TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉ*musique*

par Bernard PARZYSZ
Lycée de VANVES - IREM de PARIS-SUD

Une approche des procédés imitatifs en musique à l'aide des mathématiques. Où l'on découvre que Bach, Schoenberg et bien d'autres, manipulaient le groupe de Klein sans le savoir ...

Que la Musique et les Mathématiques présentent des affinités ne fait aujourd'hui plus de doute pour personne. Cela se comprend aisément, d'ailleurs la Musique est basée sur le Son, qui est un phénomène physique caractérisé en particulier par :

- sa durée (→rythme, c'est-à-dire séquence de rapports de durées, donc de nombres)
- sa hauteur (basée sur les vibrations d'une corde, d'un colonne d'air,...).

LEIBNIZ ne qualifiait-il pas la Musique d'"arithmétique secrète" ? Et, aux origines des gammes -chinoise ou occidentale- ne trouve-t-on pas la division d'une corde vibrante ou d'un tuyau sonore ?

Ceci étant posé, il se trouve que nos élèves du secondaire ont à leur programme d'études aussi bien des Mathématiques que de la Musique (en option seulement dans le second cycle). D'où l'idée toute naturelle d'essayer de coordonner, sur certains points précis, l'enseignement de ces deux disciplines. Cette coordination fut amorcée au Lycée Michelet de Vanves, en ce qui concerne l'approche de la gamme, et même (projet ambitieux, mais dont l'écho qu'il trouva auprès des élèves tendrait à prouver que nous avions eu raison) l'étude détaillée de l'écriture d'une Invention de BACH.

Je voudrais donc ici esquisser une approche, en classe, de notre gamme dite "tempérée" (1), ainsi que des principaux procédés "imitatifs" de la musique dite classique, ce qui nous permettra de déboucher sur la musique sérielle, telle que l'ont conçue et développée SCHOENBERG et l'Ecole de Vienne.

(1) Pour ceux que cela pourrait intéresser, j'ai retracé sa (lente) genèse, en tant qu'approximation des gammes antérieures, dans un article du Bulletin de l'APMEP (n°296.pages 777-808) : Approximation en Musique.

I - LES TONALITES

Matériel nécessaire : Carillon (métallophone, xylophone,...) chromatique à deux rangs, c'est-à-dire dont les barres sont disposées comme les touches d'un clavier de piano. Si les noms des notes sont marquées sur les barres, les cacher au début. Il serait bon de "préparer le terrain auditif", d'abord par une prise de contact des élèves avec l'instrument (deux rangées de barres, sons de plus en plus aigus de la gauche vers la droite, etc...), mais également par des exercices de sensibilisation de l'oreille ; par exemple deux barres du carillon étant frappées successivement par le maître, déterminer (à l'audition uniquement) lequel des deux sons émis est plus aigu (plus "haut") que l'autre ; on restreint progressivement l'intervalle entre les deux sons, pour arriver jusqu'au demi-ton, en inventant au besoin d'autres types d'exercices pour permettre de résoudre les difficultés locales.

1) L'octave :

On n'utilise ici que la première rangée du carillon (correspondant aux touches blanches du piano). On demande aux enfants de choisir une barre quelconque (mais plutôt vers le milieu de la rangée), et de rechercher la barre dont le son "va le mieux" avec celui de la barre prise comme référence (en frappant simultanément la barre de référence et une autre barre du carillon). Ils constateront que la nouvelle barre est située 7 crans à droite (ou à gauche) de la barre de départ, et ceci, quelle que soit cette barre.
Contrôle : une mailloche dans chaque main, on part de la barre la plus à gauche du carillon (main gauche) et de la barre située 7 crans plus à droite (main droite) ; en frappant simultanément les deux barres, puis en recommençant la même chose par translations successives des deux mains d'un cran vers la droite, on constate que dans tous les cas les sons obtenus sont bien appariés.

2) Les notes :

Pour "baptiser" les barres de la première rangée du carillon on peut, ou bien donner un nom différent à chacune, ou bien -étant donné ce qui précède- ne prendre que 7 noms (d'où 7 classes d'équivalence de barres) et repérer chaque barre à l'intérieur de sa classe par un procédé quelconque (numéro ou autre). On débouche ici sur l'appellation traditionnelle des sons : La 3, Sol 2, etc...

Les enfants ont alors fait connaissance avec les sons ("bruits" émis par les barres), puis avec les notes (identifiées par leurs noms : DO, RE,....,LA,SI)

3) La tonalité de DO Majeur :

On demande d'essayer de jouer les premières notes de "Frère Jacques" jusqu'à "Dormez-vous" inclus (2),en n'utilisant cette fois encore que les barres de la première rangée. On constate que cela n'est possible qu'en partant des barres marquées DO ou SOL. On peut alors essayer de comparer entre eux (c'est-à-dire, finalement, de classer) les "écarts de son" entre deux barres consécutives de la première rangée du carillon.

(2) ou tout air simple, connu de tous (à condition qu'il soit écrit dans une tonalité majeure).

On a vu ci-dessus que, partant d'un DO ou d'un SOL, on peut dans les deux cas jouer "Frère Jacques" sur la première rangée du carillon. Si on écrit, en regard de la syllabe correspondante de la chanson, le nom de la lame jouée, on obtient le tableau suivant :

Paroles	Frè	re	Ja	ques	(his)	Dor	mez	vous ?	(bis)
lère barre : DO	DO	RE	MI	DO		MI	FA	SOL	
lère barre : SOL	SOL	LA	SI	SOL		SI	DO	RE	

Ce tableau nous permet d'établir les équivalences suivantes entre écarts :

(DO,RE) ∾ (SOL,LA) ("Frè-re")
(RE,MI) ∾ (LA,SI) ("re-Ja")
(MI,FA) ∾ (SI,DO) ("Dor-mez")
(FA,SOL) ∾ (DO,RE) ("mez-vous ?")

Proposons paintenant aux enfants de jouer la même chose, mais en partant de RE, cette fois. Bien entendu, on sait d'après les essais précédents que ce sera impossible si l'on s'impose de n'utiliser que la première rangée de carillon ; d'où une recherche en deux temps :

a) détermination de la barre "qui ne va pas"

b) remplacement de cette barre par une barre de la deuxième rangée (si c'est possible) qui permette de retrouver l'air connu.
On arrive alors au résultat suivant : lorsqu'on commence par un RE, la barre qui ne convient pas est le FA ; le problème admet cependant une solution, qui consiste à remplacer la barre FA par la barre voisine (mais appartenant à l'autre rangée du carillon) marquée "FA#" (3). La question qui vient alors naturellement à l'esprit est : Qu'est-ce que c'est que ce "FA#"? Et d'abord, est-il plus aigu ou plus grave que le FA ? Réponse aisée grâce aux exercices préparatoires : "FA#" est plus aigu que FA. Conséquence logique : l'écart (MI,FA) est "plus petit" que l'écart (MI, FA#).

(3) Pour l'instant, # n'est qu'un signe graphique, permettant de distinguer les deux barres "FA" et "FA#".

On a alors le tableau de correspondance suivant :

Paroles	Frè	re	Ja	ques	Dor	mez	vous ?
lère barre : RE	RE	MI	FA#	RE	FA#	SOL	LA

Ce tableau, comparé avec le précédent, montre que l'on peut classer les écarts rencontrés en deux classes (d'équivalence) seulement :

- Ecarts "de type A" (appelés tons) : (DO,RE), (RE,MI), (FA,SOL), (SOL,LA), (LA,SI)
- Ecarts "de type B" (plus "petits" appelés "demi"-tons): (MI,FA) et (SI,DO).

On peut alors schématiser l'octave de la façon suivante, où des écarts équivalents sont représentés par des segments de même longueur.

figure 1

Voilà donc les enfants en possession de la structure de la tonalité de DO Majeur ; ils pourront constater (en essayant) que la plupart des airs qu'ils connaissent peuvent être joués (en choisissant judicieusement la note de départ) en utilisant uniquement la première rangée du carillon. Mais il reste maintenant à justifier l'appellation de "demi-ton" donnée aux écarts de type B (ce qui, par la même occasion, nous conduira à la gamme chromatique tempérée).

4) La gamme chromatique :

On poursuit la recherche commencée plus haut, et qui consiste à jouer "Frère Jacques" (jusqu'à "Dormez-vous ?") en prenant comme points de départ successifs les barres de la première rangée du carillon.
Les cas où on part de DO, RE et SOL ont déjà été vus. Si l'on part de MI, on constate qu'on est obligé de "hausser" le FA (→FA ♯) et le SOL (→SOL ♯).
Si l'on part de FA, il faut cette fois "baisser" le SI et remplacer la barre correspondante par une barre marquée "LA ♯" ou "SI ♭" (4) (suivant le modèle de carillon utilisé)... Finalement, la recherche pourra être schématisée par le tableau ci-dessous :

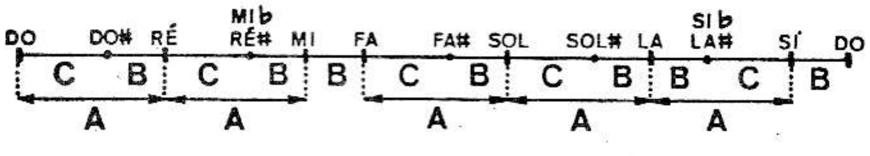
(4) ♭ n'est lui aussi, qu'un signe pour l'instant.

Paroles	Frè	re	Ja	cques	Dor	mez	vous?
1ère barre : DO	DO	RE	MI	DO	MI	FA	SOL
1ère barre : RE	RE	MI	FA ♯	RE	FA ♯	SOL	LA
1ère barre : MI	MI	FA ♯	SOL ♯	MI	SOL ♯	LA	SI
1ère barre : FA	FA	SOL	LA	FA	LA	SI ♭	DO
1ère barre : SOL	SOL	LA	SI	SOL	SI	DO	RE
1ère barre : LA	LA	SI	DO ♯	LA	DO ♯	RE	MI
1ère barre : SI	SI	DO ♯	RE ♯	SI	RE ♯	MI	FA ♯

(5) notes et non pas sons; il est facile de vérifier que les barres de la seconde rangée portant le même nom sont appariées (octave) comme celles de la première rangée.

Le classement des écarts nous permet de répartir les 12 notes (5) obtenues au total de la manière suivante.

figure 2



Par rapport à la structure à 7 notes trouvée auparavant (figure1), on voit que les écarts de type A ont été "amputés" d'un écart de type B, ce qui fait apparaître un nouveau type d'écart (type C). Entre deux barres consécutives (première et deuxième rangées ensemble) on n'a donc que deux types d'écart :

- Type B : (DO ♯,RE), (MI,FA) etc.
- Type C : (DO,DO ♯), (RE,RE ♯) etc. (6)

(6) Ces deux types correspondent respectivement aux demi-tons diatonique et chromatique.

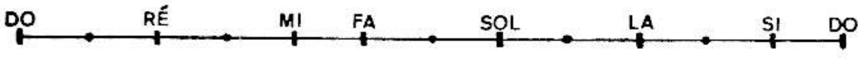
Proposons-nous maintenant de comparer ces deux types d'écart , il suffit par exemple de recommencer à jouer "Frère Jacques", mais en partant cette fois de FA ♯ ; on obtient le résultat suivant :

Paroles	Fré	re	Ja	cques	Dor	mez	vous?
1ère barre : FA#	FA#	SOL#	LA# (SI♭)	FA#	LA# (SI♭)	SI	DO#

Comparé avec ce que l'on avait en partant de DO, ce tableau nous amène à la conclusion que (LA#,SI) $\sim$ (MI,FA), et donc que les écarts de type B et de type C sont équivalents. Il n'y a donc, dans cette gamme chromatique, qu'un seul type d'écart : le demi-ton.

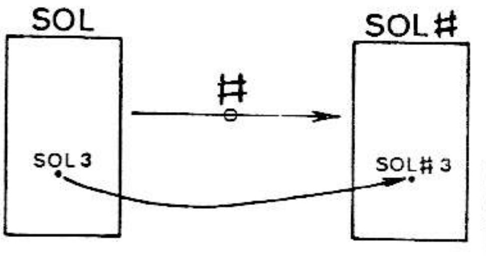
Ceci, du même coup, justifie l'appellation de "demi" ton, et précise la structure de la tonalité de DO Majeur.

figure 3

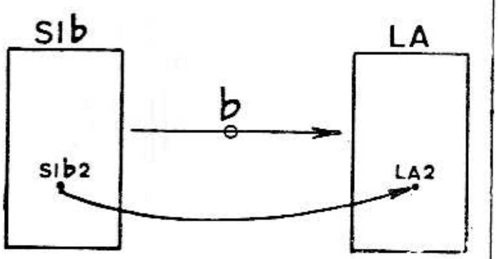


NOTA BENE: On peut faire remarquer que, les barres dont le nom est suivi de " # " étant un demi-ton plus hautes que les barres originelles, rien n'empêche de considérer une application (notée #) portant sur les notes et qui associe, à la classe d'un son quelconque, la classe du son situé un demi-ton plus haut que le premier.

Ceci ne pose pas de problème puisque l'application # , définie au départ sur un ensemble de sons, est compatible avec la relation d'équivalence dont les classes sont les notes.



On pourra également définir, de la même manière, l'application ♭



5) Les notations :

Les enfants sont déjà en possession des appellations classiques des sons ; on peut maintenant leur demander de chercher des codages pour les barres (→ sons) du carillon, en tenant compte de la notion de note ; ils seront donc amenés à rechercher des codages avec :

- un premier système à 12 signes (puisqu'il y a 12 notes différentes)
- un second système qui indiquera l'élément choisi dans chaque classe (7).

(7) Remarquons que l'écriture musicale classique ne procède pas de cette façon, puisqu'elle se base sur les 7 noms de notes de la tonalité de Do Majeur.

S'ils veulent transcrire des partitions dans leurs codages, ils auront besoin d'indiquer également la notion de durée, d'où un troisième système, qui se superposera aux deux précédents.

Après ces codages "expérimentaux", on pourra introduire (s'il n'a pas déjà été trouvé par les enfants eux-mêmes) le chiffrage suivant, qui présente d'autant plus d'intérêt que c'est celui qui est utilisé par les compositeurs actuels qui s'aident d'un ordinateur : les sons sont codés grâce à un système de numération à base 12 :

. unités du premier ordre : chaque barre est repérée, à l'intérieur d'un octave (DO→DO) par le nombre de demi-tons la séparant de la barre "DO" la plus grave (d'où 12 "chiffres", habituellement notés 00,01,02,..., 09,10,11)

. unités du second ordre (que l'on a déjà rencontrées) : les "numéros" d'octave habituels, croissant du grave à l'aigu (8).
C'est ainsi que le "nombre" (à 2 "chiffres") 3.06 représentera le FA# 3 (ou encore le SOL♭ 3).

(8) Cette notation exclut les notes les plus graves, qui ne sont d'ailleurs jamais utilisées.

Il resterait à établir un codage pour les notes ; le plus simple est bien sûr de les identifier aux unités du premier ordre utilisées ci-dessus : le SOL sera noté 07, le MI♭ : 03, etc... Les notes étant classes d'équivalence de sons, nous aurons ainsi : 06 = {0.06,1.06,2.06...} .

Début du Thème des Variations pour orchestre op. 31 d'Arnold Schoenberg

(mesures 34 à 38)

Instrumentation

1 : Hautbois

2 : Cor anglais

3 : Clarinette

4 : Cor

5 : Basson

6 : Contrebasse

7 : Violoncelle

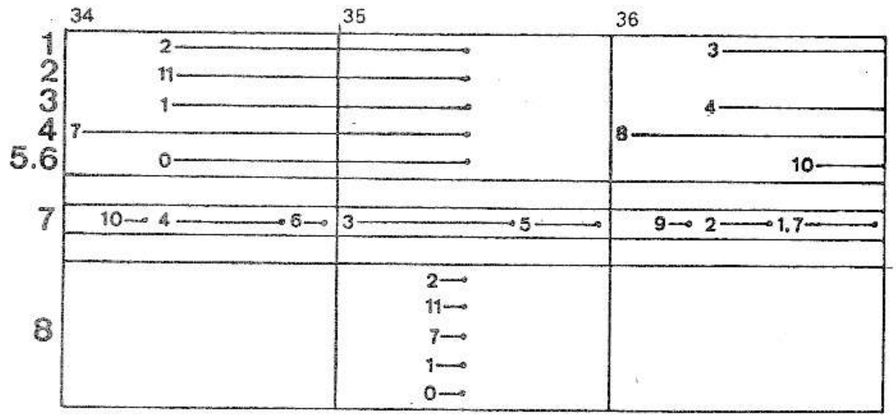
8 : Harpe

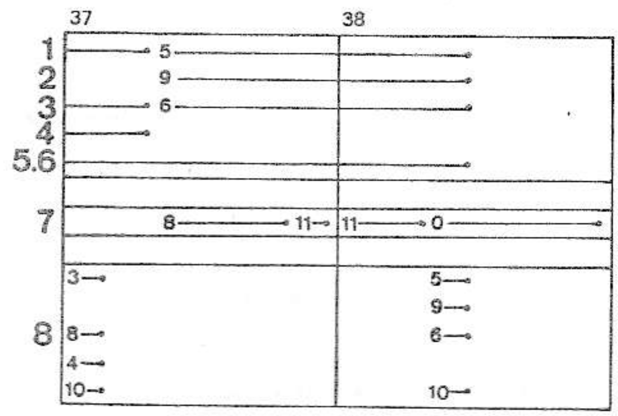
6) Dans le second cycle :

Avec les élèves de second cycle, l'approche de la gamme pourra se faire plus rapidement et aisément si on la rattache à une étude sommaire, en Physique, des cordes vibrantes, qui montrera que la fréquence du son fondamental émis par une corde est inversement proportionnel à sa longueur (toutes autres choses restant égales par ailleurs), soit $f = \frac{k}{l}$

On se procurera ensuite par un moyen quelconque une guitare (objet très courant parmi les élèves de second cycle), que l'on fera observer attentivement : principe de production du son, tension de la corde, présence de "filets" métalliques divisant le manche en "cases", longueur de corde qui vibre selon la position du doigt,...
Expérience : on "sonne" une corde à vide, puis on cherche expérimentalement la position du doigt sur le manche qui donne l'octave du premier son. Si on mesure alors les longueurs de corde qui vibrent dans les deux cas, on constate (si la guitare est bien montée) que l'octave est obtenue lorsque la longueur qui vibre est moitié de la longueur à vide ; si f est la fréquence du premier son, celle du second est donc 2f.

On constate par la même occasion que l'octave est obtenue lorsque le doigt est placé sur la 12è case (en partant de l'extrémité du manche) : la guitare est donc construite de façon à placer 12 sons dans l'octave. Question qui vient alors tout





<u>Page de gauche</u> : Notation du passage en écriture classique (d'après Editions Universal 1956).

<u>Ci - dessus</u> : <u>Transcription chiffrée du passage précédent</u>, avec les conventions suivantes :

1) Seules les notes (non les sons) sont représentées et, pour des raisons d'économie de place, elles sont codées 0, 1, 2, ... 11 au lieu de 00, 01, ... 11 théoriquement.

2) Les instruments de l'orchestre (numérotés de la même façon que dans la représentation en écriture classique) correspondent chacun à une ligne, sauf la harpe qui, pouvant produire plusieurs sons simultanés, a par conséquent droit à plusieurs lignes (ici 5).

3) Le temps est représenté en abscisses, le trait faisant suite à une note signifiant que celle-ci se prolonge jusqu'à l'instant correspondant au point final.

naturellement à l'esprit : Comment est faite cette répartition des 12 sons ? Pour le savoir il suffit de demander aux élèves de mesurer les longueurs vibrantes de corde, le doigt étant posé successivement sur les cases du manche (en partant de l'extrémité), et de chercher comment chaque nouvelle longueur est liée à la précédente. Après quelques tâtonnements et calculs, quelqu'un trouvera certainement que le rapport de deux longueurs consécutives semble être constant. Admettant alors cette hypothèse, on en déduit immédiatement que le rapport r des fréquences de deux sons consécutifs est constant (puisque $f = \frac{k}{l}$)

et enfin que ce rapport est égal à $2^{1/12}$ (puisque $\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \ldots = \frac{f_{12}}{f_{11}} = r$ et que $f_{12} = 2f$)

Les fréquences successives des 12 sons de l'octave sont par conséquent :
f ; $2^{1/12}f$; $2^{2/12}f$;...; $2^{11/12}f$.
La répétition du procédé de division de l'octave vers l'aigu et vers le grave montre qu'on peut identifier chaque son au numérateur i de la fraction i/12 intervenant dans l'expression de sa fréquence ; ceci nous fournit donc une "échelle de sons" $\mathcal{E}$ en bijection avec $\mathbb{Z}$. Une fois établie cette bijection, on fera remarquer que la relation $\mathcal{R}$: "différer d'un nombre entier d'octaves" est une équivalence sur $\mathcal{E}$, et que l'on a : $i \mathcal{R} j \Leftrightarrow i \equiv j \ (12)$.
Les classes d'équivalence sont les <u>notes</u>, et l'ensemble-quotient $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ (identifié à $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$) la <u>gamme chromatique</u>. On peut alors aborder le problème du codage des sons (voir plus haut).

7) Les tonalités majeures :

Nous pouvons, on l'a vu, définir la tonalité de DO Majeur comme étant le sous-ensemble suivant de l'ensemble des 12 notes :
$M_o = \{00 ; 02 ; 04 ; 05 ; 07 ; 09 ; 11\}$.
(en utilisant le chiffrage vu plus haut). La note 00, c'est-à-dire DO, est appelée la tonique de la tonalité.

Etant donnés que tous les écart entre sons consécutifs de l'échelle de sons sont équivalents, chacune des 12 notes de la gamme chromatique peut jouer le rôle de tonique, et on peut donc définir ainsi 11 autres tonalités majeures (toutes distinctes ou non, on le verra plus loin). Un problème intéressant (et important pour la musique tonale) peut être soulevé ici : celui des tonalités (majeures) voisines. Il peut se formuler ainsi : "Quelle doit être la tonique pour que la nouvelle tonalité ait le plus possible de notes communes avec DO Majeur ?" Ce problème peut se résoudre de deux façons :

. expérimentale, à l'aide du carillon ; on essaie de "monter la gamme" en partant des diverses barres (des deux rangées), et en utilisant le moins possible la seconde rangée.

. théorique, à l'aide d'une feuille de papier et d'un crayon, en écrivant les translatés successifs (dans $Z/_{12Z}$) de M_o, et en repérant le nombre de notes communes :

M_o :	00 02 04 05 07 09 11	
M_1 :	01 03 05 06 08 10 00	2 notes communes
M_2 :	02 04 06 07 09 11 01	5 notes communes
....		
M_{11}:	11 01 03 04 06 08 10	2 notes communes

Résultats de cette recherche :

a) Il y a bien 12 tonalités majeures distinctes

b) Il existe deux tonalités majeures qui ne diffèrent que par une seule note de DO Majeur. Ce sont :

. FA Majeur (note différente : 10 au lieu de 11, soit SI♭)

. SOL Majeur (note différente : 06 au lieu de 05, soit FA♯).

Dans le Second cycle, et dans la mesure où le niveau des élèves le permettra, on pourra ainsi aborder les 7 tonalités à dièses et les 7 tonalités à bémols (9). Sinon, on ne les définira que dans la mesure des besoins.

(9) Pour plus de détails, voir la brochure APMEP : Musique "classique" et mathématique "moderne".

8) Les tonalités mineures :

On définit cette fois la tonalité de DO mineur comme étant le sous-ensemble (également à 7 notes) :
$m_o = \{00 ; 02 ; 03 ; 05 ; 07 ; 08 ; 11\}$
Par rapport à DO Majeur, on trouve deux notes différentes :

. 03 au lieu de 04, c'est-à-dire MI♭ ;
. 08 au lieu de 09, c'est-à-dire LA♭.

Comme pour le Majeur, il existe 12 tonalités mineures ; chacune d'elles est dite "relative" d'une tonalité majeure dont elle ne diffère que d'une note, et le problème du "voisinage" s'étend à l'ensemble des tonalités, majeures et mineures(10).

(10) voir note 9

II - PRINCIPAUX TYPES D'IMITATION

L'écriture d'une oeuvre musicale dans une tonalité donnée est une contrainte (qui s'explique historiquement) : on s'oblige à n'utiliser (sauf "accident"), parmi les 12 notes existantes, que 7 d'entre elles, appartenant à la tonalité choisie. La musique dite "classique" a été la plupart du temps construite autour de la notion de "thème", phrase musicale caractéristique qui revient à diverses reprises dans l'oeuvre. Il peut y avoir plusieurs thèmes différents, d'importance inégale, et ils constituent, avec la tonalité, l'un des facteurs d'unité de la pièce. Pour éviter cependant de lasser l'auditeur, cest thèmes réapparaissent souvent sous des formes voisines ("imitées"), reconnaissables en général, mais différentes de la forme initiale (11). Ces distorsions du thème varient suivant les contraintes que s'impose le musicien, qui a à résoudre le problème suivant : "Etant donnée une phrase musicale P, construire une phrase P' ressemblant le plus possible à P, mais respectant certaines contraintes (C_i)". Ce problème peut être posé aux élèves, en leur donnant les contraintes à respecter. Par exemple :

(11) La forme la plus élémentaire d'imitation consiste bien sûr à répéter purement et simplement le thème; on trouve parfois la même phrase dans deux voix différentes, l'une étant légèrement décalée dans le temps par rapport à l'autre (imitation en canon).

1er type de contraintes : P' doit commencer par un son donné (transposition)

D'après ce qui a été vu au §1, cette seule contrainte n'offre pas de difficultés. Avec la notation des sons en base 12, on obtiendra le passage P' par une simple translation dans l'échelle des sons, l'amplitude de cette translation étant déterminée par le premier son de P et le premier son (donné) de P'.
Reprenons l'exemple de "Frère Jacques", qui s'écrit, en notation traditionnelle :

et donc, avec la numération à base 12 (et en supprimant les reprises), sous la forme du n-uplet suivant :

$$P = (3.00, 3.02, 3.04, 3.00, 3.04, 3.05, 3.07).$$

Si la contrainte est de prendre comme nouveau son de départ le MI 3 (chiffré 3.04), la translation à utiliser sera définie par :

$$t : 3.00 \longmapsto 3.04$$

Ceci permettra de trouver de proche en proche les images de tous les éléments de P, et donc d'obtenir P' :

$$P' = (3.04, 3.06, 3.08, 3.04, 3.08, 3.09, 3.11)$$

Soit en notation classique :

N.B. : Le chiffrage à base 12 présente l'échelle de sons comme un sous-ensemble de N, ce qui pose des problèmes théoriques en ce qui concerne les translations : ce ne sont pas des bijections de $\mathcal{E}$, mais de simples fonctions. Cependant, dans la pratique, on se place toujours "loin des bords" de $\mathcal{E}$, ce qui fait qu'on n'a pas de problème pour définir l'image de P ; un moyen d'atténuer cette difficulté est de considérer non plus les sons, mais les notes, dont l'ensemble peut être -on l'a vu- identifié à $Z/_{12Z}$. Les translations à considérer sont maintenant des translations de $Z/_{12Z}$, donc bijectives et sans problème. Une telle translation associe une note à une autre ; il reste donc à choisir, pour chaque note, le représentant (son) qui convient, ce qui peut se faire aisément en considérant l'amplitude des intervalles successifs dans le passage P. Reprenons notre bon vieux "Frère Jacques" ; du point de vue des notes, il s'écrira cette fois :

$$p = (00, 02, 04, 00, 05, 07)$$

Le transformé de p doit commencer par un MI (c'est-à-dire 04) ; la translation à considérer est donc :

$$t_4 : Z/_{12Z} \longrightarrow Z/_{12Z}$$
$$i \longmapsto i+4$$

et on aura p' = (04,06,08,04,08,09,11).
Le son de départ étant MI 3 (3.04), le deuxième son de P' sera forcément le FA♯3 (par comparaison avec les deux premiers sons de P), et ainsi de suite...
Une telle imitation s'appelle une transposition de P. Elle présente la particularité de fournir un passage P' qui est écrit dans une autre tonalité que P (on dit qu'elle fait "moduler") : la tonalité de P' est, par construction même, la translatée de la tonalité de P.
Pour les élèves plus âgés, on peut alors donner des exemples moins élémentaires.

Voir un exemple musical tiré de la littérature classique dans l'Annexe (page suivante).

2è type de contraintes : P' doit commencer par un son donné, mais être écrit dans la même tonalité que P (imitation directe sans modulation)

Les enfants qui sont partis de la manipulation du carillon ont déjà été confrontés à ce problème (jouer "Frère Jacques" en commençant pas une barre quelconque, et sans utiliser les barres de la seconde rangée). Ils ont déjà remarqué qu'il admettait en général pas de solution et qu'i fallait utiliser une ou plusieurs barre de la seconde rangée si on voulait obtenir coûte que coûte un résultat. Si l'on s'impose de ne pas "tricher", on n'obtiendra qu'une "approximation" de l'air initial. Les enfants pourront constater expérimentalement que la meilleure approximation possible (la barre de départ étant fixée) sera obtenue par une translation sur les barres de la première rangée du carillon.

Il est donc plus simple, en ce qui concerne ce type d'imitation, d'utiliser un codage qui ne fasse intervenir que les 7 notes de la tonalité à l'intérieur de laquelle on s'impose de rester (et non plus les 12 notes de la gamme chromatique). Le plus naturel consiste à identifier les 7 notes de la tonalité donnée (majeure ou mineure) aux 7 éléments de $Z/_{7Z}$.
Ce codage présente l'avantage intéressant que les translation envisagées ci-dessus correspondent aux translations habituelles dans $Z/_{7Z}$.

Exemple : dans la tonalité de DO Majeur, nous aurons :
DO : □ ; RE : I ; MI : II ; FA : III ; SOL : IV ; LA : V ; SI : VI . (12)

(12) Utilisation des chiffres romains pour éviter toute confusion avec le codage dans Z/12Z. Il a fallu inventer un "pseudo zéro".

"Frère Jacques" sera donc cette fois codée :

π = (□, I, II, □, II, III, IV)

Si on en cherche l'imitation directe sans modulation commençant pas le MI 3, elle sera obtenue grâce à la translation :

$$t_{II} : Z/_{7Z} \longrightarrow Z/_{7Z}$$
$$T \longmapsto T + II$$

ANNEXE

1) *TRANSPOSITION*

Extraits du "Solo per il Cembalo" (J.-S. Bach), du Klavierbüchlein :

A 

B 

Transcription dans Z/12Z :

A : 03 07 10 10 10 00 02 03 03 05 07 08 07 05 03 02 00 10 08 07 10 03
B : 10 02 05 05 05 07 09 10 10 00 02 03 02 00 10 09 07 05 03 02 05 10

N.B.: Noter les changements d'octave dans la transposition du thème.

2) *IMITATION DIRECTE SANS MODULATION*

Extrait du Menuet de la Deuxième Suite Française (J.-S. Bach) :

Transcription dans Z/12Z (MI♭ Majeur).

A : III II I III VI V IV VI I III II I
B : II I □ II V IV III V □ II I □

3) *IMITATION A L'UNISSON DANS LA TONALITE HOMONYME*

Extraite du 1er mouvement de la Sonate pour piano K.533 (Mozart)

A 

B 

Transcription dans Z/7Z (Pour A: FA Majeur. Pour B : FA Mineur).

IV III II I □ II I III VI □ IV

Et nous aurons alors :

$\pi' =$ (II,III,IV,II,IV,V,VI), c'est-à-dire (MI,FA,SOL,MI,SOL,LA,SI).
Quant à la détermination des sons, elle se fera sans problème comme dans le cas de la transposition.; il y aura cependant ici, dans certains cas, de légères variations d'amplitude des intervalles :

(Exemple musical : voir Annexe ci-contre)

3è type de contraintes : P' doit commencer par le même son que P, mais être écrit dans une autre tonalité (imitation à l'unisson)

Le cas le plus fréquent est celui de l'imitation à l'unisson dans la tonalité homonyme (deux tonalités sont dites homonymes si elles portent le même nom, mais l'une étant majeure et l'autre mineure).

Exemple : "Frère Jacques" est écrit en DO Majeur, c'est-à-dire en n'utilisant que les éléments de $M_o = \{00;02;04;07;09;11\}$.

Si on veut l'imiter à l'unisson dans la tonalité homonyme, son transformé sera écrit en DO mineur, $m_o = \{00;02;03;05;07;08;11\}$.

Comme on l'a déjà remarqué, DO mineur s'obtient à partir de DO Majeur en remplaçant simplement MI (04) par MI♭ (03), et LA (09) par LA♭ (08).
On aura donc l'imitation cherchée en remplaçant, à chaque fois qu'elles apparaîtront les notes MI et LA respectivement par MI♭ et LA♭. Ceci revient à remplacer chaque note de DO Majeur par la note de DO mineur portant le même numéro (dans l'identification avec $Z/_{7Z}$). Dans le cas de "Frère Jacques" on aura donc :

$Z/_{7Z}$	DO Majeur	DO mineur
□	00	00
I	02	02
II	04	03
III	05	05
IV	07	07
V	09	08
VI	11	11

L'imitation de "Frère Jacques" sera donc ici :

p' = (00,02,03,00,03,05,07), soit en définitive

(Exemple musical : voir annexe ci-contre)

4è type de contraintes : P' doit commencer par un son donné, être écrit dans la même tonalité que P, mais le sens des intervalles successifs de P doit être inversé, et leur amplitude respectée dans la mesure du possible (imitation par mouvement contraire)

Premier problème : Quel type de notation utiliser ? Celle qui est basée sur $Z/_{12Z}$ ou celle qui est basée sur $Z/_{7Z}$?
Puisque l'on s'impose de rester à l'intérieur d'une même tonalité, la seconde notation sera certainement plus adaptée.

Un premier résultat qui peut être constaté par les élèves (sur un exemple) est que le respect intégral de l'amplitude des intervalles est en général impossible. Soit à imiter "Frère Jacques" (pourquoi changer ?) par mouvement contraire, en commençant par SOL 3 :

Expérimentalement, si l'on veut respecter l'amplitude des intervalles, on obtient le résultat suivant (en écrivant les sons de P et en notant l'amplitude des intervalles successifs par le nombre de demi-tons séparant les deux sons, affecté du signe + si on passe du grave à l'aigu, et du signe - dans le cas contraire)

FRE — RE JA — CQUES DOR — MEZ VOUS ?

ORIGINAL : $3.00 \xrightarrow{+2} 3.02 \xrightarrow{+2} 3.04 \xrightarrow{-4} 3.00 \xrightarrow{+4} 3.04 \xrightarrow{+1} 3.05 \xrightarrow{+2} 3.07$

IMITATION : $3.07 \xrightarrow{-2} 3.05 \xrightarrow{-2} 3.03 \xrightarrow{+4} 3.07 \xrightarrow{-4} 3.03 \xrightarrow{-1} 3.02 \xrightarrow{-2} 3.00$

On obtient ainsi, on le voit, la note 03 (MI♭), étrangère à la tonalité de DO Majeur. On peut penser à la remplacer par la note 04 (MI), inutilisée jusque-là et voisine de 03. Cette recherche expérimentale montre que le principe consisteà établir une permutation de $Z/_{7Z}$ qui "inverse" le sens des intervalles, en changeant aussi peu que possible leur amplitude. L'idée qui peut venir à ce moment est de considérer les symétries de $Z/_{7Z}$, c'est-à-dire les applications de la forme :

$$s_U : Z/_{7Z} \longrightarrow Z/_{7Z}$$
$$T \longmapsto U-T$$

Reprenons l'exemple de "Frère Jacques" que l'on veut imiter cette fois par mouvement contraire en commençant par SOL 3. DO doit être transformé en SOL, donc on doit avoir $s_U(\square) = IV$; d'où U = IV. On aura donc :

$$\begin{array}{llcl} s_{IV} : & Z/_{7Z} & \longrightarrow & Z/_{7Z} \\ & \square & \longmapsto & IV \\ & I & \longmapsto & III \\ & II & \longmapsto & II \\ & III & \longmapsto & I \\ & IV & \longmapsto & \square \\ & V & \longmapsto & VI \\ & VI & \longmapsto & V \end{array}$$

et, puisque $\pi = (\square,I,II,\square,II,III,IV)$, on aura :

$\pi' = (IV,III,II,IV,II,I,\square)$; soit finalement

(Exemple musical : voit annexe ci-contre).

5è type de contraintes : Le "Canon à l'écrevisse" (imitation récurrente)

Il s'agit cette fois du procédé -tout à fait abstrait du point de vue musical- qui consiste à énoncer une phrase musicale en commençant pas le dernier son ; c'est-à-dire que, si l'on a $P = (S_1, \ldots, S_n)$ on aura $P' = (S_n, \ldots, S)$.
Ce procédé n'est pas du tout imaginaire, et a été utilisé par des compositeurs aussi illustres que J.S. BACH (voir exemple en annexe).

Voici ce que donnerait "Frère Jacques" (jusqu'à "Dormez-vous ?") transformé par ce procédé :

N.B. : Cette transformation n'introduit bien sûr aucun changement de tonalité. D'autre part, il est normalement impossible (à moins d'avoir un esprit extra-ordinairement abstrait) de reconnaître à l'audition la phrase dont on est parti.

(Exemple musical : voir annexe ci-contre)

Voici donc passés en revue les principaux types d'imitation utilisés par les compositeurs "classiques". Ces divers types peuvent bien sûr être combinés entre eux pour donner de nouvelles imitations (les exemples fourmillent). D'autre part on peut, avec les élèves les plus âgés, prolonger l'étude précédente pour déboucher sur la musique "sérielle", dont -comme on le verra- un certain nombre de règles sont issues des procédés imitatifs rencontrés ci-dessus.

ANNEXE

4) *IMITATION SANS MODULATION PAR MOUVEMENT CONTRAIRE*

Extraits de "l'Art de la Fugue" (J.-S. Bach).

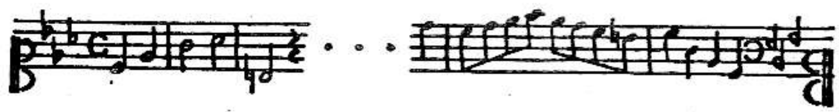
A  B 

Transcription dans Z/7Z (RE Mineur).

A : IV II VI I II III II I
B : IV II IV V IV III II I II III IV

5) *CANON A L'ECREVISSE*

Le n° 3a (Canon a deux voix) de "l'Offrande Musicale" (J.-S. Bach).



(La première voix joue la partition dans le sens habituel tandis que la seconde la joue de droite à gauche, en commençant par la fin).

III - OU KLEIN FAIT POINTER LE BOUT DE SON GROUPE

Si nous jetons un regard en arrière sur celles des imitations rencontrées qui ne font pas moduler, nous trouvons :

- les imitations directes sans modulation (bien sûr)
- les imitations par mouvement contraire
- l'imitation récurrente.

Les deux premiers types ont été représentés, en première approche, comme des permutations de $Z/_{7Z} = \{O;I;II;III;IV;V;VI\}$

- les imitations directes comme translations :

$t_U : T \longmapsto T+U$

- les imitations par mouvement contraire comme symétries :

$s_U : T \longmapsto U-T$

En fait, une phrase musicale étant représentée comme un n-plet d'éléments de $Z/_{7Z}$;
$\pi = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$, ses imitations directes seront les 7 n-uplets
$T_U(\pi) = (t_U(X_1),t_U(X_2),\ldots,t_U(X_n))$. (Bien sûr, on a $T_O(\pi) = \pi$).
De même, ses imitations par mouvement contraire seront les 7 n-uplets.
$S_U(\pi) = (s_U(X_1),s_U(X_2),\ldots,s_U(X_n))$, et l'imitation récurrente de π sera
$R(\pi) = (X_n,X_{n-1},\ldots,X_1)$.

Comme nous l'avons dit plus haut, ces procédés peuvent être composés les uns avec les autres de toutes les façons possibles, et ceci peut servir de base à une recherche des élèves (par groupes, pas exemple) :

" - Qu'obtient-on alors ?"
" - De nouveaux types d'imitation apparaissent-ils ?"

Donnons ici sans démonstration les résultats d'une telle recherche (qui bien sûr se ramène à des compositions d'applications) :

a) Même procédé utilisé deux fois :

$T_U o T_V = T_{U+V}$

$S_U o S_V = T_{U-V}$ (en particulier, $S_{\square}$ o $S_{\square}$ est l'identité)

RoR est l'identité.

(Remarque : les 7 imitations S_U peuvent être considérées comme les produits de composition de la symétrie $S_{\square}$ par les translations T_U ; on a en effet :
$S_U = T_U o S_{\square}$ ($S_{\square} o T_{-U}$)

b) Composition de deux procédés différents :

$T_U o S_V = S_{U+V}$

$S_U o T_V = S_{U-V}$

$T_U oR = RoT_U$ est d'un nouveau type

$S_U oR = RoS_U$ est également d'un nouveau type, et on a de plus $S_U oR = RoS_U = T_U o(S_{\square} oR)$

o	ε	$S_{\square}$	R	$S_{\square}oR$
ε	ε	$S_{\square}$	R	$S_{\square}oR$
$S_{\square}$	$S_{\square}$	ε	$S_{\square}oR$	R
R	R	$S_{\square}oR$	ε	$S_{\square}$
$S_{\square}oR$	$S_{\square}oR$	R	$S_{\square}$	ε

Conclusion : Tous les types d'imitation sans modulation rencontrés jusqu'à présent peuvent donc être considérés comme les composés, par les translations, des éléments de l'ensemble $K = \{\varepsilon; S_{\square}; R; S_{\square} oR\}$ ε étant l'identité de $(Z/_{7Z})^n$
La table de la loi o dans cet ensemble K est, d'après ce que nous venons de voir, la table ci-contre :

On reconnaît là la table d'un groupe de Klein. Conséquence de la stabilité de K pour la loi : en composant autant de fois qu'on le voudra les procédés imitatifs étudiés, on n'en obtiendra pas de nouveaux. En définitive, un thème musical pourra donc se présenter sous 4 formes :

- l'original
- son "renversement" $S_{\square}(\pi)$
- sa forme récurrente $R(\pi)$,
- le renversement de sa forme récurrente $S_{\square} oR(\pi)$ (qui est d'ailleurs également la récurrence du renversement).

Ces 4 formes sont définies, en quelque sorte, "à une translation près".

IV - LES REGLES DU DODECAPHONISME

Les années 1880-90 marquèrent la désagrégation de la musique tonale, par un besoin général de "dépasser les limites des lois harmoniques" (13). Parmi les musiciens qui cherchèrent alors à créer un nouveau langage musical, on ne saurait ignorer Arnold SCHOENBERG (1874-1951) qui, vers 1923, codifia le résultat de ses recherches sur le "dodécaphonisme". En effet, les règles de la tonalité une fois abolies, la Musique se trouvait dans une situation quelque peu anarchique ; la nécessité d'un système de remplacement se fit alors sentir, et c'est ce à quoi se consacra -entre autres- SCHOENBERG. Voici quelques-unes des règles qu'il édicta (14) :

(13) in "La Musique du XXè siècle" (R. Laffont-Grammont 1975).

(14) Il y en a d'autres, mais qui sortiraient du cadre de cet article.

1) Aucune des 12 notes de la gamme tempérée ne doit être privilégiée, de quelque façon que ce soit, par rapport aux autres. En particulier, la fréquence d'apparition devra être la même pour toutes.

2) Règle du "total chromatique" : elle impose à une note quelconque de ne pas réapparaître avant que toutes les autres aient été énoncées. Allant même plus loin, SCHOENBERG impose que

3) toute oeuvre musicale soit basée sur un arrangement, choisi à l'avance, des 12 notes (la série) : $S = (n_1, n_2, \ldots, n_{12})$, où $n_i \in Z/_{12Z}$, et $(i \neq j) \Longrightarrow (n_i \neq n_j)$.
Cet arrangement est chronologique, c'est-à-dire que, dans un tel 12-uplet, une note placée à gauche d'une autre sera émise avant (ou en même temps que) celle-ci.

C'est cette série qui fondera l'unité de l'oeuvre musicale ; elle remplacera en quelque sorte (bien qu'étant d'essence différente) à la fois la tonalité et le thème des oeuvres antérieures. Se souvenant des techniques du contrepoint, et en particulier des procédés imitatifs, SCHOENBERG applique à $Z/_{12Z}$ les procédés que les musiciens antérieurs utilisaient dans $Z/_{7Z}$ (voir ci-dessus) : puisqu'ici la "série" a remplacé le "thème" tonal, SCHOENBERG impose à S de n'apparaître -à une translation près- que sous l'un des quatre avatars suivants :

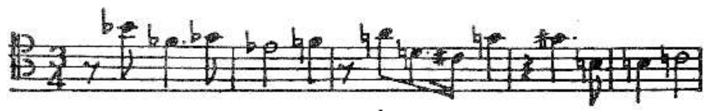
- S elle-même, bien sûr : $S = \mathcal{E}(S) = (n_1, n_2, \ldots\ldots, n_{12})$
- son renversement : $rv(S) = (-n_1, -n_2, \ldots\ldots, -n_{12})$
- sa récurrence : $rc\ (S) = (n_{12}, n_{11}, \ldots, n_1)$
- la récurrence de son renversement : $rc \circ rv(S) = (-n_{12}, -n_{11}, \ldots, -n_1)$.

Bien entendu, comme dans le cas de la musique tonale, l'ensemble $K' = \{\mathcal{E}; rv; rc; rc \circ rv\}$ muni de la composition des applications est un groupe de Klein.

On peut alors, avec une classe, se proposer d'étudier de ce point de vue un passage d'une oeuvre sérielle, pour voir comment y sont utilisées les règles qui viennent d'être décrites. Voici, à titre d'exemple, la série servant de base aux "Variations pour orchestre", op. 31, de SCHOENBERG :

$S = (10,04,06,03,05,09,02,01,07,08,11,00)$

Cette série apparaît au début du "Thème" sous la forme suivante :



(cf la partie de violoncelle (n° 7) page 6)

On retrouve d'ailleurs dans ce Thème les 4 formes de la série (15) :

- S, déjà indiquée, ainsi que $T_3(S) = (01,07,09,06,08,00,05,04,10,11,02,03)$
- $T_5 \circ rv(S) = (07,01,11,02,00,08,03,04,10,09,06,05)$
- $rc(S) = (00,11,08,07,01,02,09,05,03,06,04,10)$
- $T_5 \circ rc \circ rv\ (S) = (05,06,09,10,04,03,08,00,02,11,01,07)$

(15) Pour une étude plus détaillée de ce Thème, voir la brochure de l'IREM de Paris Sud intitulée : la Musique adoucit les Maths.

Après ce tour d'horizon qui nous a conduits à travers divers aspects dela de la Musique, je n'ai qu'un seul souhait à formuler : c'est que cet article incite certains collègues à envisager une coordination de leur enseignement avec celui de la Musique, en s'assurant, bien sûr, le concours du collègue musicien enseignant dans la classe concernée.
Ceci aurait pour avantage d'offrir à nos élèves un champ d'application des Mathématiques un peu différent de ceux auxquels ils sont habitués, et ne même temps de leur permettre d'appréhender un peu mieux les oeuvres musicales, c'est-à-dire à la fois avec leur intelligence et leur sensibilité.