

DANS UN CLUB MATHÉMATIQUE

Un jeu : circuits pair - impairs (suite)

par Jean FROMENTIN
(NIORT - DEUX SEVRES)

La suite de notre grand feuilleton sur les circuits pairs et impairs

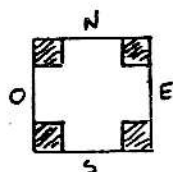


fig 1

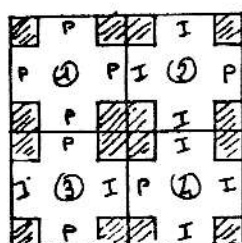


fig 2

I - PRESENTATION DU JEU (Rappels : voir PLOT n° 1)

Le jeu se compose d'un certain nombre de carrés appelés Carrefours. Chaque carrefour (fig 1) possède quatre issues (N,S,E,O) pouvant être paires (P) ou impaires (I). Il y a 16 carrefours différents.

Ces 16 carrefours peuvent être disposés suivant un carré (4x4) ou un rectangle (2x8). Le passage entre deux carrefours adjacents est pair ou impair.

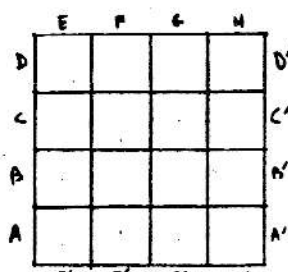


fig 3

Dans le cas de la figure 2, les passages ①→② et ③→④ sont impairs, les passages ①→③ et ②→④ sont pairs.

On suppose de plus que le carré ou le rectangle sont les développements de tores. On suppose donc (fig 3) l'existence des passages AA', BB', ... GG', HH'.

II - REGLES GENERALES SUR LES CIRCUITS

- La succession de passages pairs (par exemple) de carrefour à carrefours adjacents détermine un chemin.
- Il peut y avoir plusieurs chemins sur le tore.
- L'ensemble des chemins forme un circuit.
- Un circuit passe une et une seule fois par chaque carrefour.
- Un circuit est dit fermé si chaque chemin composant le circuit est fermé (sur le tore).
- Dans le cas contraire, le circuit est dit ouvert.

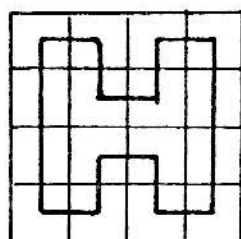


fig 4

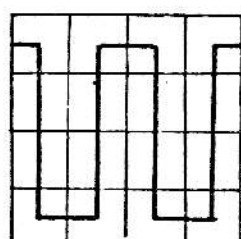


fig 5

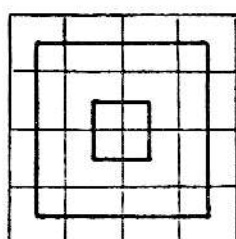


fig 6

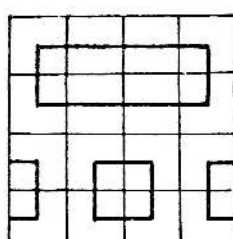


fig 7

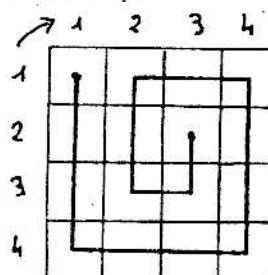


fig 8

Les figures 4, 5, 6 et 7 donnent des exemples de circuits fermés à 1, 2 ou 3 chemins. La figure 8 montre un circuit ouvert à chemin unique.

III - CIRCUITS FERMES

CIRCUITS IDENTIQUES

Deux circuits pouvant être déduits l'un de l'autre par symétrie ou par rotation sur le tore, seront considérés comme identiques.

La figure 9 montre deux circuits identiques par symétrie axiale.

La figure 10 montre deux circuits identiques par rotation sur le tore; ce qui se traduit sur le carré par la permutation indiquée des lignes et des colonnes.

PROBLEME 6 : Quels sont tous les circuits fermés à 1, 2, 3 ou 4 chemins ?

CIRCUITS PAIRS. CIRCUITS IMPAIRS.

Si le circuit de la figure 11 est pair, le passage du carrefour 12 au carrefour 22 est pair; par contre le passage du carrefour 12 au carrefour 13 est impair.

Donc à chaque circuit pair correspond un circuit impair. La figure 12 montre le circuit impair correspondant au circuit pair de la figure 11.

Cette remarque facilite la recherche du problème 6, et amène le problème suivant :

PROBLEME 7 : Quels sont tous les circuits tels que le circuit pair et le circuit impair correspondant soient identiques ? (Les deux circuits de la figure 10 en donnent un exemple).

PROBLEME 8 : Pour chaque circuit déterminé au problème 6, peut-on disposer les 16 carrefours de telle sorte que le circuit soit pair (resp. impair) ?

IV - CIRCUITS OUVERTS (A CHEMIN UNIQUE)

La figure 8 montre un circuit ouvert à chemin unique.

PROBLEME 9 : Quels sont tous les circuits ouverts à chemin unique, joignant deux carrefours non adjacents (sur le tore) ?

Remarque : Si les deux carrefours étaient adjacents, on reviendrait au problème des circuits fermés.

PROBLEME 10 : Peut-on joindre par un circuit ouvert deux carrefours quelconques non adjacents ?

Rappel : Un circuit doit passer une et une seule fois par chaque carrefour.

En supposant que le circuit de la figure 8 est pair, les passages du carrefour 23 aux carrefours 22, 13 et 24 doivent être impairs; de même les passages du carrefour 11 aux carrefours 14, 41 et 12.

PROBLEME 11 : Peut-on disposer les 16 carrefours de telle sorte que les circuits ouverts trouvés au problème 9 soient pairs (resp. impairs) ?

V - CAS DU RECTANGLE

Tous les problèmes envisagés précédemment peuvent être posés dans le cas du tore dont le développement est le rectangle (2x8)

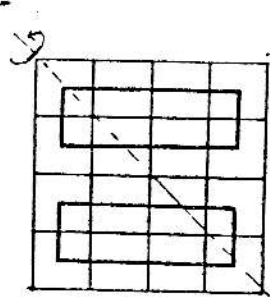


figure 9 ↓

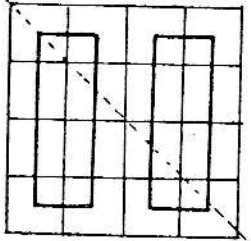


figure 10 ↓

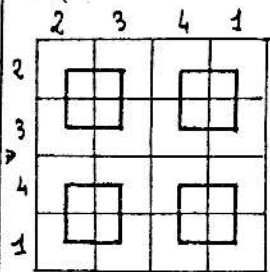


figure 11

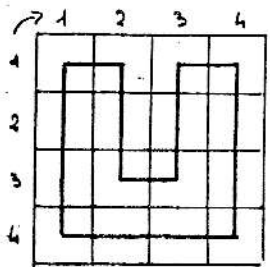


figure 12

