

DE LA GEOMETRIE DE PREMIERE A LA PROGRAMMATION LINEAIRE

D. FREDON IREM de LIMOGES

exposé fait à POITIERS le 3 décembre 1975

Quelques exemples typiques de problèmes économiques nous permettent de préciser les notions élémentaires utilisées en programmation linéaire. Dans le cas de 2 variables la résolution du problème peut se faire par des méthodes graphiques faisant appel à la géométrie de la classe de 1ère. Ce cas dont l'intérêt pratique est minime, aide bien à comprendre les théorèmes généraux et les techniques mathématiques mises en oeuvre dans la résolution des problèmes effectivement traités en entreprise.

I - Quelques applications à l'économie :1) Etablissement d'un programme de fabrication.

a) production utilisant des machines, des matériaux...
donnés et maximisant le profit.

exemple 1 :

Considérons un atelier fabriquant deux produits A et B à l'aide de trois machines M_1 , M_2 , M_3 . Les temps de passage pour un kg de produit A ou B sur chacune des machines sont indiqués en mn dans le tableau ci-dessous :

	M_1	M_2	M_3
A	5	10	11
B	15	8	20

Les machines ne sont respectivement disponibles que 100 h, 120 h, 150 h par mois et on néglige toutes les autres contraintes techniques ou commerciales. On sait que le bénéfice est de 10 F pour un kg de A, et de 13 F pour un kg de B, et on se propose de déterminer un programme de fabrication qui rende maximum le bénéfice global.

Soit x_1 (resp. x_2) la production mensuelle exprimée en kg de produit A (resp. B). On suppose que les temps de fabrication et le bénéfice sont proportionnels aux quantités produites.

Le bénéfice exprimé en F, est donc :

$$Z = 10 x_1 + 13 x_2$$

Comme M_1 ne peut être utilisée que 100 h par mois, soit 6000 mn, il faut :

$$5 x_1 + 15 x_2 \leq 6000$$

De même : $10 x_1 + 8 x_2 \leq 7200$

$$11 x_1 + 20 x_2 \leq 9000$$

Le problème est donc de déterminer le programme de fabrication (x_1, x_2) qui maximise $Z = 10 x_1 + 13 x_2$

en vérifiant les contraintes

$$5 x_1 + 15 x_2 \leq 6000$$

$$10 x_1 + 8 x_2 \leq 7200$$

$$11 x_1 + 20 x_2 \leq 9000$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Exemple 2 :

On dispose de :

2000 tonnes d'un métal A ayant coûté 70 F la tonne

3000 tonnes d'un métal B ayant coûté 50 F la tonne

dont on peut réaliser les alliages suivants :

alliage n° 1 vendu 110 F/t et composé de 30 % de A
et 70 % de B

alliage n° 2 vendu 120 F/t et composé de 40 % de A
et 60 % de B

alliage n° 3 vendu 100 F/t et composé de 20 % de A
et 80 % de B

On veut déterminer le programme de fabrication des alliages qui donnera le bénéfice maximum. Traduire le problème sous forme mathématique, les seules contraintes étant dues aux stocks disponibles.

b) production nécessaire pour satisfaire une demande au moindre coût.

Exemple 3 (MAURIN 1967)

Une raffinerie peut traiter quatre pétroles bruts d'origines géographiques différentes.

Le brut n° 1 lui revient à 200 F/T

Le brut n° 2 lui revient à 180 F/t

Le brut n° 3 lui revient à 210 F/t

le brut n° 4 lui revient à 170 F/t.

On suppose que ces bruts sont transformés intégralement en essence, gas-oil, fuel-oil selon les rendements :

productions :	brut n° 1 :	brut n° 2 :	brut n° 3 :	brut n° 4 :
essence :	30 :	25 :	40 :	20 :
gas-oil :	40 :	25 :	30 :	20 :
fuel-oil :	30 :	50 :	30 :	60 :
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:

Cette raffinerie doit satisfaire une demande annuelle de :

1 250 000 t d'essence

1 300 000 t de gas-oil

1 800 000 t de fuel-oil

Il s'agit de déterminer les quantités de chacun des bruts à mettre en œuvre pour que la dépense totale soit minimale.

Si on appelle x_1, x_2, x_3, x_4 les quantités en milliers de tonnes des bruts n° 1, 2, 3, 4 à raffiner, le problème s'écrit :

$$\text{minimiser } Z = 200 x_1 + 180 x_2 + 210 x_3 + 170 x_4$$

sous les contraintes

$$3 x_1 + 2,5 x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 \geq 12\,500$$

$$4 x_1 + 2,5 x_2 + 3 x_3 + 2 x_4 \geq 13\,500$$

$$3 x_1 + 5 x_2 + 3 x_3 + 6 x_4 \geq 18\,000$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

2) Problèmes de mélange.

Lorsqu'on souhaite obtenir un produit présentant des caractéristiques précises par le mélange de produits dont on connaît la composition et le prix, la programmation linéaire permet de trouver le mélange le plus économique.

3) Certains problèmes d'investissement.

exemple : l'énergie électrique.

A chaque instant, l'EDF doit être en mesure de fournir une quantité d'énergie répondant à la demande. Tout en respectant cette contrainte, on peut chercher à définir un équipement optimum qui minimise le coût total d'investissement et de fonctionnement. (coûts actualisés).

4) Points communs aux problèmes qui précèdent.

Dans les problèmes cités, il s'agit toujours de déterminer des valeurs positives ou nulles d'inconnues de façon à optimiser une fonction linéaire de ces inconnues tout en satisfaisant à certaines inégalités ou égalités linéaires qui traduisent diverses contraintes techniques, commerciales, financières... La validité de ces hypothèses de linéarité doit toujours être discutée avant d'appliquer les techniques de la programmation linéaire.

II - ETUDE D'UN EXEMPLE SIMPLE - RESOLUTION GRAPHIQUE :

1) utilisation dans les classes du second degré

La résolution graphique dans le cas de 2 variables permet d'utiliser diverses notions de géométrie analytique :

a) Dans un plan muni d'un repère, la forme générale de l'équation d'une droite est :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b, c sont des constantes réelles données.

Une telle droite détermine deux demi-plans dont l'un a pour équation $ax + by + c > 0$ et l'autre $ax + by + c < 0$

b) Deux droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives

$$(D_1) \quad ax + by + c = 0$$

$$(D_2) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sont parallèles si, et seulement si, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. C'est le cas en particulier pour $a = a'$ et $b = b'$.

c) si (D) est la droite d'équation

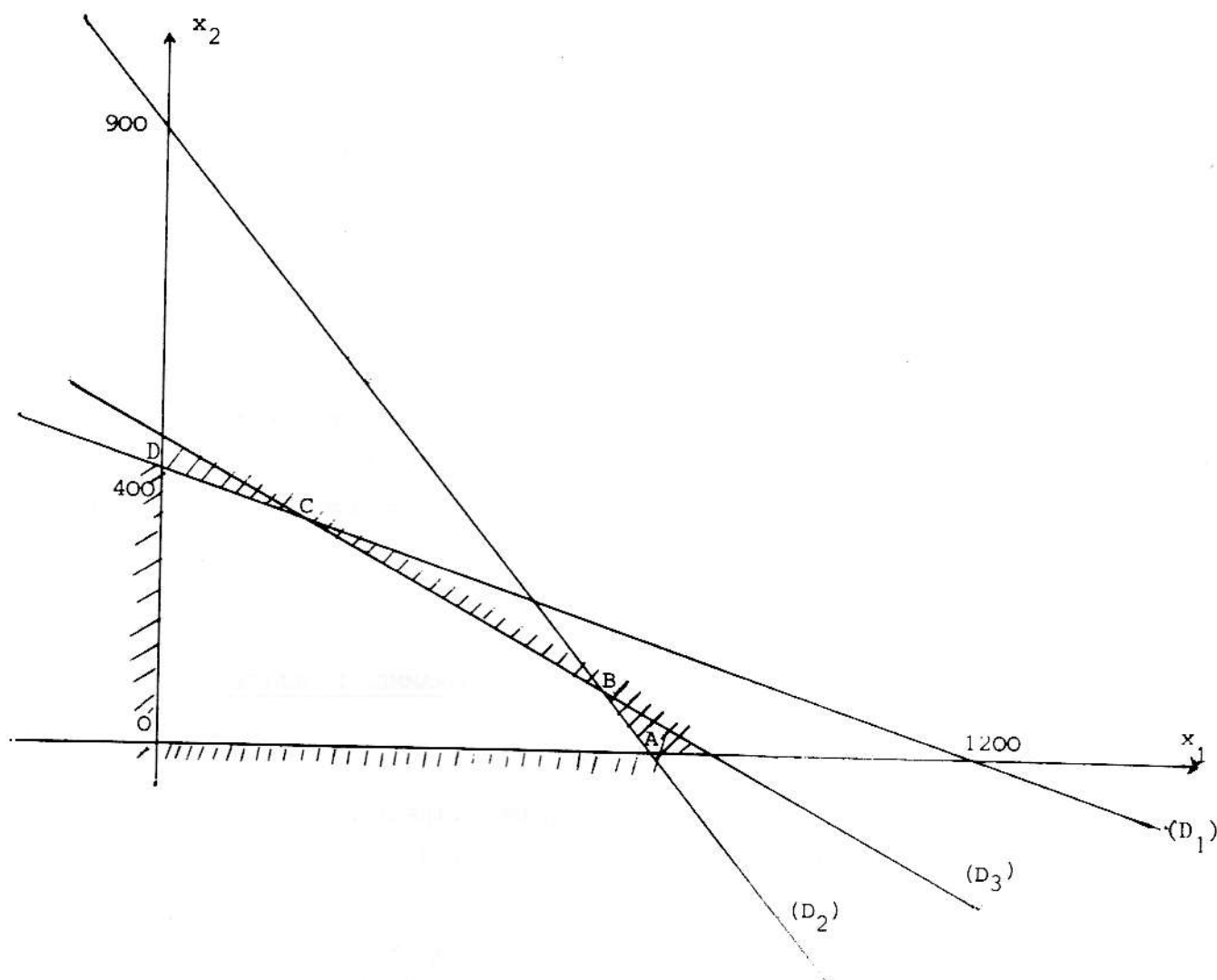
$$ax + by = k$$

la distance de l'origine O à (D) est égale à $\frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (si $k > 0$)

c'est-à-dire que, pour a et b constants, elle est proportionnelle à k .

2) Résolution graphique du problème de l'exemple 1

Chaque programme de fabrication (x_1, x_2) peut être représenté par le point M de coordonnées (x_1, x_2) dans un plan muni d'un repère arthonormé par exemple. Les diverses contraintes correspondent alors à l'obligation faite au point M d'appartenir simultanément à un certain nombre de demi-plans, soit en résumé au polygône convexe $OABCD$, dit polygône des contraintes.



D'autre part, lorsque le point M décrit une droite d'équation $10x_1 + 13x_2 = k$ (ou plus précisément la partie de cette droite contenue dans le polygône des contraintes) le profit est constant et égal à k . Il apparaît ainsi une solution graphique :

- déplacer une droite d'équation $10x_1 + 13x_2 = k$ parallèlement à elle-même ;
- n'accepter que les positions telles que la droite rencontre le polygône des contraintes puisque seuls les points du polygône (fermé) correspondent à des programmes de fabrication qui vérifient les contraintes ;

- Chercher la position telle que la distance de l'origine à la droite soit maximum puisqu'on cherche k maximum.

On constate graphiquement que le programme optimal correspond au sommet B. d'où :

$$x_1 = \frac{4\ 500}{7} \simeq 643$$

$$x_2 = \frac{675}{7} \simeq 96$$

$$\text{et } z = \frac{53\ 775}{7} \simeq 7\ 682$$

Remarque :

La méthode graphique ne convient que pour des problèmes à deux variables. Elle ne peut donc pas servir à résoudre des problèmes réels. Mais elle a un grand intérêt pédagogique pour comprendre les théorèmes généraux et les algorithmes.

III - GENERALITES SUR LES PROGRAMMES LINEAIRES :

1) Définitions

on appelle programme linéaire le problème de la recherche de l'élément (ou des éléments) x de $\mathbb{R}^n$

qui maximise $f(x)$

sous les contraintes $g_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m$ où $f, g_1, \dots, g_m$ sont des fonctions données de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, avec f linéaire et g_i affine pour $i = 1, \dots, m$.

on appelle programme réalisable tout élément de

$$P = \{ x ; \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \}$$

et solution tout programme réalisable qui maximise $f(x)$ f est dite fonction économique ou fonction critère.

2) théorèmes

a) P est un polyèdre convexe. Il peut être vide. Il peut être non borné.

b) Le maximum de f n'est pas atteint à l'intérieur de P . S'il est fini, il est atteint en au moins un sommet.

En effet, soit AB l'intersection d'une droite et du polyèdre des contraintes P . Si $M \in AB$ on a :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda (\vec{OB} - \vec{OA}) \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]$$

f étant linéaire :

$$\varphi(\lambda) = f(\vec{OM}) = f(\vec{OA}) + \lambda [f(\vec{OB}) - f(\vec{OA})]$$

φ est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda\beta$ où α et β sont des constantes. φ continue sur le compact $[0,1]$ atteint sa borne supérieure en $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ suivant le signe de β .

La restriction de f au segment AB atteint donc son maximum en A ou B .

IV - DESSERREMENT DES CONTRAINTES - VALEURS MARGINALES

Reprenons l'exemple traité graphiquement et supposons qu'au lieu d'être limitée à 6 000 mn par mois, la capacité de production de M_1 passe à $6\,000 + \lambda$. Si λ est faible, c'est encore au point d'intersection de (D_2) et (D_3) que l'optimum est atteint : l'apport sur la fonction économique est nul. Cela correspond au fait que M_1 n'était pas complètement utilisée à l'optimum :

Une augmentation de μ mn sur la capacité de production de M_2 , avec μ faible, conduit à un nouvel optimum :

$$n_1 = \frac{4\,500}{7} + \frac{5}{28} \mu$$

$$n_2 = \frac{675}{7} - \frac{11}{112} \mu$$

$$\text{et } z = \frac{53\,775}{7} - \frac{57}{112} \mu$$

$\frac{57}{112}$ est le bénéfice marginal (en francs) de la contrainte (en mn)

"limitation du temps d'utilisation M_2 ". C'est l'augmentation du bénéfice qui résulte du desserrement de la contrainte d'une unité

On trouve de la façon pour M_3 : $\frac{25}{56}$

Bibliographie très sommaire