par F. ROYOUX (Poitiers - Vienne)

le texte ci-dessous est la présentation d'idées qui avaient été émises est discutées au cours des deux conférences organisées à NIORT (Deux-Sèvres) par l'A.P.M.

Au cours de la transmission du savoir mathématique trois séries de phénomènes peuvent retenir l'attention. On peut se demander d'abord s'il y a des méthodes de présentation plus efficaces que d'autres. On peut s'interroger aussi sur les activités intellectuelles que l'on mobilise chez l'enseigné : la mémoire, l'intuition sensible, la déduction, l'invention, etc... Enfin, on peut réfléchir au savoir mathématique lui-même : est-il particulièrement inaccessible ou rebutant ?

I - COMMENT PRESENTER LE SAVOIR MATHEMATIQUE ?

Qu'on utilise en effet un manuel, des fiches ou une présentation orale, il existe quelques phénomènes généraux concernant la présentation sur lesquels il est bon de s'interroger.

D'abord toute présentation oriente l'esprit de l'auditeur dans une certaine direction. Tout le monde connaît, bien sûr, les questions qui induisent une réponse déterminée. Par exemple : "Y en a-t'il qui n'ont pas compris ?" Question au demeurant parfaitement inutile faite uniquement pour conforter la conscience de l'enseignant. Mais on sait moins bien que lorsqu'on présente six allumettes à une personne en lui demandant de construire six triangles équilatéraux, elle commence par chercher une solution dans le plan conformément à la situation dans laquelle on lui a présenté les allumettes alors que la solution est la construction d'un polyèdre. Beaucoup de jeux s'appuient sur ce phénomène. Il est donc important de varier les présentations pour éviter les erreurs d'aiguillage ou les limitations qui bloquent l'esprit.

On sait aussi, depuis les études SHELDON sur la théorie de l'information que la capacité d'un individu à assimiler la nouveauté et à combiner entre elles les données ainsi acquises est très limitée. Les méthodes d'enseignement programmé ont bien souligné cette nécessité de découper l'information en unités simples. Encore ne faut-il pas oublier que, seule la répétition des exercices, permet un renforcement suffisant. Il ne faut pas oublier non plus le danger inverse d'un fractionnement excessif de l'information. Ce fractionnement doit-être proportionnel au niveau intellectuel de l'auditoire et non systématique comme le veut l'enseignement programmé.

On souligne encore la différence entre un savoir mémorisé et un savoir utilisable. On connaît la difficulté de certains élèves à utiliser les hauteurs extérieures de certains triangles parce qu'ils ont toujours travaillé sur des hauteurs intérieures. Un savoir cohérent peut ainsi être enclavé par sa cohérence même inutilisable pour des exercices. Quel professeur de mathématiques, de grammaire ou de physique n'a pas constaté cela ? C'est par la variation des situations d'exercice qu'un savoir devient, semble-t'il, plus disponible. Bien entendu, suivant les esprits cette opération est plus ou moins longue et difficile.

On aboutit ainsi à une double exigence : celle de la structuration du savoir nécessaire à la mémorisation; et celle de l'autonomie relative des différentes unités d'information du savoir pour le rendre opératoire.

On peut se demander si certaines présentations par fiches en particulier, réalisent bien cette double fonction.

Certaines connaissances ne sont pas immédiatement utilisables. La formule "il n'est pas vrai que le Roi ne porte pas de barbe" exige au moins le recours à la règle opératoire "deux négations valent une affirmation" pour être décodée. On peut se demander si des notions comme les relations d'équivalence ne tiennent pas leur difficulté du fait qu'elles exigent pour être reconnues des opérations intermédiaires (réflexivité,etc...) Il devrait être possible de favoriser la compréhension de telles notions en simplifiant les processus de reconnaissance.

On constate ainsi que certaines opérations paraissent compliquées si elles portent sur des éléments insuffisamment différenciés. N'est-ce pas le cas par exemple pour les opérations pourtant fondamentales d'inclusion et d'appartenance ?

Un point particulièrement difficile dans l'exposé du savoir mathématique, c'est le règne d'une structure dominante de pensée qu'on peut appeler déductive-démonstrative. On sait en effet, que certaines structures de pensée (énumérative, chronologique) sont accessibles à la plupart des esprits. Il n'en est pas de même en ce qui concerne les structures inductives et déductives. Dans ce cas, c'est sur les règles de transformation de l'information que doit porter surtout l'attention du présentateur. Or, c'est justement le point le plus facilement négligé.

Enfin, le passage d'un raisonnement portant sur des objets réels, à un raisonnement fondé sur la nature des informations est toujours difficile. Tout le monde sait que Socrate est mortel parce que tous les hommes le sont ; mais peu de gens seront capables de dire ce qu'on peut conclure de la combinaison d'une affirmation universelle (Tous les hommes sont mortels) avec une affirmation particulière (or Socrate est un homme). Peu de gens seront par exemple, capables de prévoir qu'il est indifférent de faire un rabais avant ou après adjonction de la T.V.A. en raison de la nature des opérations en cause. Pour beaucoup il faudra faire le calcul pour s'en rendre compte. Certaines difficultés peuvent être atténuées, par conséquent,si elles ont été repérées et si la présentation a été adaptée en conséquence.

Ces problèmes de présentation sont essentiels quel que soit le type de pédagogie adoptée. Mais toutes les pédagogies ont aussi leurs problèmes propres. Les différentes pédagogies se fondent sur une conception différente soit de fonctionnement de l'esprit humain, soit de ce qu'il faut développer dans les attitudes de l'esprit humain.

II - QUELLES ACTIVITES INTELLECTUELLES SOLLICITER CHEZ L'ENSEIGNE ?

On peut essayer de faire une typologie des méthodes d'enseignement pratiquées en mathématiques. Comme toute typologie celle-ci ne présente que des cas caractéristiques qui ne donnent qu'une idée imparfaite de la pratique pédagogique réelle, mais elle permet cependant de discerner les activités intellectuelles visées par chaque situation.

On trouve d'abord dans certaines progressions par fiches une méthode d'induction guidée. On met l'élève dans une situation, on lui suggère certaines opérations et on lui demande ce qu'il peut dire de la situation.

On dira par exemple : voici une série de nombres : 2 - 6 - 18. Quelle relation peut-on établir entre eux ?

A titre de contrôle on fera ensuite continuer la liste. Puis on fera appliquer l'observation à d'autres situations de manière à généraliser.

On obtiendra ainsi la construction progressive d'un savoir allant par exemple jusqu'aux notions de bijection et d'application.

Dans cette méthode trois activités de l'élève sont particulièrement visées.

D'abord il construit lui-même son savoir. La notion d'application n'est pas alors une définition à retenir, mais elle est le produit de sa propre activité intellectuelle, la découverte de l'élève en quelque sorte.

Ensuite, l'élève chemine du cas concret vers la généralisation et l'abstraction. Son activité intellectuelle est comme celle du savant qui part des situations complexes de la réalité, pour aboutir à des notions qui expriment la réalité, mais en en dégageant la généralité.

Enfin, l'élève est incité à l'analyse. C'est à lui d'interroger la situation pour la faire parler. Contrairement à ce qu'un vain peuple croit en effet, les faits ne parlent pas d'eux-mêmes.

Enfin on pourra observer que l'élève ne rencontre pas ici aussi nettement l'obstacle du langage, si net par contre dans la présentation des définitions ou théorèmes.

Dans la déduction programmée, autre méthode de présentation. On commence par exposer des principes, donner des informations par petites tranches. Par exemple, on donne la définition de l'antisymétrie, de la transitivité, etc... puis celle de la relation d'ordre. Après chaque élément d'information on fait faire des exercices tests pour vérifier que l'information a été assimilée. On peut éventuellement affiner le système par la méthode CROWDER qui consiste à faire suivre un nouveau cheminement si un exercice n'a pas été réalisé.

Cette méthode incite elle aussi à une construction du savoir, mais elle très différente de la précédente. L'élève n'est pas appelé à refaire le chemin de l'abstraction mais à parcourir plus fréquemment le passage de l'abstraction à l'application.

On insiste surtout sur le découpage de l'information pour en faciliter l'appropriation, ainsi que sur le passage de la théorie à l'application.

Méthode souvent plus rapide car on sait que l'enseignement des principes, par exemple dans les problèmes de Katona, permet de gagner du temps.

L'analyse n'est plus celle de la découverte d'une relation, mais celle de la découverte d'une similitude entre une relation dans un cas concret et une relation présentée abstraitement.

On connait enfin l'exposé déductif qui consiste à présenter la totalité d'un secteur de savoir. On présentera par exemple une étude justificative de la fonction affine.

Puis par des exercices généralement en assez grand nombre on vérifiera que le savoir transmis est appliqué de manière satisfaisante.

Cette méthode a pour elle son long passé et sa cohérence. Elle ne prétend développer ni les facultés d'analyse et d'abstraction, ni mettre l'élève en état de construire son savoir. Elle lui donne ce savoir. Par la rigueur de ses structures elle favorise la mémorisation, par la multiplication des exercices elle donne une connaissance de nombreuses situations d'application et montre comment y faire face.

Elle est centrée sur le savoir, non sur l'élève, elle favorise la réception de ce savoir et son application.

Elle se soucie rarement des facultés qu'elle développe en dehors peut-être de la méthode. Fondée sur l'idée que l'intelligence est une donnée de fait à laquelle peuvent plus ou moins suppléer la mémoire et l'effort, elle vise l'efficacité. On pourrait dire qu'elle ne cherche pas à former des mathématiciens, mais des utilisateurs des mathématiques.

Si elle sollicite une certaine invention, c'est lors de la résolution de problème qui diffère évidemment de l'exercice. Le problème est une situation complexe couvrant un assez vaste secteur de savoir et il ne peut être résolu sans l'invention d'un cheminement qui est une utilisation habile, j'allais dire astucieuse, du savoir. La mathématique n'est plus ici élaboration de concepts, mais invention de moyen de résolution.

Comment apprécier ces différentes méthodes ?

Du point de vue de la théorie de l'apprentissage, on se demandera dans quelles conditions le savoir acquis est le plus solide ? Sur des savoirs limités étudiés par les psychologues, de ce point de vue c'est le savoir acquis par une libre activité du sujet qui l'emporte.

Du même point de vue, on se demandera quelle est la nature du savoir acquis avec chaque procédé. On sait qu'il existe deux situations d'apprentissage :

- l'une qui est constituée par l'enregistrement de stimuli avec leurs réponses,
- l'autre aboutissant constamment à une réorganisation d'un savoir. Ce phénomène de réorganisation se manifeste par le franchissement de seuils à partir desquels les fautes disparaissent brusquement et totalement dans un domaine déterminé. Or ce type d'apprentissage exige une action constante de l'esprit sur son propre savoir. Il faut se demander alors quelles méthodes permettent une mémorisation suffisante d'une part et disons-le, la maîtrise suffisante de certains automatismes afin d'éviter les pertes de temps, et, d'autre part une circulation active et constante de l'esprit parmi les notions acquises. Les phases de synthèses paraissent manquer gravement dans les méthodes inductives. Ce qui semble manquer aussi c'est une théorie de l'exercice d'application, ou si l'on veut un renforcement des procédés opératoires.

Savoir résoudre une équation, étudier une fonction, construire une table de vérité, c'est connaître un procédé opératoire, c'est à dire le moyen de passer d'une donnée à une autre par une série de transformations. Quels procédés opératoires apprend-on actuellement dans le programme de 6ème et 5ème ? N'est-il pas normal alors que le programme de 4ème et encore plus celui de seconde réserve des surprises ?

On peut encore apprécier les différents procédés pédagogiques en partant du point de vue de l'obstacle linguistique.

On peut se demander comment est éliminé l'obstacle linguistique dans les différentes méthodes et pas uniquement en se préoccupant du vocabulaire employé. Sait-on par exemple que l'expression de la relation de cause, au moyen de subordonnées participes est mal réalisée même à un niveau élevé ? donc mal comprise. Sait-on qu'une phrase de plus de 15 mots offre des difficultés de compréhension à une majorité de personnes ? Observons de ce point de vue les définitions mathématiques. Est-on sûr qu'une constatation non suivie de sa définition soit bien assimilée ?

On peut se demander aussi si ce qui favorisait le passage des mathématiques à la physique dans l'enseignement traditionnel n'était pas le long apprentissage du problème au sens où nous l'avons défini plus haut. Depuis l'école élémentaire le problème disparaît ; il revient brusquement en seconde, mais sans qu'on soit familiarisé avec lui. S'initier à un univers rationnel et apprendre à découvrir des processus de résolution c'est toujours savoir faire une analyse mais fort différente. Or les psychologues sont très réservés sur les possibilités de transfert des apprentissages d'un domaine à un autre. Ce n'est pas parce qu'on a appris à analyser dans certains domaines qu'on sait le faire ailleurs. L'analyse de textes et l'analyse de problèmes usent de procédés opératoires différents.

On peut enfin se placer du point de vue de l'idéologie. Un enseignement où domine l'imitation ne donne pas les mêmes réflexes qu'une formation où se manifeste la libre initiative de l'enseigné.

On le voit, pour nous les exigences de l'enseignement des mathématiques sont multiples et la synthèse ne nous paraît totalement réalisée dans aucune méthode pédagogique actuellement utilisée. Mais serait-ce parce que les mathématiques sont particulièrement difficiles ?

III - LES MATHEMATIQUES ? UN SAVOIR INACCESSIBLE, OU UN SAVOIR REBUTANT ?

L'idée couramment admise, c'est que les mathématiques sont le domaine par excellence de l'abstraction. Encore faut-il savoir ce qu'on désigne par le terme abstrait.

Il existe une pensée qui utilise des symboles au deuxième degré. Toute pensée, bien entendu, utilise le langage courant qui est le support symbolique général. Mais la fonction symbolique de deuxième degré, celle qui consiste à remplacer des objets,des concepts ou des opérations par des signes, est tardive chez l'être humain. Elle se heurte très souvent à des réticences, mais non à des inaptitudes. Il faut donc tenir compte de ces réticences.

Il existe une pensée accompagnée ou non d'images. On pourrait certes distinguer plusieurs types d'images. Mais pour l'essentiel, les expériences montrent que la pensée améliore l'image et qu'en retour elle trouve un point d'appui dans les images notamment spatiales. Chez certains sujets, c'est la représentation spatiale qui a de la peine à se réaliser, chez d'autres c'est la pensée sans images. Une éducation simultanée de la pensée sans images et de la représentation spatiale serait peut-être la meilleure solution et lèverait dans de nombreux cas beaucoup d'obstacles.

Si l'abstrait mathématique n'est pas particulièrement inaccessible, le savoir mathématique, est-il, par contre, rebutant ?

On découvre certes chaque jour un peu mieux l'importance des motivations positives pour favoriser les fonctions de vigilance et d'attention, développer l'énergie nécessaire à la mise à l'épreuve, bref à toutes les activités nécessaires à l'acquisition d'un savoir.

Mais il faut dire d'abord que la motivation s'alimente à la réalisation pédagogique, dans la triade - enseignant - enseigné - savoir. Si on observe que l'institution dans laquelle s'inscrit cette relation est en crise, si l'on constate encore que l'initiation des enseignants à la maîtrise des processus relationnels laisse à désirer on peut déjà se poser des questions sur les motivations générales des élèves.

Reste le cas particulier des mathématiques. La caractérologie distingue des esprits tournés vers la compréhension abstraite, d'autres vers l'application utilitaire. Certains sociologues d'autre part, ont montré que la culture populaire se caractérise par le goût pour ce qui est matériel, pour les actions physiques par opposition à une culture plus attentive à la parole et à l'analyse intérieure. On peut donc se demander si pour beaucoup d'esprits le détour théorique demandé aujourd'hui n'est pas trop long, et si le caractère ludique donné à certaines activités mathématiques de l'école élémentaire ne se retourne pas contre ses inventeurs. De l'arithmétique à l'algèbre le contact avec les besoins réels étaient rarement perdus dans l'enseignement traditionnel. On a besoin de savoir compter, de savoir mesurer une surface, on a rarement besoin des ensembles au même sens du mot besoin.

Il y a une transformation profonde du savoir utile aujourd'hui, mais savons-nous nous adapter vraiment à ce nouveau savoir ?

Là aussi, donc, des obstacles mais pas insurmontables.

Enfin, que faut-il donc posséder pour pouvoir faire des mathématiques ?

- d'abord la maîtrise des opérations générales de la pensée logique (classification, sériation, combinatoire).
- la disponibilité d'un certains nombres de représentations correctement assimilées. On ne se soucie pas assez des représentations aberrantes et l'on construit souvent sur de mauvais fondements.
- un entraînement à l'exploration d'un ensemble de données (ici mathématiques).

On pourrait sur ce point apprendre :

- à rendre les données utilisables en construisant des tableaux et en les exprimant dans un autre langage, etc...
- à mettre en relation des données de multiples manières.
- à transférer un apprentissage d'un domaine à un autre.
- à procéder par étape dans la recherche.
- à se donner des moyens de vérification.

bref, à encadrer, sans les supprimer, les méthodes spontanées de tâtonnement.

Par contre, je ne parlerai ni de la nécessité d'avoir un esprit logique, ni du sens de la rigueur. Les mathématiques ne sont possibles que par la mise en oeuvre d'un certain type de raisonnement déductif qui n'est ni le raisonnement syllogistique ni le raisonnement argumentatif qui relèvent d'autre domaines et qui sont d'ailleurs pour la vie courante plus utiles que le raisonnement mathématique. La logique mathématique n'est pas toute la logique, et la rigueur mathématique pas toute la rigueur. En fait, le raisonnement mathématique résulte d'un apprentissage comme les autres. Les mathématiques font appel aussi à une certaine manière de manipuler des données qui joue un rôle essentiel et dont la place n'est pas toujours reconnue dans l'activité mathématique. La logique mathématique et la rigueur sont les conséquences d'un enseignement réussi, non une donnée spontanée qui manquerait à certains.

La compréhension des mathématiques pose bien des problèmes que des I.R.E.M. abordent courageusement et sur lesquels les enseignants de mathématiques s'interrogent avec inquiétude bien souvent.

Dans l'immédiat quelques petites améliorations sont possibles dans le cadre de programmes d'une grande rigidité :

- se donner les moyens de contrôler avant l'enseignement le savoir déjà maîtrisé par l'élève et après l'enseignement, le point où il en est arrivé, non pour juger de son intelligence mais pour adapter les procédés pédagogiques.
- être plus attentif aux présentations.
- faire une analyse plus systématique des activités mises en jeu dans le type d'enseignement que l'on pratique.
- ne pas oublier que la répétition - habile peut-être - est le moyen obligé de toute acquisition solide.
- savoir prendre le temps de familiariser les élèves avec les démarches les plus difficiles des mathématiques : le langage symbolique, le raisonnement déductif, l'analyse d'une situation mathématique.