LES 42 MORPHISMES DU PLAN

Ecrit à la suite d'une conférence A.P.M. à ANGOULEME
le 19 Octobre 1975 sur le thème
"C'EST DU PROPRE"

par A. DELEDICQ (Didactique des Disciplines
PARIS VII)

On prétend, dans les livres, avoir une bonne image du plan par la contemplation d'une belle étendue d'eau (les eaux de Versailles ou celles de Vincennes ? , bassin piscicultures, mare au diable, lac de Lozère, ...)

Ces plans là sont amorphes ; placez-y des jets d'eaux, un serpent de mer, des passions souterraines, un vent violent, c'est-à-dire un "opérateur" qui les agitent, et vous verrez apparaître des ridelles, des courants, des champs de force, des singularités...

Bref, voilà qu'une transformation structure le plan en lignes essentielles et le tord comme une membrane souple et vivante.

Parmi l'infinie variété des transformations susceptibles d'opérer dans le plan, nous avons choisi de nous resteindre, ici, à la classe de celles qui respectent ses opérations naturelles : l'addition vectorielle et la multiplication par un réel.

Notre sujet se limite donc aux applications linéaires de l'espace à deux dimensions $\mathbb{R}^2$. Mais nous verrons que ces "morphismes" ne nous décevrons pas, et que la "phorme" des paysages qu'ils génèrent nous étonnera par sa diversité.

EXEMPLE 1 : Une société de classes

Dans ce lointain pays qu'est la Démocralie, il y a des pauvres et des riches ; aujourd'hui, à la date n, ils sont respectivement P_n et R_n. Après une génération, 20 ans après, à la date $n+1$ dirons nous, ils seront P_{n+1} et R_{n+1}. Après de longues études portant sur de multiples générations, on a constaté que P_{n+1} et R_{n+1} s'expriment en fonction de P_n et R_n, indépendamment de n, de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1} = 1{,}3\ P_n + 0{,}1\ R_n \\ R_{n+1} = 0{,}2\ P_n + 1{,}2\ R_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

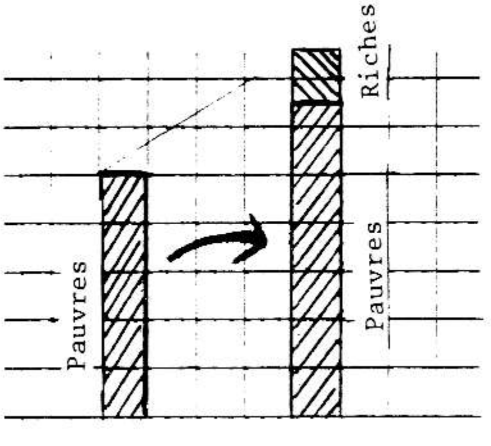
Ce qui s'écrit plus facilement :

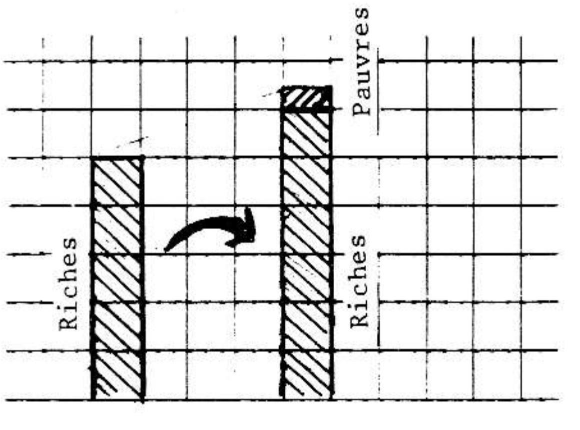
$$\begin{bmatrix} P_{n+1} \\ R_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$X_{n+1} = A.X_n \qquad X_n \in \mathbb{R}^2$$

Notre petit modèle est celui d'une société stable dont la population croît (exponentiellement, comme on le verra) et où le fils est, souvent de la même classe que son père : 20 % des pauvres d'une génération "deviennent" (par leur fils ou par leur propre ascension, s'ils vivent encore) riches à la génération suivante.

Le passage inverse a lieu 2 fois moins souvent :





La superposition de ces deux diagrammes décrit l'évolution des classes sociales.

Que va-t-il se passer dans une telle société ?

Au bout d'un moment (c'est-à-dire "asymptotiquement") ne va-t-il y avoir que des riches ? On peut penser - à juste titre d'ailleurs - que le rapport $\frac{P_n}{R_n}$ caractérisant la distribution en 2 classes de la société, va se stabiliser vers une valeur limite a . Une distribution $V = (P,R)$ vérifiant $\frac{P}{R} = a$ deviendrait alors $V' = (P',R')$ telle que $\frac{P'}{R'} = a$, et donc telle que $V' = AV$ soit parallèle à V ; on aurait donc :

$$\exists \lambda : V' = \lambda V \quad \text{c'est-à-dire} \quad P' = \lambda P \text{ et } R' = \lambda R .$$

[Si nécessaire, on pourra lire ici l'annexe théorico-pratique]

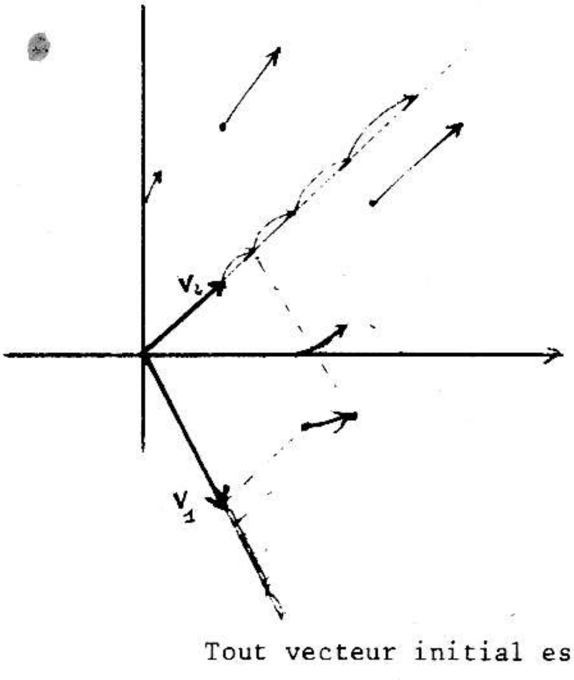
Ce sont donc les valeurs propres et vecteurs propres de A qui nous permettront de répondre aux questions prospectives que nous posons !

Vous pourrez vérifier que :

$\lambda_1 = 1,1$ est valeur propre avec $V_1 = (1, -2)$ comme vecteur propre

$\lambda_2 = 1,4$ est valeur propre avec $V_2 = (1, 1)$ comme vecteur propre

Représentons notre société par rapport à la base (V_1 , V_2) et indiquons les transformées de quelques points :



pour notre problème le premier quadrant est seul significatif

Tout vecteur initial est multiplié par 1,4 dans la direction V_2 et par 1,1 dans la direction V_1 .

Après n transformations il est multiplié par $(1,4)^n$ le long de V_2 et par $(1,1)^n$ le long de V_1 . C'est évidemment sa composante le long de V_2 qui finit par devenir prépondérante et, au bout d'un certain temps, la multiplication le long de V_2 devient seule apparente.

Dans la cas général on comprend que, finalement, ce soit la valeur propre de plus grand module qui impose sa direction propre : c'est donc elle qui dirige préférentiellement le phénomène, les autres valeurs propres interviennent [chacune selon l'importance de leur module] pour "moduler" plus modestement le comportement directionnel.

Revenant à notre exemple, nous pouvons donc énoncer les conclusions suivantes :

- le taux d'accroissement moyen de la population tend vers 1,4 [valeur propre de plus grand module]
- les nombres de riches et de pauvres tendent à devenir égaux $[(P_n, R_n) \longrightarrow k(1,1) = kV_2]$
- la position respective de l'autre vecteur propre par rapport au premier quadrant permet d'affirmer que l'égalisation des classes sera moins rapide s'il y a d'abord plus de pauvres que de riches.

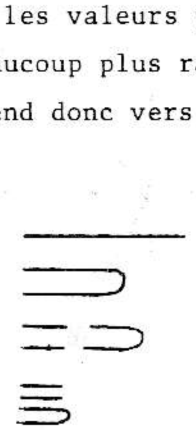
<u>Remarque</u> :

A titre de première leçon de politique appliquée, nous vous signalons qu'en "Libéralie", la matrice de changement de classe est la suivante :

$$B = \boxed{\begin{matrix} 1,6 & 0,4 \\ 0,8 & 1,2 \end{matrix}}$$ ce qui plaît beaucoup plus aux pauvres.

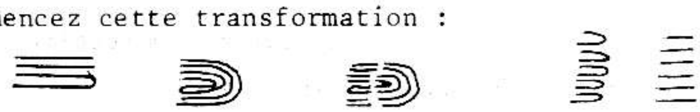
Or, le calcul que vous allez faire montre que les vecteurs propres sont les mêmes que pour A ! Simplement les valeurs propres sont telles que la tendance à l'égalisation est beaucoup plus rapide [en effet λ_1 est inférieure à 1 et son influence tend donc vers 0]

<u>EXEMPLE 2</u> : <u>Pliez - Coupez - Superposez</u> !



Pliez une bande de papier ;
Coupez la ;
Superposez les bandes restantes ;

Recommencez cette transformation :



Après un grand nombre de transformations, combien a-t-on de bouts de papier dans les doigts ?

Le phénomène est à 2 dimensions : le nombre D_n de bouts de papier droits et le nombres P_n de bouts pliés. Et un droit donne naissance à 2 droits et un plié ; un plié donne naissance à 2 droits et 3 pliés. Formellement

$$\begin{cases} D_{n+1} = 2\,D_n + 2\,P_n \\ P_{n+1} = 1\,D_n + 3\,P_n \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} D_{n+1} \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ P_n \end{bmatrix}$$

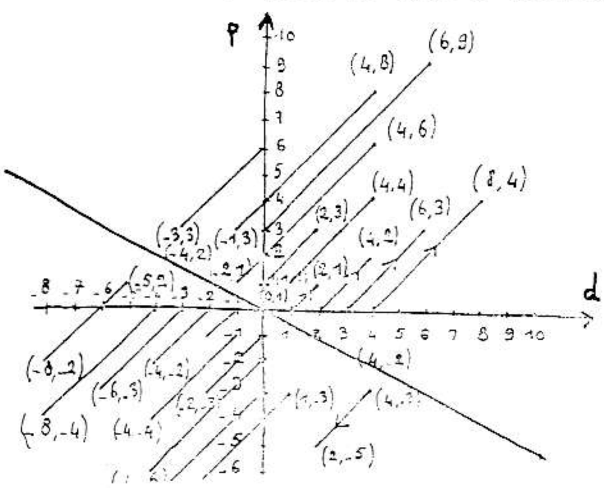
$$X_{n+1} = C \; . \; X_n$$

La matrice C a pour "spectre" :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & V_1 = (2, -1) \\ \lambda_2 = 4 & V_2 = (1,1) \end{cases}$$

[On pourra trouver l'analyse assez complète de ce processus dans "Mathématiques Buissonnières" éd. CEDIC]

Le dessin suivant montre bien le type d'évolution du processus !



. La droite portée par V_1 est stable dans la transformation.

Hors de V_1, les vecteurs sont multipliés par 4 dans la direction de V_2 .

. Quant à nos bouts de papier, ils sont asymptotiquement multipliés par 4 à chaque transformation et le rapport $\dfrac{\text{nombre de droits}}{\text{nombre de pliés}}$ tend vers 1.

$\boxed{\text{Intermède 1}}$:

On commence certainement à s'apercevoir que la position des valeurs propres par rapport à 1 caractérise qualitativement le processus :

Si elles sont toutes deux supérieures à 1, le processus est de type "divergent", plutôt dans la direction propre de celle de plus grand module.

Dans tous les cas c'est cette dernière qui commande ; si l'une est égale à 1 la droite propre correspondante est invariante ...

Voyons un autre exemple.

EXEMPLE 3 - Rotation du capital

La transformation G : "assaut de générosité" est la suivante : Pierre donne à Paul la moitié de son argent ; lequel Paul s'empresse alors de lui rendre la pareille ; de sorte que la distribution initiale (x,y) devient (x',y') :

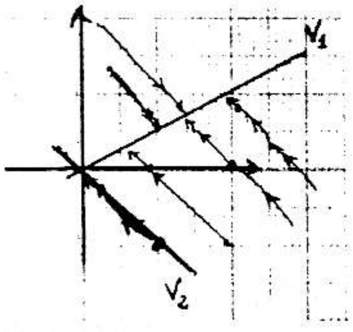
$$(x,y) \longrightarrow (\frac{x}{2} , y + \frac{x}{2}) \longrightarrow (\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{4} , \frac{y}{2} + \frac{x}{4})$$

$$X' = G\,X \quad \text{avec} \quad G = \boxed{\begin{matrix} 0,75 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{matrix}}$$

Le spectre de G est :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & V_1 = (2,1) \\ \lambda_2 = 0,25 & V_2 = (1,-1) \end{cases}$$

Au bout d'un certain temps, donc, Pierre aura 2 fois plus d'argent que Paul, la somme totale restant constante ($\lambda_1 = 1$)



Intermède 2

Dans l'état actuel des choses vous pouvez imaginer au moins 6 types de processus linéaires remplissant le tableau suivant :

$(\lambda_2 > \lambda_1)$	$\lambda_1 < 1$	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 > 1$
$\lambda_2 < 1$			
$\lambda_2 = 1$	Type G	Type I	
$\lambda_2 > 1$	Type B	Type C	Type A

$$I = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}$$

Vous pouvez dessiner les trajectoires de processus correspondant à la case ($\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 1$) en étudiant par exemple la transformation

$$K = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{bmatrix} \quad \text{des spectres} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0,5 & V_1 = (1,2) \\ \lambda_2 = 0,25 & V_2 = (2,1) \end{cases}$$

Nous avons pourtant laissé échapper quelques transformations qui se situeraient dans la "diagonale" du tableau précédent :

lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, deux cas peuvent se produire :

1 - Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont propres. C'est le cas de l'identité et de 2 types de transformations non encore rencontrées :

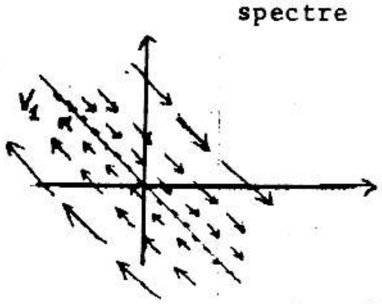
- l'homothétie de rapport inférieur à 1
- l'homothétie de rapport supérieur à 1

2 - Une seule direction de $\mathbb{R}^2$ est propre. Les exemples suivants montrent que ce cas pathologique peut bien arriver.

<u>EXEMPLE 4</u> - <u>Applications non diagonalisables</u>

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ n'a que la valeur propre 1 et le seul vecteur propre (1,0)

Voici les trajectoires de $H' = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ de spectre $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $V_1 = (1, -1)$:



V_1 est stable et H' "translate" parallèlement à V_1 d'autant plus que l'on est loin de V_1

Nous vous laisserons le (difficile) plaisir de tracer les trajectoires des applications :

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad \lambda_1 = 2 \qquad V_1 = (1, -1)$$

et

$$K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad . \quad \lambda_1 = 0,5 \qquad V_1 = (1, 0)$$

Intermède 3

Nous connaissons donc déjà 6 + 2 + 3 = 11 types de transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$.

Et pourtant nous n'avons encore rencontré que des valeurs propres strictement positives.

Que se passe -t-il si l'une d'entre elles s'annule ?

C'est à vous de répondre!

Si les 2 s'annulent, l'application associée n'est pas difficile à étudier : elle réduit tout à 0 .

Voyons maintenant un exemple dans lequel les valeurs propres deviennent négatives.

EXEMPLE 5 - Pyramides des âges :

Pour les besoins de notre cause (celle du plan) notre pyramide des âges n'aura que 2 tranches : les jeunes [agés de 0 à une demi-vie] et les vieux.

La période entre 2 recensements est une demi-vie, de sorte que tous les vieux précédents sont morts et que tous les jeunes précédents (non décédés prématurément) sont devenus vieux :

$$\begin{cases} J_{n+1} = a\, J_n + b\, V_n \\ V_{n+1} = c\, J_n \end{cases}$$

a : taux de natalité des jeunes

b : taux de natalité des vieux

1 - c : taux de mortalité des jeunes

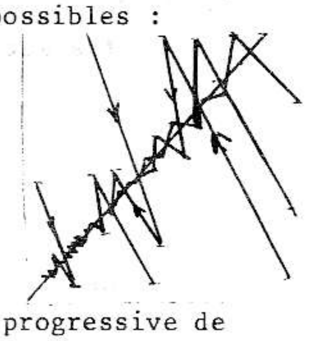
$$\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ V_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \\ V_n \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient $\lambda^2 - a\lambda - bc = 0$. Elles sont donc de signes contraires, la plus grande λ_2 étant positive.

L'avenir de cette humanité dépend donc de la position de λ_2 par rapport à 1. Voici des exemples des trois cas possibles :

$$D = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,9 & 0 \end{bmatrix}$$

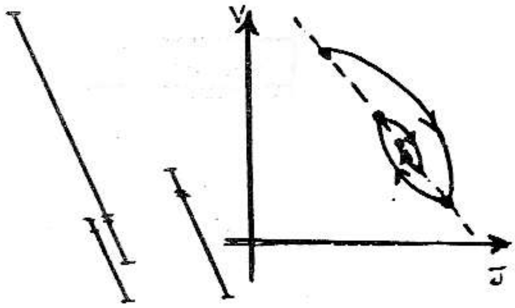
Spectre $\begin{cases} \lambda_1 = -0,4 & V_1 = (4,-9) \\ \lambda_2 = 0,9 & V_2 = (1,1) \end{cases}$



Extinction progressive de l'humanité.

$$E = \boxed{\begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 \end{matrix}}$$

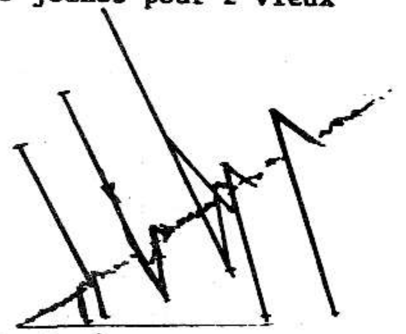
Spectre $\begin{cases} \lambda_1 = -\,0{,}2 & V_1 = (1,\ -2) \\ \lambda_2 = 1 & V_2 = (5{,}2) \end{cases}$



Tendance vers un équilibre : 5 jeunes pour 2 vieux

$$F = \boxed{\begin{matrix} 1{,}2 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 \end{matrix}}$$

Spectre $\begin{cases} \lambda_1 = -\,0{,}05 & V_1 = (1,\ -5) \\ \lambda_2 = 1{,}25 & V_2 = (5{,}1) \end{cases}$



Croissance exponentielle avec 5 jeunes pour 1 vieux.

$\boxed{\text{Intermède 4}}$

Jusqu'à présent la valeur propre négative n'avait pas le rôle asymptotiquement prépondérant. Lorsqu'elle atteint -1 elle commence à avoir un sérieux mot à dire.

Voici d'abord les symétries axiales par exemple :

$$S = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \quad \text{de spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & V_1 = (1{,}1) \\ \lambda_1 = -1 & V_2 = (1,\ -1) \end{cases}$$

ou la plus amusante (parce qu'oblique!) :

$$T = \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \quad \text{de spectre} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & V_1 = (1{,}0) \\ \lambda_2 = -1 & V_2 = (1{,}1). \end{cases}$$

Le cas le plus simple, à deux valeurs propres négatives est la symétrie par rapport à 0 :

$$R = \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \qquad \lambda = -1\ , \quad \text{tout } \mathbb{R}^2 \text{ propre.}$$

On voit, en tout cas qu' une valeur propre négative inverse le sens du vecteur transformé tout en le multipliant selon son module.

Les exemples concrets à valeur propre négative sont plus difficiles à inventer dans la mesure où "concret" implique souvent de "rester dans le premier quadrant".

Conclusion 1 – Typologie des "morphismes hyperboliques" de $\mathbb{R}^2$

Le qualificatif "hyperbolique" caractérise les applications linéaires ayant deux directions propres distinctes.
(les valeurs propres étant différentes).

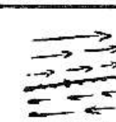
Elles sont de types différents selon la position des valeurs propres par rapport à -1 , 0 et 1 ; d'où le tableau ci-dessous où l'on voit apparaître 25 types.

$\lambda_2 \geqslant \lambda_1$	$\lambda_1 < -1$	$\lambda_1 = -1$	$-1 < \lambda_1 < 0$	$\lambda_1 = 0$	$0 < \lambda_1 < 1$	$\lambda_1 = 1$	$1 < \lambda_1$
$\lambda_2 < -1$							
$\lambda_2 = -1$							
$-1 < \lambda_2 < 0$							
$\lambda_2 = 0$							
$0 < \lambda_2 < 1$							
$\lambda_2 = 1$							
$1 \leqslant \lambda_2$							

Le lecteur complètera les cases blanches

Conclusion 2 – Morphismes à valeur propre double :

Ils se divisent en 2 classes selon qu'il n'existe qu'un vecteur propre ou que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont propres.

	$\lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 \leqslant \lambda$
Morphismes "triviaux" ($\mathbb{R}^2$ propre)	Homothétie	symétrie point	Homothétie	nullité	Homothétie	identité	Homothétie
Morphismes "paraboliques" (1 direction propre)							

Voici donc 14 types supplémentaires.

Conclusion 3 - Morphismes "elliptiques" de $\mathbb{R}^2$

Ce sont les applications linéaires à valeurs propres complexes. La situation est alors beaucoup plus simple que ce que l'on pourrait penser :

- la partie "imaginaire" fait tourner les vecteurs transformés par l'application

- et ils sont multipliés par le module commun aux deux valeurs propres conjugués.

De sorte que si les valeurs propres sont $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, il n'y a que 3 cas possibles :

- $\rho < 1$  enroulement vers l'origine
- $\rho > 1$  déroulement extensif
- $\rho = 1$  Rotations

Dans ce dernier cas (Rotation) il n'y a pas lieu (quant à la typologie ici dressée "d'ordre fini") de distinguer les rotations commensurables avec   et les autres.

CONCLUSION GENERALE :

Nous sommes donc en présence de 25 + 14 + 3 = 42 applications linéaires dans le plan. Qui l'eût cru ?

Nous avons surtout fait connaissance avec quelques unes d'entre elles pour lesquelles nous disposions de processus concrets simples en exemple.

De larges recherches sont encore possibles : une plus grande intimité avec les valeurs propres négatives, avec les processus paraboliques ; une plus rigoureuse étude des processus elliptiques ; une percée vers les processus continus, définis par des systèmes différentiels et non plus récurrents ; une typologie des "trajectoires" pour lesquelles le sens de parcours du processus est indifférent [2 processus (λ_1, λ_2) et $(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2})$ sont alors "géométriquement équivalents"]...

Bref! Ca peut encore durer longtemps.

ANNEXE THEORICO - PRATIQUE

I - f étant une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

1) Si $f(V) = \lambda V$, λ est dite valeur propre de f et V est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. [l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $(f - \lambda) V = 0$ est l'"espace propre" associé à λ]

2) λ valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ vérifie l'équation "caractéristique" : $\lambda^2 - \alpha \lambda + \beta = 0$ où α et β sont deux réels associés à f :
α est sa "trace", β son "déterminant".
[voir en II leurs calculs]

3) Lorsqu'il y a 2 valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, il existe deux vecteurs propres V_1 et V_2 respectivement associés, et non parallèles entre eux.

Il est alors agréable de choisir V_1 et V_2 comme base de $\mathbb{R}^2$ puisque l'application f consiste simplement à multiplier les vecteurs par λ_1 dans la direction V_1 et par λ_2 dans la direction V_2 [avec la "linéarité" de f, on construit ainsi l'image de tout vecteur]

4) Lorsqu'il y a 1 valeur propre double, soit tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont propres [et f est une homothétie], soit il n'y a qu'une seule direction propre [et f est une erreur de la nature : f est alors dite : "non diagonalisable"]

II -

1) Les calculs pratiques se font, en général, lorsque le choix d'une base de $\mathbb{R}^2$ permet d'exprimer les vecteurs par leurs coordonnées $X = (x,y)$ (les coordonnées des vecteurs de base, eux-mêmes [souvent implicite comme dans l'exemple 1] sont $(1,0)$ et $(0,1)$) f est alors représentée par une matrice :

$A = \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}$ telle que : $X' = AX$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

La trace de f est indépendante de la base choisie : c'est la somme $a + d$ des éléments de la diagonale de toute matrice qui la représente.

Le déterminant de f est celui de toute matrice qui la représente: $ad - bc$

2) Ces affirmations découlent immédiatement de la considération de quelques systèmes d'équations à 2 inconnues ; mais le vocabulaire et les résultats rappelés ci-dessus sont valables pour un espace de dimension quelconque.

3) Ainsi : f (et toute matrice la représentant) est "diagonalisable" si il existe une base [alors composée de vecteurs propres] pour laquelle la matrice de f est diagonale.

Si A est alors la matrice de f par rapport à une base (β) [ses colonnes sont les coordonnées des transformées par f de chacun des vecteurs de base] , P la matrice "de passage" de (β) à la base composée des vecteurs propres [les colonnes de P sont les coordonnées de chacun des vecteurs propres] , et D la matrice (diagonale) de f par rapport aux vecteurs propres, on a :

$$PD = AP$$

Cette relation exprime qu'il revient au même, sur les coordonnées d'un vecteur : de le transformer par f puis de changer de base ou de changer de base d'abord puis de le transformer.