". Il faut nous garder de l'idolâtrie des modèles.

Attention à l'idolâtrie des modèles

J'aimerais donner quelques exemples priviligiés : toute une classe de phénomènes électriques. A partir de cet isomorphisme, on a construit ces "calculateurs analogiques" qui permettent, par mesure d'effets électriques, de prévoir numériquement des résultats hydrodynamiques et d'épargner des expériences grossières et coûteuses sur des modèles hydrauliques réduits.

Des théories mathématiques toutes prêtes, celle des espaces de Hilbert provenant lointainement dans son histoire de l'analyse des vibrations et celle de la représentation des groupes largement polyvalente ont permis l'élaboration de notre mécanique quantique contemporaine et de notre théorie des particules élémentaires. Celle-ci construite sous l'influence de Dirac, Pauli et Wigner, procède d'une pensée algébrique globalement simple, même si la technique effective en est fort raffinée.

On s'efforce actuellement de bâtir une théorie abstraite des échanges qui s'applique aussi bien aux échanges entre systèmes physiques qu'aux échanges entre cellules économiques. Ainsi l'économie d'échange et la thermodynamique pourraient recevoir un cadre commun de pensée où s'identifieraient par exemple prix et potentiels thermodynamiques, fonction de satisfaction et entropie. Une certaine forme de l'économie de production, à technologie fixée, pourrait trouver son analogue dans la cinétique chimique contemporaine.

...odèles polyvalents

On voit l'intérêt de ces modèles polyvalents, à interprétations variées, qui permettent l'échange des intuitions. Chaque discours interprétatif représente une médiation différente entre notre volonté de rationalité et le choc d'un réel plus ou moins affiné ; dans une certaine mesure, il montre, par son existence même, notre maladresse relative à mathématifier le réel ; d'autre part il est, concurremment avec les motivations propres aux mathématiques, source pour notre imagination. Il semble que demain, il soit possible d'élaborer une "économie statistique", analogue, c'est-à-dire convenablement isomorphe à des parties notables de la mécanique statistique ou de la théorie de l'information. Ainsi certains phénomènes physiques, économiques et linguistiques pourraient trouver un cadre commun de pensée.

Ailleurs, l'ethnologue Levi-Strauss dégage des structures algébriques vraies, dans l'étude comparée des systèmes de parenté à travers les différentes civilisations ; c'est ce qu'il nomme structures élémentaires de la parenté et ce sont effectivement des structures mathématiques, au plein sens du terme. Mais je dois avouer que quand Levi-Strauss lui-même veut mettre en jeu ce qu'il nomme les "structures des mythes", la notion de structure sous-jacente apparaît comme profondément différente et n'entraîne pas, pour moi, la même conviction. Il reste que ces efforts méthodologiques ont ouvert de nouvelles voies de réflexion. Le structuralisme manifeste une prise de conscience certaine dans le domaine social, sur la manière dont se constitue une science.

structuralisme et démarche synchronique

Abandonnant le concept pseudo-scientifique de cause, il vise dans sa démarche dite synchronique, à dégager globalement de l'ensemble des phénomènes un système apte à fonctionner et qu'il soit raisonnable d'isoler, systèmes de parenté par exemple ou système constitué par une langue naturelle, où à la limite système de schèmes de pensée dont il convient de décrire abstraitement pour une structure aussi mathématisée que possible l'adéquation et la stabilité.

A travers la mécanique statistique contemporaine, comme à travers toute une part du réel économique et social, à travers beaucoup de problèmes d'organisation aussi, règnent deux complexes théoriques, l'un réunissant la combinatoire et la théorie des graphes, l'autre fait de la programmation convexe (théorie de l'optimisation), de théorie des jeux et de théorie du contrôle au sens de Pontryagin, tout deux trouvant leur efficacité dans l'usage des ordinateurs. C'est au second de ces complexes que je veux m'intéresser quelques instants.

Cela a commencé vers 1930 avec les travaux de von Neumann sur la théorie des jeux et ses applications à l'économie, cela a continué avec les recherches de Kuhn et Tucker concernant l'optimisation et, plus récemment, nous avons bénéficié des résultats généraux de Pontryagin concernant le contrôle d'un système en évolution. Ainsi s'est constitué un magnifique instrument d'intelligence et d'action, transdisciplinaire par sa nature même.

Transdisciplinarité du complexe : programmation convexe, jeu, contrôle.

A ce sujet, j'aimerais faire deux remarques : tout d'abord, tous les systèmes que nous envisageons, qu'ils soient physiques, économiques ou sociaux, connaissent dans leur évolution de larges phases de stabilité, entrecoupées par des chocs (dus à des modifications brutales de liaisons, des technologies, etc.) ou des périodes d'instabilité. Il apparait que cette apparence de régularité ou de stabilité correspond au rôle prépondérant que jouent dans leur description, des fonctions convexes par morceaux, les frontières de convexité correspondant à l'apparition des phénomènes d'instabilité ou de choc. Il en est ainsi en thermodynamique pour l'entropie considérée comme fonction des variables intensives, en économie pour les différentes fonctions décrivant les processus d'échange ou de production etc ; c'est ce qui explique le rôle joué par la programmation convexe et l'optimisation.

Le jeu est la chose la plus sérieuse du monde

D'autre part, le jeu est la chose la plus sérieuse du monde et nous jouons tous ou plutôt nous pouvons décrire notre action en termes de jeu. Le physicien joue avec la nature, le dirigeant d'entreprise, l'aménageur et l'urbanisme jouent avec les phénomènes économiques, et, bien entendu, les militaires jouent. Beaucoup de ces jeux sont, hélas, traduisibles en termes de jeux à coalitions variables que nous sommes mal armés pour traiter. Nous jouons tous et nous voulons élaborer des stratégies qui, compte tenu à chaque instant de notre information, nous donnent le maximum de chances d'un certain type de gain. Certains de ces jeux sont aléatoires, d'autres non. A travers le complexe programmation convexe, jeux, contrôle, des problèmes importants pour notre action, notre vie sociale, ont trouvé un cadre unique de pensée et commencent à être justifiables de techniques analogues, où les ordinateurs jouent un grand rôle. Certains problèmes limités ont reçus des solutions rigoureuses : il est devenu impossible de gérer des stocks, un port maritime important ou un aéroport, d'organiser de vastes projets aux multiples tâches élémentaires, sans l'appui de programmes mis en oeuvre par des ordinateurs grands ou petits. Dans d'autres cas, les plus nombreux, ce sont seulement des approches qui sont suggérées et ces approches ne dictent évidemment pas les solutions, mais indiquent les choix cohérents réellement possibles et permettent, par simulation sur des modèles simplifiés, l'étude des prévisions à court terme en fonction de différestes hypothèses.

Un concept comme le temps physique a une longue histoire et son évolution peut être prise comme symbole de l'évolution d'une partie importante de la science.

C'est l'écoulement uniforme du temps, la notion de durées égales qu'il a d'abord fallu saisir. Jusqu'à Galilée et Newton, on peut dire que cette notion n'a été appréhendée qu'implicitement et que les mesures correspondantes ne reposaient que sur la répétition : la rotation de la sphère céleste qui ramène les étoiles à la même position apparente, qui détermine le spectacle du ciel et conditionne étroitement la vie humaine était prise pour uniforme. Pour fractionner cette unité, on s'efforçait de répéter sur terre le déroulement d'un phénomène dans des conditions aussi identiques que possible (sablier, clepsydre), tout en étant parfaitement incapable de faire la théorie du phénomène. On réussit aussi à aboutir à un temps cinématique, apte à la description des mouvements les plus simples, mais dont la mesure précise demeure longtemps au delà des forces humaines.

Impossibilité de mesurer avec précision le temps cinématique

Il faut attendre l'apparition de la dynamique classique pour, à la fois, comprendre que l'écoulement uniforme du temps pose un problème, pour penser et résoudre ce problème, pour véritablement mesurer le temps dynamique et relier complètement le temps astronomique au temps terrestre. Qu'est-ce que le temps pour la mécanique classique ? C'est en vérité l'équation fondamentale de la dynamique qui le définit. Selon la boutade d'un astronome célèbre "c'est cette variable appelée "t" qui fait que les équations de la mécanique sont vraies". C'est le caractère universel de ces équations et leur manière de relier des concepts de temps et d'espace, de masse et de force qui définit au fond globalement l'ensemble de ces concepts, une définition indépendante de chacun d'entre eux se révèlant vite impossible. La prévision extrêmement précise de tout un réseau de coïncidences temporelles entre phénomènes justifie cette approche et la prise de tout arbitraire.

Le temps dynamique: celui des équations

Tout système mécanique simple dont nous savons faire la théorie dynamique complète peut aussi servir au repérage du temps, à la mesure indirecte du temps. La rotation de la Terre sur elle-même va continuer longtemps à être considérée comme uniforme, ce qu'elle est à une haute approximation, mais il faudra se résigner à lui attribuer des irrégularités, à la considérer comme une horloge qui tantôt avance, tantôt retarde ? Mettant en jeu toute la mécanique céleste et une grande partie des observations, le temps astronomique (qui va être jusqu'à nos jours le temps physique) ne peut plus être mesuré, mais savamment calculé, déterminé par le calcul à 10^{-10} près environ.

Le temps astronomique : le temps calculé

Il nous faut maintenant voir les incidences sur le temps de la relativité d'une part et de la mécanique quantique d'autre part. La pensée d'Einstein a mûri à partir d'une analyse des expériences, réelles ou de pensée, de "coïncidences temporelles" qui ne peuvent s'effectuer au mieux qu'à l'aide d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse $C = 3000.000$ km/sec élevée certes, mais finie. C'est de cette analyse qu'à surgi le caractère relatif à l'observateur des coïncidences, la nécessité de modifier la cinématique galiléenne et de bâtir une nouvelle dynamique "relativiste", celle enfin de considérer l'espace-temps comme le seul background physique, où l'ensemble des phénomènes peut être décrit d'une manière objective. Avec cette théorie, de nouveaux problèmes relatifs au temps sont apparus. Tout d'abord, il convient de distinguer dans l'espace-temps des variables temporelles jouant un rôle purement topologique, c'est-à-dire servant à la manière des coordonnées cartographiques purement à repérer les évènements. C'est seulement ensuite que l'on peut aborder l'aspect métrique

L'espace-temps de la relativité

et prendre conscience du rôle du temps propre qui devient un temps s'écoulant uniformément presque par définition. Enfin alors que "la flèche du temps", son orientation du passé vers le futur ne posait guère de questions dans le cosmos newtonien ou même dans l'espace-temps plat de Minkowski (relativité restreinte), à l'échelle du cosmos einsteinien représenté sur un espace-temps courbe, pourraient apparaître des topologies étranges permettant l'échange passé-futur, ce qu'on interdit généralement. Cette question de la flèche du temps joue aussi un grand rôle en mécanique quantique (symétrie temporelle T).

Le passé et le futur

De 1920 à 1940, la mécanique quantique a elle aussi conduit à une dynamique autre que la classique et pour le problème du temps à une véritable dynamique du rayonnement, dynamique qui est à la fois quantique et relativiste. C'est sur elle que nous basons désormais la définition et la mesure d'un temps métrique, notre temps physique actuel et de la notion d'écoulement uniforme. Les horloges dites "atomiques" stabilisées sur résonnances atomiques particulièrement aigües nous fournissent un temps ainsi "stabilisé" supérieur au temps astronomique lui-même, défini à 10^{-12} environ. C'est par ce moyen, qui tient compte à la fois de la mécanique quantique et de la relativité, que se trouve défini et réalisé ce qu'on peut appeler l'étalon de temps.

Le temps métrique de la mécanique quantique

On voit quel a été le chemin parcouru et comment la définition scientifique d'une seule grandeur, l'affinement d'un seul concept n'a pu s'effectuer qu'à travers la mise en jeu de toutes les grandes théories, mécanique céleste classique d'abord, puis relativité et mécanique quantique.

Que conclure au terme de cette analyse ? Essentiellement, me semble-t-il, à l'homogénéité de l'activité théorique à travers science et technique, indépendamment des domaines où elle s'exerce. C'est le développement et l'adaptation de cette activité théorique qui supposent et imposent une certaine transdisciplinarité. Le structuralisme, pour une large part, vis à en faire bénéficier ce qui n'était que des "histoires" sur la société. C'est ainsi une démarche unique, théorique et expérimentale, qui nous conduit à comprendre et à agir, qui inspire simultanément "science et arts", les pouvoirs acquis se révèlant les garants de notre intelligence des phénomènes et nous permettant, sans rien perdre, de tout remettre en question.

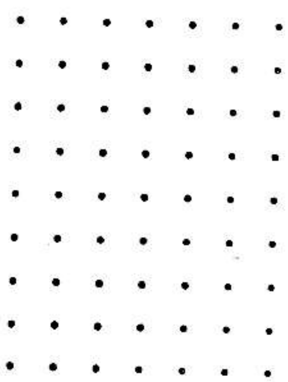
Nos universités présentes forment, semble-t-il, à travers le monde une proportion trop grande de spécialistes de disciplines prédéterminées, donc artificiellement bornées, alors qu'une grande partie des activités sociales, comme le développement même de la science, demandent des hommes capables à la fois d'un angle de vue beaucoup plus large et d'une focalisation en profondeur sur des problèmes ou des projets nouveaux, transgressant les frontières historiques des disciplines. Ce sont ces hommes qu'il nous faut aussi former.

SUR LE THÉOREME DE PICK

par Marc BLANCHARD
(ROCHEFORT - CHARENTE MARITIME)

Une formule simple, et assez peu connue, permettant de déterminer l'aire d'un polygone construit sur un réseau carré : la formule de Pick.

Extrait de "Le Pentamino", bulletin de liaison des animateurs de clubs, publié par l'IREM de GRENOBLE, n° 1, Juillet 1973 :



> *"Un géoplan est une planche (en général carrée) où sont plantés des clous, formant un réseau carré. A défaut de géoplan (où servent des élastiques), on peut se contenter d'un réseau carré de points et d'un stylo... On trace un polygone fermé quelconque sur le géoplan. Essayer d'exprimer son aire (en carreaux-unités) en fonction du nombre de clous intérieurs au polygone, et placés sur le périmètre du polygone".*

Ce qui suit, est sauf erreurs, une solution de ce problème.

Les seuls polygones envisagés sont les polygones non aplatis dont tous les sommets sont des points du réseau. On écrira $A(i,n)$, l'aire d'un polygone ayant i points intérieurs et n points sur le périmètre, tous points du réseau. Cette notation sera justifiée ultérieurement, quand on aura montré que cette aire ne dépend que de i et de n, et non de la forme du polygone. On supposera notre géoplan non limité.

<u>Montrons dans un premier temps que : $A(0,3) = 1/2$</u>

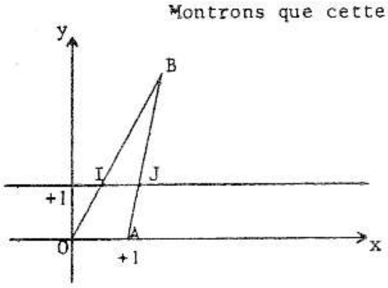
On ne s'intéresse donc qu'aux triangles sans point du réseau intérieur et dont les seuls points du réseau sur le périmètre sont les sommets. Soit (OAB) un tel triangle. On rapporte le réseau à un repère orthonormé Ox , Oy de façon que les axes contiennent les 4 points du réseau les plus proches de O . Nous allons envisager successivement 2 cas :

1) A est situé sur un axe ;
2) A n'est pas situé sur un axe.

1) Si A est situé sur un axe, alors nécessairement ses coordonnées a et a' vérifient : $\{|a|, |a'|\} = \{0, 1\}$. Sans nuire à la généralité, prenons $(a,a') = (1,0)$. Cherchons les coordonnées de $B(b,b')$. b et b' sont étrangers, sinon leur P.G.C.D. noté $D(\neq 1)$ serait tel que le point de coordonnées $(b/D, b'/D)$ appartiendrait au réseau et à $]0,B[$. Ce qui contredit le choix de (OAB).

Supposons $|b'| \neq 1$, sans nuire à la généralité, on peut prendre $b' > 1$.

Montrons que cette hypothèse est absurde.



On appelle I et J les points de $]0,B[$ et $]0,A[$ d'ordonnée 1. Le segment $[I,J]$ est intérieur au triangle, et :

$$I(b/b',1) \;;\; J((b+b'-1)/b',1).$$

E désigne la fonction "partie entière", et la division euclidienne de b par b' donne : $b = kb'+r$ $(1 \leqslant r < b'$, car b et b' sont étrangers). On obtient :

$$E(b+b'-1)/b') = 1+k = 1+E(b/b').$$

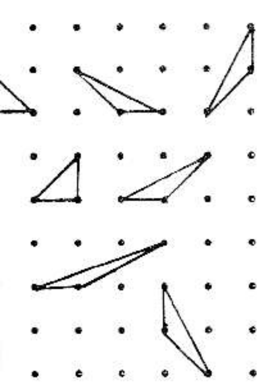
Le point de coordonnées $(E((b+b')/b'),1)$ appartient au réseau et est intérieur au triangle comme élément de $]I,J[$. Ce qui contredit le choix du triangle. Nécessairement, $|b'| = 1$.

Dans le triangle (OAB), si $[0,A]$ est la base, $|b'|$ mesure la hauteur.

Donc : $A(0,3) = 1/2$ (quand A est situé sur un axe).

2) Si A n'est pas situé sur un axe, ni A, ni B n'est l'un des quatre points du réseau les plus proches de O (si B est l'un d'eux, on est ramené au cas précédent). On pose : $A(a,a')$ (a et a' non nuls). Il est nécessaire que a et a' soient étrangers. Une équation de la droite (OA) est : $a'x - ay = 0$. Soit $B(x,y)$, en appelant d la distance de B à (OA), $d = |a'x-ay| / \sqrt{a^2+a'^2}$. d est minimale non nulle, B étant un point du réseau $|a'x-ay| = 1$. Comme a et a' sont étrangers, d'après l'identité de Bezout, il y a des couples solutions de la forme (x_0+ka, y_0+ka'), $k \in \mathbb{Z}$, (x_0, y_0) étant une solution quelconque. On sait que dans l'ensemble $[1, a-1] \times [1, a'-1]$, il n'y a que deux solutions (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) vérifiant respectivement : $a'x_1 - ay_1 = 1$ et $a'x'_1 - ay'_1 = -1$.

Mais $|a'x-ay| = \|\overrightarrow{OA} \wedge OB\|$, c'est donc le double de l'aire de (OAB), qui vaut alors $1/2$; lorsque B est situé sur l'une des deux droites d'équation $a'x-ay = 1$ ou $a'x-ay = -1$. Il ne peut y avoir de point du réseau intérieur au triangle ou sur son périmètre autre que les sommets, car la distance de tels points à (OA) serait strictement inférieure à $d = 1$. Pour tout point du réseau $|a'x-ay|$ étant entier, il serait plus petit que 1, donc nul, ce qui est absurde. On a bien : $A(0,3) = 1/2$.



A(0,3) = 1/2

Il faut chercher maintenant si ce sont les seules solutions.

Soit $C(c,c')$, tel que : $a'c-ac' = n$ $(|n| > 1)$. C est-il solution ? Nous allons montrer que non, c'est-à-dire que le triangle (OAC) admet un point du réseau intérieur ou sur ses côtés autre que les sommets. a et a' étant étrangers, les couples (c,c') solutions de $a'c-ac' = n$, s'écrivent $(nx_1+ka, ny_1+ka')(k \in \mathbb{Z})$. Montrons que si n est positif $(n > 1)$, il existe α, β, γ positifs tels que : $\alpha, \beta, \gamma = 1$ et λ étant un relatif que l'on calculera, $B_{1,\lambda}$ $(x_1+ a, y_1+ a')$ est le barycentre de (O,α) ; (A,β) ; (C,γ). Si cela est $B_{1,\lambda}$ est un point du réseau appartenant à l'enveloppe convexe de O, A, C.

Il faut : $x_1+ \lambda a = \beta a+ \gamma(nx_1+ka)$ et $y_1+ \lambda a' = \beta a'+\gamma(y_1+ka')$. Ce qui équivaut au système : $(\beta-\lambda+\gamma k)a+(\gamma n-1)x_1 = 0 = (\beta-\lambda+\gamma k)a'+(\gamma n-1)y_1$. Système homogène de Cramer à 2 inconnues $(\beta-\lambda+\gamma k)$ et $(\gamma n-1)$.

Donc : $\gamma = 1/n$ (>0) ; $\beta - \lambda + k/n = 0$.

Comme on veut $0 \leqslant \beta \leqslant (n-1)/n$; on doit avoir $0 \leqslant \lambda - k/n \leqslant (n-1)/n$, soit : $k/n \leqslant \lambda \leqslant (n+k-1)/n$. Il vient donc : $\lambda = E((n+k-1)/n)$.

$B_{1,\lambda}$ appartient à l'enveloppe convexe de O, A, C, comme un au plus des coefficients α, β, γ est nul, $B_{1,\lambda}$ diffère de O, A, C. Alors (OAC) admet un point du réseau intérieur ou sur son périmètre autre que les sommets. Ce cas est à rejeter.

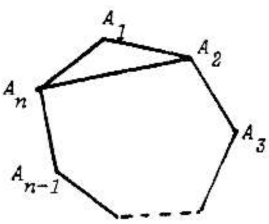
Si n est négatif ($n < -1$), la démonstration est analogue en considérant $B'_{1,\lambda}$ $(x'_1 + \lambda a, y'_1 + \lambda a')$. $(-nx'_1, -ny'_1)$ est solution particulière de : $a'c - ac' = n$.

On a donc trouvé le premier résultat fondamental suivant :

$$\boxed{A(0,3) = 1/2}$$

Calculons maintenant A(0,n).

Soit un polygone sans point du réseau intérieur, ayant n points distincts du réseau sur le périmètre : $A_1, \ldots, A_n$, de façon qu'entre 2 points consécutifs de cette suite (ou entre A_n et A_1), il n'y ait pas de point de la suite. On note $(A_1 \ldots A_n)$, le polygone formé par ces points.



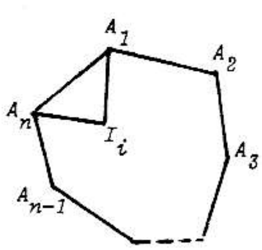
Supposons que A_1 soit un sommet, appartenant à la frontière de l'enveloppe convexe des points de la suite, alors :
$(A_1A_2A_n) \cup (A_2 \ldots A_n) = (A_1 \ldots A_n)$ et $(A_1A_2A_n) \cap (A_2 \ldots A_n) = [A_2A_n]$ (d'aire nulle).
On en déduit :

$$A(0,n) = A(0,3) + A(0,n-1)$$

La suite A(0,n) est arithmétique de raison 1/2 et de 1er terme 1/2.

Donc $\boxed{A(0,n) = n/2 - 1}$ pour tout naturel $n (n \geq 3)$.

Montrons par récurrence sur i, que plus généralement $A(i,n) = n/2 - 1 + i$.
L'hypothèse est démontrée pour tout n, naturel, $n > 3$, et i nul ; on la suppose vraie jusqu'à $i-1$.



Soit $(A_1 \ldots A_n)$, un polygone, $A_1 \ldots A_n$ étant les points du réseau sur le périmètre dans cet ordre. On suppose que le polygone a i points du réseau intérieurs, $I_1, \ldots, I_i$. On considère le polygone $(A_1 \ldots A_n I_i)$ et le triangle $(A_n I_i A_1)$ (I_i peut ne pas appartenir au côté (A_1A_n), par un choix convenable).

Alors : $(A_n I_i A_1) \cup (A_1 \ldots A_n I_i) = (A_1 \ldots A_n)$;

et $(A_n I_i A_1) \cap (A_1 \ldots A_n I_i) = [A_1 I_i] \cup [A_n I_i]$.

On en déduit que l'aire de $(A_1 \ldots A_n)$ est la somme des aires de $(A_n I_i A_1)$ et de $(A_1 \ldots A_n I_i)$.

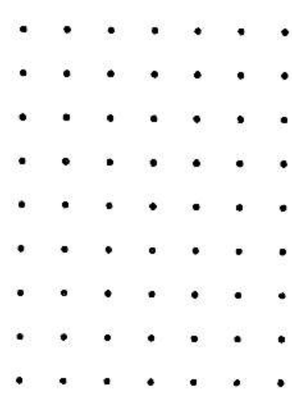
On notera j (resp. j') le nombre de points intérieurs, et p (resp. p') le nombre de points sur le périmètre pour $(A_1 \ldots A_n I_i)$ (resp. $(A_n I_i A_1)$).

Si α est le nombre des points $I_1, \ldots, I_{i-1}$ appartenant à $]A_1 I_i[\cup]A_n I_i[$, alors : $p + p' = n + '+2\alpha$, (les α points $I_1, \ldots I_{i-1}$ sur $]A_1 I_i[\cup]A_n I_i[$
$j + j' = i - 1 - \alpha$ sont comptés une fois sur chaque périmètre).

Comme on a supposé que, pour tout n, naturel, $(n \geq 3)$, pour tout k, naturel, $0 \leq k < i$, on a : $A(k,n) = n/2 + k - 1$. Ici, l'aire de $(A_1 \ldots A_n)$ vaut :

$$A(i,n) = (p+p')/2 + j + j' - 2$$

$$\boxed{A(i,n) = n/2 + i - 1}$$

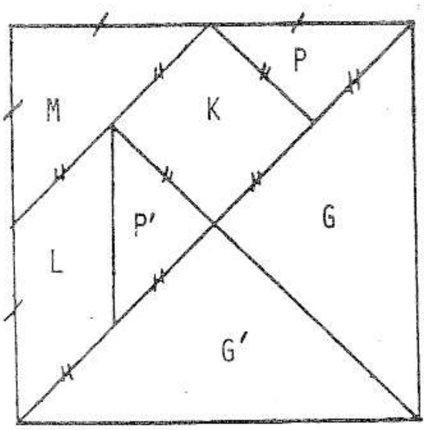


Ce résultat est connu sous le nom de formule de Pick.

RECHERCHE ET DÉCOUVERTE COLLECTIVES DE LA FORMULE DE PICK EN CM_2

par Jean-Claude GOIX
(ORLÉANS - LOIRET)

La formule de Pick, dont la démonstration (difficile) a été fournie à l'article précédent, peut donner lieu à d'intéressantes manipulations dès l'école élémentaire.



LE TANGRAM

Les activités se sont déroulées en février 1976 dans la classe de M. MICHEL (CM_2) de l'Ecole Annexe Charles PEGUY de l'Ecole Normale de Garçons d'ORLÉANS.

Les enfants ont l'habitude de travailler avec des planchettes à clous à réseaux carrés. Ils ont entre autre fait des recherches sur les polygones et plus spécialement sur les quadrilatères.
C'est en recherchant une autre exploitation de la planchette à clous que j'ai voulu essayer d'arriver avec eux à la formule de PICK. Je me suis inspiré d'un compte rendu de Simone SAUVY dans A.R.P. Mais contrairement à la démarche de Simone SAUVY qui travaillait avec un groupe restreint d'enfants volontaires nous avons impliqué la classe dans son ensemble. Notre démarche a été volontairement directive.

I - OBJECTIFS

1) Découverte de la formule de PICK à partir de l'observation de tableaux de résultats numériques.

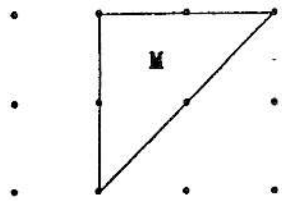
2) Construction, manipulation d'objets géométriques ; prise de conscience de la notion de figures superposables - évaluation d'aire.
En fait, dans la préparation préalable nous avions décidé de ne pas faire de l'obtention de la formule de PICK une fin en soi, ce qui explique les objectifs secondaires et le déroulement un peu particulier des quatre séquences.

II - MATERIEL UTILISE

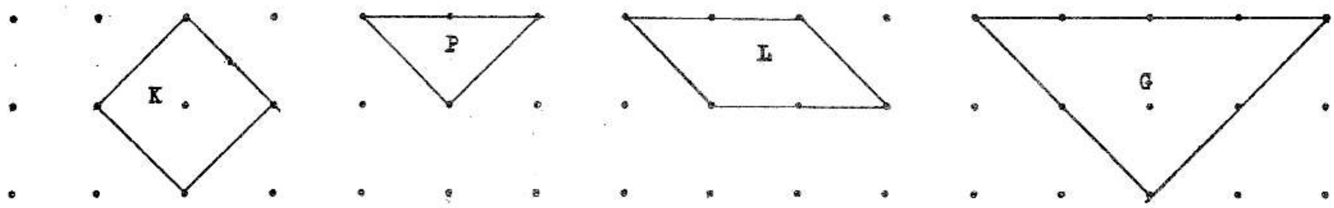
- deux à trois planches à clous par groupe de 4 à 5 enfants.
- feuilles quadrillées figurant les planches à clous.
- TANGRAM (j'anime un club mathématique dans cette école où nous utilisons à titre de jeux des TANGRAM, j'ai voulu intégrer ce matériel dans un cadre plus scolaire).

III - PREMIERE SEANCE

a) Construction à l'aide d'un organigramme, d'un carré dans lequel seront découpés les sept pièces du TANGRAM.
Le premier travail purement géométrique a été relativement long, les enfants ayant de grosses difficultés à effectuer un travail précis. Les deux points les plus difficiles ont été la construction du carré initial et le découpage.



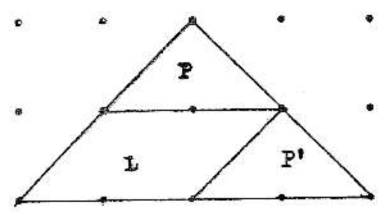
b) Observation et comparaison des sept pièces du TANGRAM : On a d'abord demandé aux enfants de représenter sur leur feuille pointée les sept pièces du TANGRAM. Le maître ayant représenté l'une de ces pièces au tableau Il a été conseillé aux enfants de commencer par représenter ces éléments du TANGRAM sur leur planche à clous.
La représentation du carré à donné lieu à de nombreuses erreurs.
La solution de la construction du carré a été présentée par MANUEL :
"J'ai remarqué que si on met le triangle P et le triangle P' collés, on obtient le carré K".
Par la suite on distinguera le carré K du TANGRAM du carré imité en exprimant que K à 4 points sur la frontière et 1 à l'intérieur.



IV - DEUXIEME SEANCE

On reprend les sept pièces obtenues dans la leçon précédente et le maître propose de faire des remarques sur ces pièces et de les comparer.
Les enfants ont déjà remarqué que P et P' étaient isométriques (par superposition)
On obtient ensuite des relations entre les aires, toujours à partir de superpositions.

Voici un exemple de solution assez élaborée :



$$s(G) = s(L) + 2s(P)$$

On arrive à la conclusion qu'il est possible d'évaluer l'aire d'une pièce avec une autre comme unité.

a) Il est alors proposé aux élèves de remplir le tableau suivant :

		G	G'	K	P	P'	L	M
aire S	l'unité est le triangle P	4	4	2	1	1	2	2
	l'unité est le carré K	2	2	1	0,5	0,5	1	1
	l'unité est le carré formé par 4 clous	4	4	2	1	1	2	2

Les élèves ont travaillé par groupe de 4 ou 5 sur ce tableau. Ils ont presque tous eu recours à la "superposition" pour remplir la première ligne. Il n'y a pratiquement pas eu d'échecs dans cette première phase. Le changement d'unité d'aire en prenant cette fois le carré K comme unité a été la source de plusieurs difficultés. La superposition étant impossible directement certains enfants ont été bloqués. Certains groupe se sont vite aperçu que l'aire de K étant double de celle de P, ont obtenu facilement la 2ème ligne. Les erreurs les plus fréquentes ont été celles pour P et P', où au lieu de 0,5 on a trouvé 1. Lors de la mise au point collective des enfants ont mis en évidence le rapport X2 entre les deux premières lignes. Ce sera la seule fois au cours des quatre séances où on parlera d'opérateurs. La troisième évaluation qui nous semblait le plus difficile a été bien vu par l'ensemble de la classe. Très vite les enfants ont vu la nécessité de découper le carré unité en deux et de faire des sommes : l'additivité des aires ne leur a pas posé de problèmes.

b) On a demandé ensuite aux enfants de remplir un deuxième tableau où apparaissent les variables : i = nombre de points intérieurs à la figure,
f = nombre de points situés sur la frontière,
s = aire (l'unité est le carré formé par 4 points)

	G	P	M	L	K
s	4	1	2	2	2
i	1	0	0	0	1
j	8	4	6	6	4

Le tableau rempli, le maître a demandé à titre indicatif "Peut-on trouver une loi, (le terme avait été expliqué précédemment) entre s - f et i ?"

- Une proposition : "s" c'est 4, i c'est divisé par 4, f c'est multiplié par 2 et le même élève d'ajouter aussitôt : "C'est pas une loi parce que ça ne marche pas pour les autres".

Le maître a alors arrêté la discussion, il était évidemment trop tôt pour réfléchir utilement sur la formule de PICK.
"Pour arriver plus facilement à la loi nous allons faire un troisième tableau"

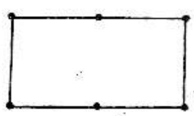
c) Vous allez construire sur votre planchette à clous ou sur votre feuille pointée des figures simples n'ayant aucun point à l'intérieur de la frontière.

Vous remplirez alors le tableau suivant :

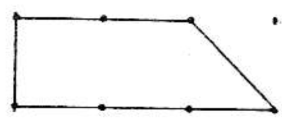
s	f	i
		0
		0
		0
		0

La recherche est faite par groupes et les solutions sont nombreuses et assez variées. Presque tous les enfants utilisent la planchette à clous.

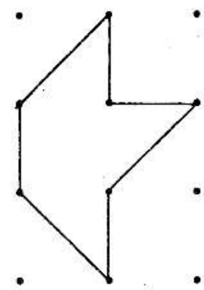
On trouve le plus fréquemment des solutions du type (a) ou (b), mais aussi des figures très élaborées (c).



(a)



(b)



(c)

s	f	i
4	10	0
2	6	0
1,5	5	0
6	14	0
2,5	7	0
1,5	5	0
4,5	11	0
3	8	0
5	12	0
1	4	0

Le maître fait alors le recensement des résultats numériques en remplissant le tableau proposé : on n'accepte que des résultats différents.
La séance se termine sur des remarques sur les résultats.
Catherine propose tranquillement : "J'ai remarqué que f c'est s multiplié par 2 plus 2".
"C'est vrai" ; "C'est pas vrai" ; la classe est divisée. Le maître propose de noter l'hypothèse de Catherine et de la vérifier la prochaine fois.

$$\boxed{f = 2s + 2}$$

V - TROISIEME SEANCE

On s'est proposé de vérifier l'hypothèse de Catherine et de le reformuler (pour la dernière séance) sous forme

$$s = \frac{f}{2} - 1 .$$

Dans ce but le maître a réordonné le tableau de résultat précédemment obtenu :

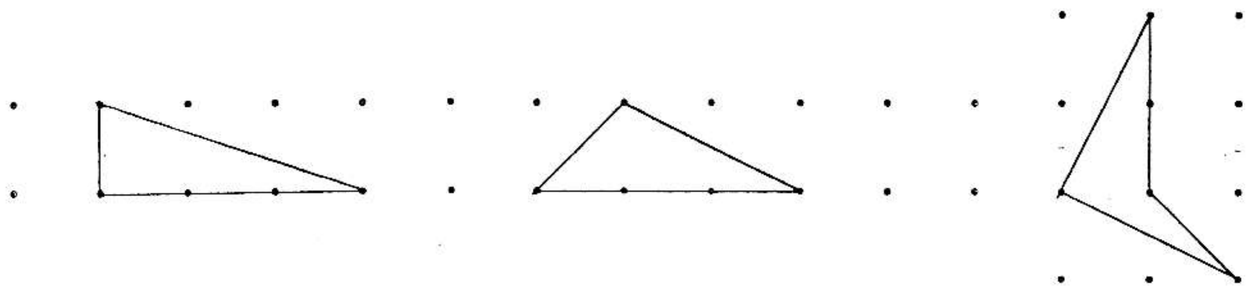
s	f	i
1	4	0
1,5	5	0
2	6	0
2,5	7	0
3	8	0
4,5	11	0
5	12	0

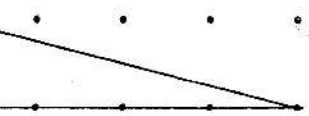
- Le maître propose aux enfants de compléter le tableau ainsi présenté :
"On peut faire 3,5 pour s, ça fait 9 clous à la frontière, on le vérifie avec la planchette à clous".
Accord général et même opération avec vérification sur la planchette à clous pour d'autres valeurs (s = 4, s = 6, s = 7)
La classe se met d'accord pour accepter l'hypothèse de Catherine f = 2s + 2.
Il n'est pas possible de vérifier au delà de s = 9 mais on a suffisamment de résultats pour adopter la formule.

Au cours de cette phase une élève, Valérie, a fait la remarque suivante :
on cherche à remplir la case s = 7.
"1 c'est 4, de 1 à 7 il y a 6, on le multiplie par 2 et on ajoute les 4 cela fait 16".
La classe ne suit pas Valérie, c'est trop compliqué, par contre le maître reprend l'idée pour essayer d'obtenir s en fonction de f.
On observe les 2 premières lignes du tableau : "Quand s augmente de 0,5 f augmente de 1". Valérie reprend aussitôt "C'est simple pour trouver s = 7 on cherche combien de demi il y a de 1 à 7 : il y en a douze puis on ajoute les 4 de 1". Quelques élèves approuvent mais l'ensemble de la classe ne suit pas.

Je recentre le débat "Voilà je connais f je veux trouver s. Regardez bien le tableau". Patrick : "Pour f = 8 on divise par 2 et on retire 1".
"Ca marche aussi pour f = 6"
Le maître reprend la proposition et c'est Patrick qui va écrire au tableau sa formule $s = \frac{f}{2} - 1$.

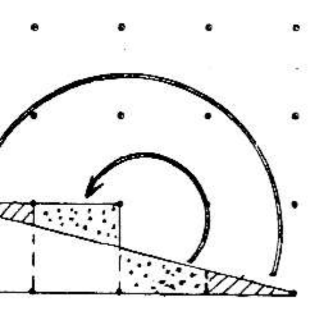
On vérifie que "ça" marche pour les autres exemples déjà vus.
La séance se termine en application : le maître propose des surfaces à mesurer du type :





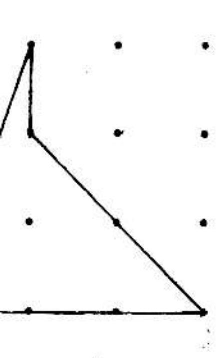
Cette application donne lieu à d'excellentes remarques d'ordre géométrique :

Ainsi, pour mesurer le triangle ci-contre et vérifier que la formule de Patrick est juste, Manuel vient proposer la manipulation suivante.



Il explique qu'en reportant le triangle hachuré et le trapèze pointé il obtient un rectangle de 2 unités d'aires. Certains lui rétorquent que c'est pas une démonstration et que c'est approximatif, mais finalement comme cela permet de retrouver la formule de Patrick $s = \frac{f}{2} - 1$ on finit par être d'accord. Manuel simplifiera lui même sa démonstration en constatant que l'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle ayant les mêmes côtés.

- QUATRIEME SEANCE

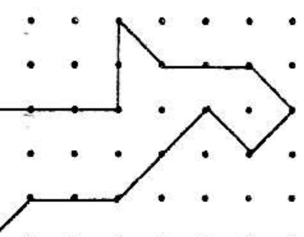


a) Le maître rappelle la formule de PICK $s = \frac{f}{2} - 1$ dans le cas où i = 0. On fait quelques vérifications puis on se propose de calculer l'aire de la figure ci-contre :
"Un élève remarque aussitôt que la formule $s = \frac{f}{2} - 1$ ne marche pas car il y a un point à l'intérieur" On vérifie quand même :
Calcul direct : s = 3,5 u.a.

$$s = \frac{f}{2} - 1 \quad s = \frac{7}{2} - 1 \quad = 2,5 \text{ u.a.}$$

On va chercher une nouvelle formule qui marche aussi dans le cas où il y a des points à l'intérieur.

b) Dans cette ultime recherche les enfants vont travailler à nouveau avec les pièces du TANGRAM. J'ai construit une dizaine de figures à l'aide des 7 pièces, qui peuvent toutes être représentées sur la planche à clous ou la feuille "pointée". Cette fois les enfants vont travailler avec f et i variables et s constant. Les enfants doivent en groupe réaliser les puzzles proposés (ils sont à l'échelle du carré initial et peuvent être obtenus par superposition, ceci pour ne pas ajouter de difficultés) et remplir le tableau suivant après avoir représenté les puzzles sur leur feuille pointée.



...mple de figure proposée

	s	f	i
A	16	18	8
B	16	20	7
C	16	14	10
D	16	22	6
E	16	16	9
F	16	12	11
G	16	24	5

Le travail prend une demi-heure environ Les enfants ont des difficultés au niveau de la représentation. Il leur est indispensable de se servir de la planchette à clous.

Remarques sur le tableau

Une fois collectivement établi le maître propose d'en faire l'examen :

Boudou "La surface c'est toujours 16, c'est normal par ce qu'on utilise toujours les mêmes pièces".

Valérie "A c'est 18 pour f et 8 pour i
B c'est 20 pour f et 7 pour i
Quand on augmente f de 2 le i diminue de 1".

Catherine "On ajoute f et i on divise par 2 et si i est un nombre impair on retranche 0,5 et si i est pair on trouve exactement s"
Le maître inscrit ces remarques mais propose de réordonner le tableau : un élève propose de ranger suivant les valeurs de i en commençant par i = 5.
Le maître propose de continuer le tableau sans regarder le précédent :

Philippe : Si i = 11, il y en aura 12 pour f.

Rachid : si i = 12, f = 10

	s	f	i
K	16	24	5
	16	22	6
	16	20	7
	16	18	8
	16	16	9
	16	14	10

Cathy : j'ai remarqué que f décroit de 2 en 2 tandis que i augmente de 1 en 1.
On voit que la remarque de Cathy est la même que celle de Valérie. On vérifie alors que la règle de Catherine ne marche pas. On l'abandonne donc. Je relance la recherche d'une loi en regardant si la loi $s = \frac{f}{2} - 1$ marche. Des enfants protestent "C'est pas possible car il y a des points à l'intérieur" On regarde cependant pour la première figure K.

$s_K = \frac{24}{2} - 1 = 11$

Patrick remarque aussitôt "Pour trouver 16 il suffit d'ajouter les points à l'intérieur". Ca marche aussi pour les autres. On vérifie alors et Patrick énonce sa règle "Pour trouver s on donne f par 2, on ôte 1, et on ajoute i".

$$\boxed{s = \frac{f}{2} + i - 1}$$

COMMENTAIRES

Le maître a réutilisé par la suite plusieurs fois la formule de PICK dans des applications concrètes de mesures d'aires.
Il est clair que l'on peut certainement parvenir plus directement au résultat en suivant la même démarche mais en évitant de se servir du TANGRAM.
IL y a eu une superposition de difficultés mais en même temps une motivation certaine et des observations très riches.
La classe qui a l'habitude d'exprimer sa lassitude n'a jamais protesté, mais au contraire à manifesté un intérêt constant jusqu'à la fin.
Nos interventions (le maître et moi-même) ont été nécessaires lors de l'exploitation collective des résultats, surtout dans la dernière phase. On peut donc penser que notre premier objectif n'a été atteint qu'en partie :

Etablissement d'une loi à partir d'un tableau de données numériques.

Nous avons repris cet objectif quelques temps après (1 mois) : on a proposé aux enfants d'établir la formule d'Euler sur les graphes plans. Nous ne sommes pas intervenus ; et, uniquement pas l'observation d'un tableau de résultats 3 groupes sur les 6 ont fourni la bonne réponse (S + R - 2 = A)
les 3 autres ayant proposé des réponses du type : si R = 2 S = A ; si R = 3 S = A+1 .

LA NUMÉRATION SHADOK

par Christian KERN *et les élèves d'une classe de Sixième*
(VIERZON - CHER)

"Il n'est pas question dans le cycle d'observation d'une étude générale de la numération... On a voulu simplement briser les automatismes irréfléchis auxquels les enfants s'étaient habitués" (Instructions du 28 Février 1969)

"La table de multiplication est une manière de structurer le champ des nombres dans l'esprit des enfants" (René Haby. Le Monde de l'Education. Mai 1976).

L'émission télévisée "les Shadoks" nous a fourni pendant l'année 74-75 un excellent exemple de système de numération. Deux avantages immédiats :
- la popularité de l'émission provoque un enthousiasme évident chez les enfants
- l'utilisation des symboles GA, BU, ZO, MEU, permet une lecture facile et amusante évite l'ambiguité des notations et va plus loin dans le sens de l'objectivité.

Après une semaine de travail et de réflexion collective sur le sujet, la classe s'est partagée en petits groupes de travail qui ont élaboré la question de leur choix, avec une intervention minime du professeur. Ces travaux ont été envoyés aux auteurs de l'émission qui nous ont bien récompensés : nous avons été nommés "Académiciens à vie et perpétuels de l'Académie des Sciences Shadok de Vierzon".

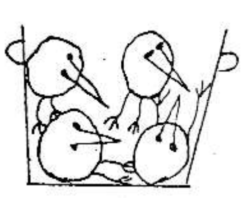
Constatations du professeur : j'ai été surpris de voir avec quelle facilité et quelle vitesse, les enfants ont "assimilé" les tables d'addition et de multiplication, sans jamais les apprendre (lorsqu'on faisait une faute, on repensait "shadoks et poubelles" La plupart ont été très vite capables d'effectuer des divisions à 2 chiffres, ce qui nous a bien sûr amené aux "nombres à virgule". Il a fallu hélas, toute l'autorité du professeur pour en rester là ! J'ai même appris que dans les foyers, on s'est mis à compter "en shadok", et l'habileté des enfants a ridiculisé bien des adultes !

I - TEXTE DE PRESENTATION ELABORE PAR LES ELEVES

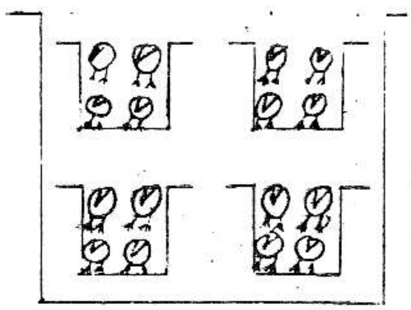
Nous sommes les élèves de la classe de 6ème 2 du C.E.S. Fernand Léger à VIERZON. Notre professeur de mathématiques nous a appris la numération shadok. Plusieurs groupes ont rédigé des problèmes en numération shadok, et nous tenons à vous les envoyer.

Explications : les shadoks n'ont que 4 unités : GA, BU, ZO et MEU. (0 ; 1 ; 2 ; 3)
La numération shadok est le même principe que la base 4.
Si on a 0 shadok on dira GA shadok.
" " " 1 " " " BU "
" " " 2 " " " ZO "
" " " 3 " " " MEU "
Mais un problème se pose à partir de 4 shadoks, alors le grand shadok à inventé un système.

Les petites poubelles


petite poubelle = BUGA

Une petite poubelle contient 4 shadoks. Autrement dit on dira : 1 petite poubelle et 0 shadok à côté ce qui est égal en numération shadok : BU petite poubelle et GA shadok à côté.
Pareil pour 1 petite poubelle et 1 shadok
" " 1 " " " 2 "
" " 1 " " " 3 "



Une grande poubelle vaut : BU GA GA.

Les grandes poubelles

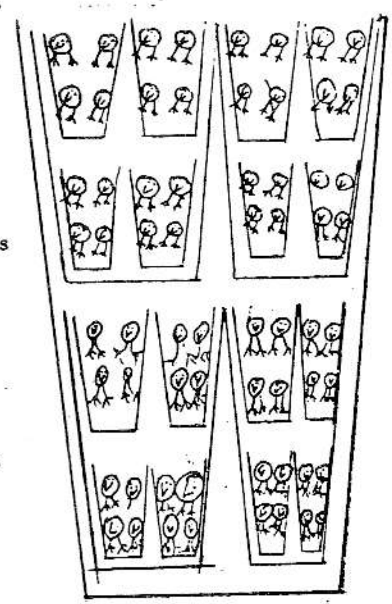
Arrivé à 3 petites poubelles et 3 shadoks
" " MEU " " " MEU "
ce qui est égal à 15 shadoks on dira :

1 grande poubelle et 0 shadok à côté.
BU " " " GA " " "

Même principe que les petites poubelles.

Nombres shadocks

0 = GA
1 = BU
2 = ZO
3 = MEU
4 = BU GA
5 = BU BU
6 = BU ZO
7 = BU MEU
8 = ZO GA
9 = ZO BU
10 = ZO ZO
11 = ZO MEU
12 = MEU GA
13 = MEU BU
14 = MEU ZO
15 = MEU MEU
16 = BU GA GA
17 = BU GA BU
18 = BU GA ZO
19 = BU GA MEU



Les containers

Arrivé à 3 grandes poubelles et 3 petites poubelles
et 3 shadoks on dit :

1 container et 0 shadok à côté
BU " " GA " " "
ensuite
BU container et BU shadok
BU " " ZO " etc...
Après les containers, il y a les supers containers
puis les hypers containers (mais, là
seuls les hypers shadoks les connaissent)

1 poubelle = 4 shadoks = BU GA shadoks
1 grande poubelle = 16 shadoks = BU GA GA shadoks
1 container = 64 shadoks = BU GA GA GA shadoks
1 super container = 256 shadoks = BU GA GA GA GA shadoks

additions

+	GA	BU	ZO	MEU
GA	GA	BU	ZO	MEU
BU	BU	ZO	MEU	BUGA
ZO	ZO	MEU	BUGA	BUBU
MEU	MEU	BUGA	BUBU	BUBU

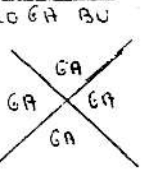
multiplications

X	GA	BU	ZO	MEU
GA	GA	GA	GA	GA
BU	GA	BU	ZO	MEU
ZO	GA	ZO	BUGA	BUZO
MEU	GA	MEU	BUZO	ZOBU

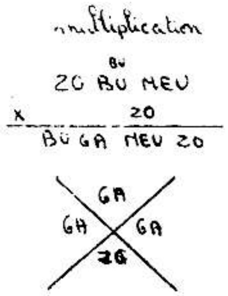
preuves par MEU

Addition.

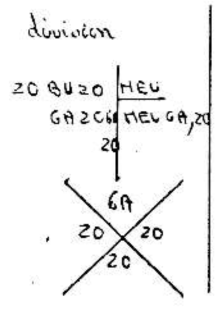
BU
BU ZO GA
+ ~~GA~~ ZO BU
ZO GA BU



Pour faire la preuve d'une addition, il faut : additionner les chiffres de la 1è ligne puis les chiffres de la 2è ligne additionner les 2 résultats obtenus, ensuite, additionner les chiffres du résultat de l'addition. Comparer les deux résultats et si ils sont les mêmes l'opération est probablement juste.



Pour faire la preuve de la multiplication il faut : additionner les chiffres de la permière ligne, additionner les chiffres de la deuxième ligne. Multiplier le premier nombre par le deuxième. Additionner les nombres de la dernière ligne puis comparer les deux résultats. S'ils sont identiques cela prouve que la multiplication est bonne. La règle de 4 ne permet pas d'aller plus loin que 3 (MEU) donc MEU est égal à GA c'est-à-dire O.



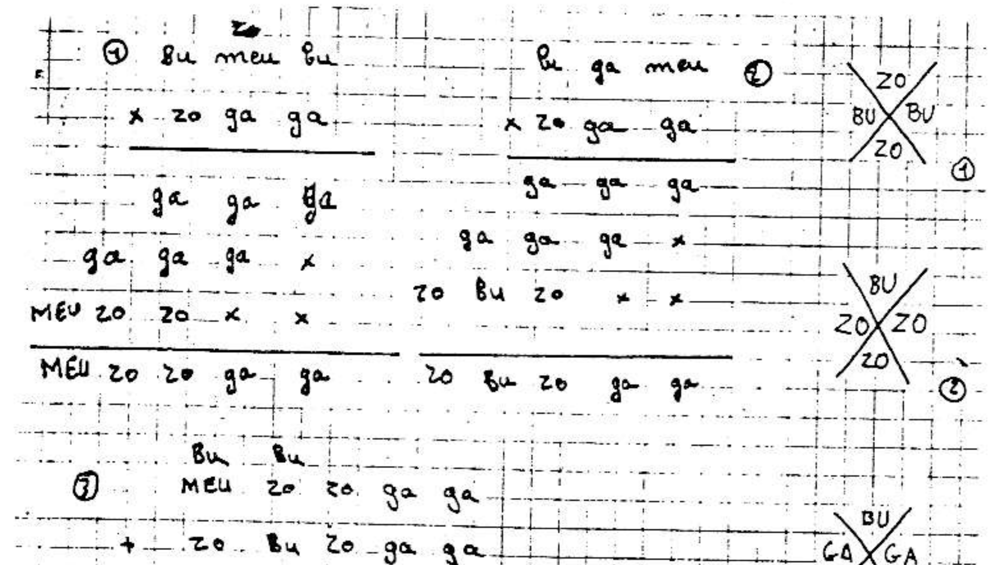
Pour faire la preuve de la division on additionne les chiffres du quotient. On additionne les chiffres du diviseur puis on les multiplie tous les deux et on ajoute le reste. Ensuite, nous additionnons les chiffres du dividende et on le compare au résultat trouvé.

Pour faire la preuve de la soustraction on additionne la première ligne. On additionne la deuxième ligne puis on multiplie les deux, et, enfin, on additionne la dernière ligne et on compare le résultat trouvé par le résultat précédent.

II - QUELQUES PROBLEMES POSES (ET RESOLUS) PAR LES ELEVES

- 1 - Ecrire 50 en langage shadok
  Je divise 50 par 16 pour trouver les grandes poubelles puis je transforme le résultat en shadoks cela fait MEU g.p. et il reste ZO   50 : 16 = 3
  Je divise le reste par 4 pour trouver les petites poubelles et je transforme 2 : 4 = 0 cela fait GA p.p. et il reste ZO.
  La réponse est MEU g.p. GA p.p. ZO shadok ou MEU GA ZO.

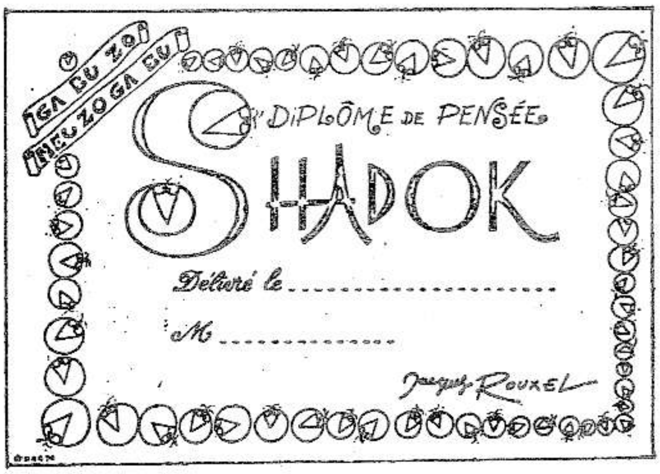
- 2 - Un monsieur Shadok pèse BU MEU BU kg. Un bébé Shadok pèse BU GA MEU kg. Dans un container il y a ZO GA GA monsieurs Shadok. Combien pèse un container ?



Le container pèse BU ZO GA GA GA GA kg.

• 3 – M. Shadok va au marché il achète ZO kilos de pommes de terre, BU kilo de poireaux, BU kilo de carottes et BU salade.
Le kilo de pommes de terre vaut MEU sous-shadok . Le kilo de poireaux vaut ZO sous-shadok . Le kilo de carottes vaut BU sou -shadok. Combien M. Shadok devra-t-il payer en numération shadok?
Pour un sou-shadok il faut pomper ZO fois. Combien M. Shadok devra-t-il pomper ?
Pour pomper BU fois il faut MEU minutes. Il part de chez lui à ZO BU heures du matin à quelle heure sera-t-il revenu ?

Prix des pommes de terre : BU ZO sous-shadok
MEU x ZO = BU ZO
Prix des poireaux : ZO sous-shadok
BU x ZO = ZO
Prix des carottes : BU sou -shadok
BU x BU = BU
Prix de la salade : BU sou -shadok
BU x BU = BU



M. Shadok devra payer : MEU BU sous-shadok
BU ZO + ZO + BU + BU = MEU BU

M. Shadok devra pomper BU ZO ZO fois
MEU BU x ZO = BU ZO ZO

Il faudrait : BU GA MEU ZO minutes
BU ZO ZO x MEU = BU GA MEU ZO

Il sera revenu à ZO ZO h BU GA ZO minutes
BU GA MEU ZO : MEU MEU GA = BU h BU GA ZO mn
ZO BU h + BU h BU GA ZO mn
ZO ZO h BU GA ZO mn

III - REPONSE DE JACQUES ROUXEL, PRODUCTEUR DE L'EMISSION, A QUI LES TRAVAUX D'ELEVES AVAIENT ETE ENVOYES

ON DIT	ON ÉCRIT
GA	O
BU	—
ZO	⅃
MEU	△
BU GA	— O
BU BU	— —
BU ZO	— ⅃
BU MEU	— △
ZO GA	⅃ O
ZO BU	⅃ —
ZO ZO	⅃ ⅃
ZO MEU	⅃ △
MEU GA	△ O
MEU BU	△ —
MEU ZO	△ ⅃
MEU MEU	△ △
BU GA GA	— O O
BU GA BU	— O —
BU GA ZO	— O ⅃
BU GA MEU	— O △
BU BU GA	— — O
etc	. . . .

Paris, le 1er Juin 1975

Mesdemoiselles et Messieurs,

Après avoir reçu et lu attentivement vos travaux sur le calcul GA BU ZO MEU, les shadoks ont décidé de vous remercier tous en vous nommant ACADEMICIENS A VIE ET PERPETUELS DE L'ACADEMIE DES SCIENCES SHADOK DE VIERZON.

Vous avez bien compris comment on comptait en shadok :

GA	ZO GA
BU	ZO BU
ZO	ZO ZO
MEU	ZO MEU
BU GA	MEU GA
BU BU	etc...
BU ZO	
BU MEU	

Vous avez aussi compris comment on pouvait faire des additions en shadok, et des multiplications.

Mais, entre temps les shadoks ont simplifié les choses :

ILS ONT INVENTE LES CHIFFRES SHADOK

C'est beaucoup plus facile pour faire les opérations.
Voilà comment çà marche :

RIEN se dit GA et s'écrit O
I se dit BU et s'écrit —
II se dit ZO et s'écrit ⅃
III se dit MEU et s'écrit △

La suite des NOMBRES SHADOK est toujours la même.

LA TABLE D'ADDITION SHADOK s'écrit

+	O	–	┘	⊿
O	O	–	┘	⊿
–	–	┘	⊿	–O
┘	┘	⊿	–O	––
⊿	⊿	–O	––	–┘

LA TABLE DE MULTIPLICATION SHADOK s'écrit

X	O	–	┘	⊿
O	O	O	O	O
–	O	–	┘	⊿
┘	O	┘	–O	–┘
⊿	O	⊿	–┘	┘–

(Sauf erreur de ma part)

Les GIBIS  sont encore plus paresseux, EUX, ils n'ont que deux chiffres.

Rien s'écrit O
| s'écrit |
Après, il n'y a plus d'autres chiffres.

<u>Exercice 1</u> : Ecrire la suite des NOMBRES GIBI

0
10
11
100
101
...
etc...

Ecrire la table d'addition GIBI

+	0	1
0		
1		

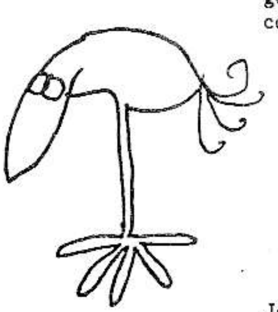
Ecrire la table de multiplication GIBI

X	0	1
0		
1		

C'est ce qu'on appelle la numération BINAIRE, tout le monde sait ça.
Mais voici un exercice plus compliqué :

<u>Exercice 2</u> : Soit un nombre qui s'écrit en shadok : ┘ O ⊿ –
Comment s'écrit-il en GIBI ?
. Le traduire directement sans passer par les chiffres français.
. Traduire ensuite les 2 nombres en français pour vérifier qu'on ne s'est pas trompé.

<u>Exercice 3</u> : Les shadoks ont découvert une nouvelle planète avec des animaux qui s'appellent des GORLIBUS. Le gorlibu est un animal à un seul pied. Le pied de gorlibu a BU BU doigts (– –doigts). Le gorlibu a donc BU BU chiffres pour compter. Pas un de plus pas un de moins.



. Imaginer les chiffres gorlibu.
. Ecrire la suite des nombres gorlibu aussi loin qu'on voudra.
. Faire les tables de multiplication et d'addition gorlibu.

Je vous laisse à vos travaux. Et encore une fois toutes mes félicitations pour ce que vous avez déjà fait.

Signé : Jacques Rouxel

DANS UN CLUB MATHÉMATIQUE

Un jeu : circuits pair - impairs (suite)

par Jean FROMENTIN
(NIORT - DEUX SEVRES)

La suite de notre grand feuilleton sur les circuits pairs et impairs

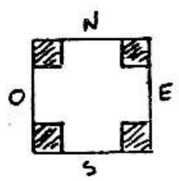


fig I

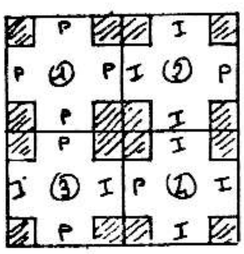


fig. 2

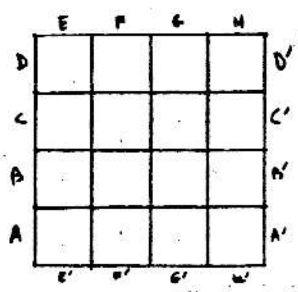


fig 3

I - PRESENTATION DU JEU (Rappels : voir PLOT n° 1)

Le jeu se compose d'un certain nombre de carrés appelés Carrefours . Chaque carrefour (fig 1) possède quatre issues (N,S,E,O) pouvant être paires (P) ou impaires (I). Il y a 16 carrefours différents.

Ces 16 carrefours peuvent être disposés suivant un carré (4x4) ou un rectangle (2x8). Le passage entre deux carrefours adjacents est pair ou impair.

Dans le cas de la figure 2, les passages 1↔2 et 3↔4 sont impairs, les passages 1↔3 et 2↔4 sont pairs.

On suppose de plus que le carré ou le rectangle sont les développements de tores. On suppose donc (fig 3) l'existence des passages AA', BB',... GG', HH'.

II - REGLES GENERALES SUR LES CIRCUITS

- La succession de passages pairs (par exemple) de carrefour à carrefours adjacents détermine un chemin.
- Il peut y avoir plusieurs chemins sur le tore.
- L'ensemble des chemins forme un circuit.
- Un circuit passe une et une seule fois par chaque carrefour.
- Un circuit est dit fermé si chaque chemin composant le circuit est fermé (sur le tore).
- Dans le cas contraire, le circuit est dit ouvert.

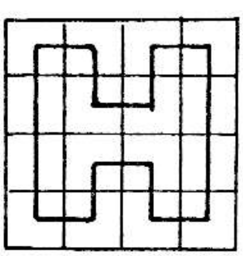


fig 4

Les figures 4, 5, 6 et 7 donnent des exemples de circuits fermés à 1, 2 ou 3 chemins. La figure 8 montre un circuit ouvert à chemin unique.

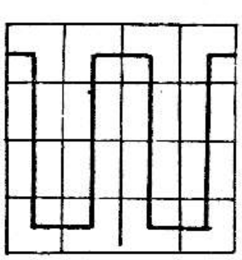


fig 5

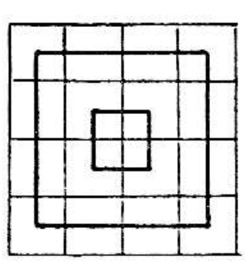


fig 6

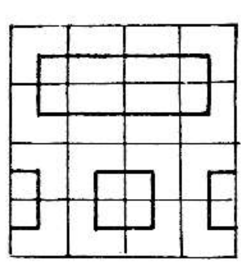


fig 7

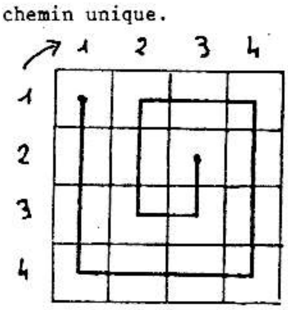


fig 8

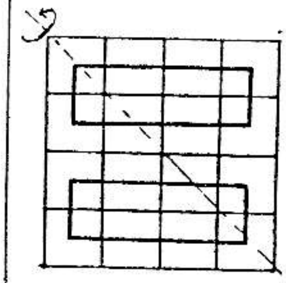
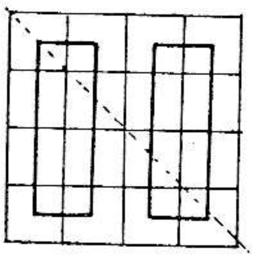


figure 9 ↓



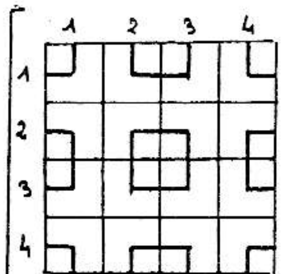
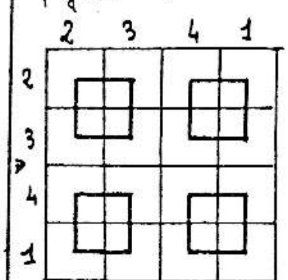


figure 10 ↓



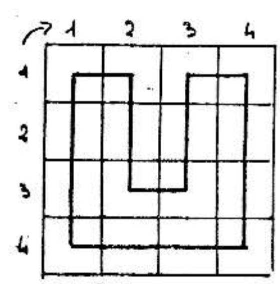


figure 11

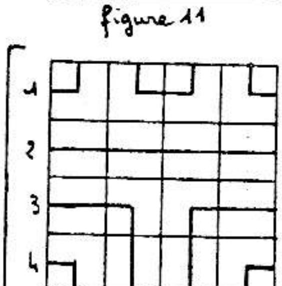
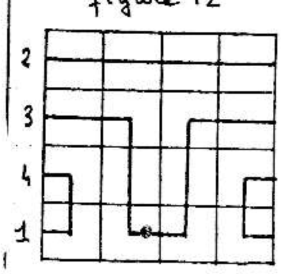


figure 12



III - CIRCUITS FERMES

CIRCUITS IDENTIQUES

Deux circuits pouvant être déduits l'un de l'autre par symétrie ou par rotation sur le tore, seront considérés comme identiques.

La figure 9 montre deux circuits identiques par symétrie axiale.

La figure 10 montre deux circuits identiques par rotation sur le tore; ce qui se traduit sur le carré par la permutation indiquée des lignes et des colonnes.

PROBLEME 6 : *Quels sont tous les circuits fermés à 1, 2, 3 ou 4 chemins ?*

CIRCUITS PAIRS. CIRCUITS IMPAIRS.

Si le circuit de la figure 11 est pair, le passage du carrefour 12 au carrefour 22 est pair; par contre le passage du carrefour 12 au carrefour 13 est impair.

Donc à chaque circuit pair correspond un circuit impair. La figure 12 montre le circuit impair correspondant au circuit pair de la figure 11.

Cette remarque facilite la recherche du problème 6, et amène le problème suivant :

PROBLEME 7 : *Quels sont tous les circuits tels que le circuit pair et le circuit impair correspondant soient identiques ? (Les deux circuits de la figure 10 en donnent un exemple).*

PROBLEME 8 : *Pour chaque circuit déterminé au problème 6, peut-on disposer les 16 carrefours de telle sorte que le circuit soit pair (resp. impair) ?*

IV - CIRCUITS OUVERTS (A CHEMIN UNIQUE)

La figure 8 montre un circuit ouvert à chemin unique.

PROBLEME 9 : *Quels sont tous les circuits ouverts à chemin unique, joignant deux carrefours non adjacents (sur le tore) ?*

Remarque : Si les deux carrefours étaient adjacents, on reviendrait au problème des circuits fermés.

PROBLEME 10 : *Peut-on joindre par un circuit ouvert deux carrefours quelconques non adjacents ?*

Rappel : Un circuit doit passer une et une seule fois par chaque carrefour.

En supposant que le circuit de la figure 8 est pair, les passages du carrefour 23 aux carrefours 22, 13 et 24 doivent être impairs; de même les passages du carrefour 11 aux carrefours 14, 41 et 12.

PROBLEME 11 : *Peut-on disposer les 16 carrefours de telle sorte que les circuits ouverts trouvés au problème 9 soient pairs (resp. impairs) ?*

V - CAS DU RECTANGLE

Tous les problèmes envisagés précédemment peuvent être posés dans le cas du tore dont le développement est le rectangle (2x8)

LE C.P.R. en QUESTION(S)...!

par Gilles LOPEZ
(LIMOGES - HAUTE VIENNE)

Quelques désillusions, un peu d'agressivité, et beaucoup de questions.

Ouf, Son nom sur la liste des reçus au C.A.P.E.S. et on se dit qu'on arrive près du but et qu'on va enfin exercer un métier : PROFESSEUR. Mais quel professeur sera-t'on ? On ne peut le dire encore et pour l'instant le problème n'est pas là, il est au soupir de soulagement ! A la rentrée, on verra au C.P.R. : il paraît que c'est là que l'on apprendra ce qu'est un professeur et comment l'être.

Début octobre, les stages commencent : puisque la formation d'enseignant doit se faire au contact des enfants, et c'est normal, allons-y ! On observe un certain temps le Conseiller Pédagogique, puis on fait cours 2 à 3 heures par semaine ; chaque stage dure 8 semaines et il y en a 3. Quels sont les moyens mis en place par l'Education Nationale pour que cela soit réellement une période de formation ? Aucun ! On nous met au contact de Conseillers, que je ne veux pas mettre ici en cause, qui ne sont que des alibis d'une formation dont l'administration se décharge : selon la personnalité et les idées de chaque Conseiller, le stage aura été enrichissant et formateur ou bien inutile et sans intérêt. Quant aux conférences du C.P.R., elles ont été cette année au nombre de trois :

- La première pour nous apprendre les dédales de l'enseignement secondaire (de la 6ème à la terminale avec toutes les options possibles) : conférence totalement informative et à laquelle la lecture de la brochure remise à la fin aurait épargné d'assister,
- la deuxième où l'on nous a appris qu'il fallait sélectionner et comment le faire sans savoir pourquoi,
- la troisième qui traitait de la drogue a été la seule où l'on a considéré l'élève comme un être humain à part entière.

Quand pendant ces 24 semaines aura-t-on réfléchi sur le rôle de l'enseignant à l'intérieur de l'institution école ? Quand aura-t-on réfléchi sur le fait que l'école devient de plus en plus une garderie ? Quand aura-t-on mené une réflexion sur l'enfant et l'aura-t-on considéré comme autre chose qu'un élément constitutif d'une classe ? Quelle sélection les futurs professeurs de Mathématiques seront-ils amenés à faire et au nom de quoi la feront-ils ? Comment peut-on voir dans ce cas l'école comme un facteur d'épanouissement de l'individu (je parle ici de l'enfant) alors que rien n'est fait, ou si peu, pour que les adultes qui vont y travailler mènent une réflexion sur le sens et la portée de leur action ? Comme j'ai entendu dire un enseignant : "Moi, dans ma classe, je pose des actes et ensuite si ça ne marche pas, je réfléchis". N'est-ce pas fonctionner à contre-sens ? Est-il temps de réfléchir lorsqu'un geste, une action de notre part aura bloqué un enfant ? Et pourtant, c'est la démarche proposée aux professeurs stagiaires et même dans leur cas il n'est prévu aucun temps important de réflexion collective. Si certains Conseillers en proposent, ils sont plus souvent consacrés à l'embellissement technique d'une démonstration qu'à essayer de comprendre l'attitude de tel ou tel élève et le peu de motivations qu'ont la plupart à faire des Mathématiques.

L'année de C.P.R. devrait être à mon avis le temps privilégié où une telle réflexion pourrait être menée avec les Conseillers Pédagogiques et ce serait là une manière toute différente d'envisager leurs fonctions et nos rapports avec eux. Evidemment, une telle réflexion devrait être associée à un certain nombre de stages se déroulant comme actuellement. Mais une telle conception modifierait la relation fondamentale qui existe à l'intérieur de l'école et qui est la relation de maître à élève, d'enseignant à enseigné. Ce type de relation, à mon avis, nie aux individus la capacité de prendre en charge leur propre formation et de répondre soit par eux-mêmes, soit à l'aide de ce que l'on pourait appeler des "intervenants extérieurs" à leurs attentes en matière de formation. Et là, j'élargirais un peu le sujet : à l'intérieur de l'école. Quelle latitude ont les enfants de prendre en charge leur formation et qui sait si la formation qu'ils voudraient acquérir correspond avec celle qu'on leur donne ? Le but de ces paroles n'est pas démagogique et leur sens caché n'est pas : "Laissons leur faire tout ce qu'ils veulent"; mais dans la mesure où ce qui se passe à l'intérieur des lycées dans la plupart des cas est de la forme : "Laissons leur faire ce que nous voulons qu'ils fassent", il y a, à mon avis, sujet à se poser des questions. Alors qu'actuellement on voit une grande masse d'invididus se décharger de leurs responsabilités auprès de "spécialistes" de toutes sortes, quels moyens donnons-nous aux jeunes à l'intérieur de l'école pour qu'ils puissent effectivement prendre des responsabilités et se prendre en charge ?

On croit en avoir trouvé avec le système de délégués participant aux conseils de classe etc... Ce ne sont à mon avis que des alibis pour avoir bonne conscience. Comment peut-on croire qu'une personne avec laquelle on entretient des relations de type hiérarchique puisse par moments se libérer de cela et parler avec vous d'égal à égal ou tout au moins en toute franchise ? Mais tout ceci nous écarte de la formation des enseignants du secondaire.

Le but de cet article est d'essayer de mettre en lumière l'hypocrisie de l'institution C.P.R. Qui peut actuellement défendre le C.P.R. sous sa forme actuelle comme moyen efficace de formation d'enseignants ? Comment ne pas être effaré par les lacunes de cette formation ? Et du point de vue financier quel gachis : rémunération des stagiaires pour 8 heures de présence par semaine, rémunération des Conseillers pédagogiques ; que d'argent dépensé pour si peu de résultats.

Je voudrais à la fin de ces lignes dire quelques mots de l'épreuve pratique du C.A.P.E.S. Au nom de quoi et après avoir vu seulement 2 heures de cours (où le stagiaire et les élèves sont crispés et manquent de naturel) et peut-être consulté les rapports de stage, peut-on dire qu'untel sera apte à enseigner ou non ? Quelle responsabilité à exercer à partir de si peu d'éléments : Bon courage Messieurs (et dames) les Inspecteurs et dommage pour les "bavures" car il en existe. Quant à l'attribution des mentions, bien que moins grave (et pourtant cela conditionne le lieu de la 1ère nomination) le problème est identique.

Après une année de 'Formation' très incomplète, un examen dont les critères d'attribution et de mention n'apparaissent pas comme évidents, c'est cohérent et l'Education Nationale s'endort sur les cohérences de ce type.

MATHÉMATIQUES ET SÉLECTION

par Christian KERN (VIERZON - CHER)
et Alain PENNETIER (SAINT-AMAND - CHER)

*Le seul but de l'enseignement actuel des mathématiques ne serait-il pas la sélection ?
Un point de vue convaincu.*

L'enseignement des mathématiques, après le bouleversement complet des programmes, pose aujourd'hui plusieurs problèmes : d'abord le débat maths modernes - maths anciennes n'est pas encore liquidé, ensuite et surtout les maths ont pris une place de choix dans le processus de sélection.

Comment se fait-il que les maths aient remplacé le latin dans la sélection de l'élite universitaire ? L'un serait-il plus utile que l'autre pour la formation d'un cadre ? Les maths seraient-elles plus "formatrices" qu'une autre matière ?

D'abord, constatons que si les maths constituent un outil qui chapote toute activité scientifique et en cela aide à appréhender le concret, il est aussi un langage au second degré, donc abstrait. Constatons aussi que l'école enseigne un langage scolaire bien éloigné du français parlé, des sciences naturelles scolaires peu liées à une réelle découverte de la nature et des mathématiques scolaires qui ressemblent plutôt à du dressage de singes savants plutôt qu'à une véritable réflexion logique basée sur les besoins de l'enfant.

Les nouveaux programmes imposés par les universitaires du supérieur et la fraction moderniste des professeurs de mathématiques (groupés au sein de l'A.P.M.E.P.) ont abandonné la conception descriptive et faussement concrète et sont axés sur les constructions et manipulations logiques (théorie des ensembles et axiomatique). Cette conception est certe mieux adaptée à la formation des cadres et seule une fraction attardée de la bourgeoisie s'en est prise aux maths modernes. Mais là n'est pas l'essentiel, le problème est comment les maths scolaires (et non pas les maths en tant que telles) sont devenues l'instrument privilégié de sélection

Les maths enseignées sont surtout un LANGAGE ABSTRAIT coupé de leur support concret et qui ont perdu leur aspect d'outil à appréhender la réalité, les maths ne servent à rien, du moins pour l'élève de 4ème ou de 3ème (sinon à décrocher le BEPC). De plus, la présentation scolaire se veut extrêmement rigoureuse du point de vue logique et ignore tout des cheminements historiques de la recherche mathématique, ce qui renforce l'aspect langage abstrait et matière type pour la sélection, au sortir de la troisième et en seconde.

Le latin jouait ce rôle jadis ; aujourd'hui dans le cadre de la démocratisation du secondaire et en fonction des besoins de l'industrie, le latin a perdu de sa crédibilité comme outil formateur des futurs cadres et techniciens. De plus, alors que pour l'élève, maths et latin ne sont que des langages abstraits, les maths ont l'avantage de tirer leurs sources de la science neutre génératrice de progrès et directement liée à la technique. Ainsi le voile idéologique du scientisme couvre pudiquement les maths : personne ne sait à quoi ça sert (pas même le prof) mais on sait que ça sert à quelque chose. Que reste-t-il de tout ceci à l'école ? Hors des maths, point de salut, les maths sont devenues l'unique instrument de mesure et d'étalonnage de l'intelligence alors qu'en réalité elles ne mesurent qu'une certaine forme d'intelligence.

Comment réagissent les profs ? Doit-on faire chorus avec les réactionnaires contre les maths modernes ? Ou bien coller aux modernistes qui souvent ignorent (ou veulent ignorer) la fonction sélective de leur enseignement ? En fait, l'aspect ultra-sélectif des maths est devenu trop voyant et les profs ont souvent le sentiment qu'on leur fait jouer un rôle qu'ils ne considèrent pas comme le leur : bourrer la tête des jeunes de tout un fatras inutile et dont le seul but est la sélection.

La préparation des examens est ressentie, avec la lourdeur des programmes, comme une course de vitesse en contradiction avec une véritable éducation mathématique. L'apprentissage et la manipulation des notions demandent en effet une période de "décantation" nécessaire à l'assimilation, or l'élève est controlé (examen ou contrôle continu) avant que cette période ne soit passée. L'objectivité de la notation est, sur la base d'études docimologiques, remise en cause.

Au moment où le corps des profs de maths est traversé par toutes ces interrogations, leur rôle est devenu primordial dans tous les conseils de classes, d'orientation, etc... Ce qui accentue la crise. De plus les programmes du primaire et de 6e-5e permettent dans une certaine mesure de renouer l'activité logique et les manipulations avec les besoins ludiques des enfants (voir les outils élaborés par le mouvement Freinet dans ce domaine). Là encore l'institution supporte mal : les matheux seraient devenus poètes, alors rien ne va plus.

Autant d'éléments qui font que la lutte pédagogique, idéologique et contre la sélection traverse aujourd'hui le secteur pourtant longtemps préservé qu'est l'enseignement des mathématiques.

EGIONALES - VIE DES REGIONALES - VIE DES REGIONALES - VIE DES REGIONALES - VIE DES REGIONALES - VI

S - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMOGES - LIMC

INQUIÉTUDES FACE AU PROJET HABY

Le Mardi 4 Mai 1976, se sont réunis les responsables des associations d'enseignants de l'Académie de LIMOGES suivantes :

C'est la première fois qu'une concertation aussi vaste a lieu à LIMOGES

- Association Française des Enseignants de Français
- Association des Professeurs de Biologie et Géologie
- Société des Professeurs d'Education Artistique
- Association des Professeurs d'Education Manuelle et d'Economie Familiale
- Association des Professeurs d'Education Musicale
- Association des Professeurs d'Histoire et Géographie
- Association des Professeurs de Langues Vivantes
- Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
- Association des Professeurs de Philosophie
- Association des Professeurs de [illegible]
- Association des Professeurs de [illegible] et d'Enseignement Ménager
- Société des Professeurs de Français [illegible]
- Union des Physiciens

Après un large tour d'horizon, il est apparu que les inquiétudes de ces organisations étaient largement communes, concernant notamment les points suivants :

1) *LA FACON DONT S'ELABORENT LES DECRETS D'APPLICATION DE LA LOI HABY*

Contrairement aux déclarations ministérielles qui mettent en avant la concertation entre les différentes parties intéressées, les réformes s'élaborent dans le secret et seules des rumeurs plus ou moins contrôlées, mais toujours inquiétantes, parviennent aux enseignants. C'est ainsi que risquent d'être mis en place de nouveaux programmes et de nouveaux horaires pour l'ensemble du second degré.

Par exemple, de nouveaux programmes de Mathématiques pour les classes de 6ème et 2ème ont été demandés au mois de Mars à l'Inspection Générale pour le 1er MAI.

Si les programmes actuels ne sont pas parfaits, des changements, survenant sans préparation ni concertation, risquent de perturber une fois de plus l'enseignement.

2) *LA REDUCTION MASSIVE DES HORAIRES*

Il paraîtrait que la semaine scolaire serait réduite à 19 heures de présence des élèves, soit cinq demi-journées. Que deviendront les lycéens ainsi livrés à la rue, au moment où on envisage la suppression massive des postes de surveillance ?

Toutes les disciplines seront touchées. A titre d'exemple, l'enseignement de français en classe de seconde, actuellement de 5 ou 4 heures suivant les sections, passerait à 3 heures pour tous, Parfois, l'horaire semble conservé comme pour l'Histoire et Géographie en seconde et première, mais le même nombre d'heures devra servir en plus à initier les lycéens à l'économie, la sociologie et la démographie.

Les conséquences en seront :

- une baisse très sérieuse du niveau des études,

- une régression de la fonction démocratique de l'école (risque de prolifération des cours privés pour un enseignement de soutien réservé de fait aux familles aisées ; aggravation des différences socio-culturelles dues au milieu familial,

- une réduction considérable du nombre d'enseignants nécessaires et donc un arrêt du recrutement des professeurs.

Tout cela ne signifie pas que les enseignants ne souhaitent pas une réforme du système éducatif. Mais ils estiment qu'un horaire de présence suffisant du collégien ou du lycéen est tout à fait indispensable. Il n'est pas question d'en prendre prétexte pour accroître les programmes. Mais bien au contraire il s'agit de mettre l'accent sur l'acquisition de méthodes de réflexion et de jugement plutôt que d'une somme de connaissances. Une part non négligeable du travail doit se faire en groupes suffisamment restreints pour permettre une participation active de chaque élève. C'est là une condition indispensable pour améliorer l'égalité des chances.

C'est en vain que le Ministre chercherait à diviser les associations de spécialistes, qui, sur un plan national, ont élaboré en commun un projet de répartition d'horaires. De même chaque association a déjà réfléchi à de nouveaux programmes, envisagés globalement et non pas classe après classe comme le Ministère semble le faire.

P.S. L'Institut de Recherche sur l'Enseignement de Mathématiques de LIMOGES s'associe à ce texte.

BUREAUX ET COMITÉS DES RÉGIONALES

L'abonnement annuel au p l o t bulletin des régionales APMEP de POITIERS, LIMOGES et ORLÉANS-TOURS est de 10 F pour tous les membres de l'APMEP

Le règlement s'effectue auprès des régionales POITIERS : LIMOGES : ORLÉANS-TOURS { BORDEAUX 3852-59 LIMOGES 117-66 P LA SOURCE 1440-09

POITIERS : Siège social CRDP 6, rue Sainte-Catherine 86034 - POITIERS CÉDEX

Président E. DEHAME (tél. 41.30.82) 8, impasse du Lavoir 86000 - POITIERS
Secrétaire D. PORTÉ (tél. 41.52.88) 13, rue Arsène Orillard 86000 - POITIERS
Trésorier S. PARPAY (tél 24.31.70) 22, rue Rougier 79000 - NIORT
Adjoint Mme CARTRON 1, impasse des Fauvettes 79000 - NIORT

Elémentaire J. BACON (44.52.03) Thurageau 86110 - MIREBEAU
R. NEAU (51.71.60) 15, rue de la Croix 86440 - MIGNÉ-AUXANCES
Premier cycle M. PUYGRENIER (91.15.36) La Folie 86500 - MONTMORILLON
Second cycle Mlle Y. DARDANT (53.27.48) 25, rue Philippe Vincent 17000 - LA ROCHELLE
Technique J.L. SIRIEIX (41.35.36) La Chabotterie 86800 - MIGNALOUX-BEAUVOIR
Agricole Mme ELIARD Lycée agricole de l'Oisellerie 16400 - LA COURONNE
Post-baccalauréat : R. BARRA (21.52.26) 58, rue Boylesve 86100 - CHATELLERAULT
Formation des Maîtres Mme C. BLOCH (41.40.74) 138, rue de la Mérigotte 86000 - POITIERS
Formation permanente des adultes : J. TOUILLET Résidence du 114e 79200 - PARTHENAY

LIMOGES . Secrétariat : IREM 123, rue A. Thomas 87100 - LIMOGES (tél. (55) 79.24.12)

Président d'honneur ROGERIE (92 ans) doyen actif de l'APMEP (02.15.69) 22, rue L. Codet 87200 - ST JUNIEN
Président : FREDON (79.34.02) 40, rue Regnard 87100 - LIMOGES
Vice présidents : BOUTEILLER (74.20.11) 7 bis, avenue du Président Roosevelt 19100 - BRIVE
CREPIN (33.46.68) 94, Avenue Locarno 87000 - LIMOGES
Mme MEIGNAL 41, rue A. Grand 23000 - GUÉRET
Secrétaire CATHALIFAUD (33.15.36) 20, allée Villagory 87000 - LIMOGES
Trésorier BATIER Lotissement d'Arliquet 87700 - AIXE SUR VIENNE

Membres : Mme BEULQUE (2ème cycle) 24, rue Fresnet 87000 - LIMOGES
Mme CHUSTE (1er cycle) 10, rue Malledent de Savignac 87100 - LIMOGES
M. CHUSTE (technique) (01.47.24)
M. EZQUERRA (enseignement supérieur) (09.82.72) La Roche 87420 - ST YRIEIX SOUS AIXE
Mme FONDANECHE (enseignement élémentaire) (32.56.37) 96, avenue Baudin 87000 - LIMOGES
M. REYNET (79.40.85) 20, rue Guy de Maupassant 87100 - LIMOGES
Mme ROUGIER (Ecoles Normales) (32.54.23) 35, avenue de la Vienne 87170 - ISLE
M. ROUGIER (classes préparatoires, liaison avec l'IREM, avec les autres disciplines)

Membres de la Régionale au Comité National : CRÉPIN - REYNET

ORLÉANS - TOURS : Siège social : CRDP 55, rue Notre Dame de Recouvrance 45000 - ORLÉANS

Toute correspondance à adresser à : A. ROUCHIER Département de Mathématiques Université d'Orléans 45045 - ORLÉANS CEDEX

Président : P. MONSELLIER (tél. (38) 65.11.77) Les Tourelles Marcilly en Villette 45240 - LA FERTÉ SAINT AUBIN
Secrétaires M. GODICHEAU (tél. (47) 28.22.32) 14, rue L. de Vinci 37170 - CHAMBRAY LES TOURS
J.R. LICOIS (tél. (47) 61.19.56) 38, place Rabelais 37000 - TOURS
R. METREGISTE (tél. (38) 62.05.29) 22, rue G. Lecomte 45400 - FLEURY LES AUBRAIS
Trésorier R. GARNIER (tél. (38) 86.51.44) 31, rue Robert Desnos 45800 - SAINT JEAN DE BRAYE

Délégués locaux :

18 - BOURGES B. VRAIN 36, avenue de Dun 18000 - BOURGES
VIERZON : A. PALAT 6, rue du Crot à Foulon 18100 - VIERZON
ST AMAND : G. RAY 34, rue des Buissonnets 18200 - SAINT AMAND MONTROND

28 - CHARTRES : G. ARNOUX 9, rue du 102e RI app. 46 28000 - CHARTRES
DREUX : J. PINAUD Le coq fleuri Fermaincourt 28500 - VERNOUILLET
NOGENT LE ROTROU : J.C. MILCENT 11, rue Paul Deschanel 28400 NOGENT LE ROTROU

36 - ARGENTON : A. LOUIS Paumulé le Péchereau 36200 - ARGENTON SUR CREUSE
CHATEAUROUX : M. PERRIN 9/100, avenue de Paris 36000 - CHATEAUROUX

37 - BOURGUEIL : E. DURAN «Les Galuches» 37140 - BOURGUEIL
LOCHES : G. BRAJARD 40, rue Balzac 37600 - LOCHES
TOURS-CHINON : M. GODICHEAU 14, rue Léonard de Vinci 37170 - CHAMBRAY LES TOURS

41 - BLOIS : A. AUTEBERT 7, rue du Béarn 41000 - BLOIS
ROMORANTIN : P. LEGAI 29, rue François 1er 41200 - ROMORANTIN
VENDOME : D. BECANE 72ter, rue du cdt Verrier 41100 - VENDOME

45 - GIEN : Y. LORANS Chemin de la Crépinière Arrabloy 45500 - GIEN
MONTARGIS : M. KISTER 52, rue des Vignes 45120 - CHALETTE S/LOING
ORLÉANS-Lycées : J. AUGRAS 3, rue des Chaffaults 45380 LA CHAPELLE ST-MESMIN
ORLÉANS-CES : J. GEHENDGES 85, allée de la petite cerise 45160 - OLIVET
PITHIVIERS : D. NAUDET Dimancheville 45390 - PUISSEAUX