Des partages.
Vieille opération aux rives du Nil.

Henry Plane

Le résultat de la division d'un entier n par un autre entier d supérieur, donc une fraction de l'unité, était exprimé dans l'Égypte ancienne sous la forme d'une somme d'inverses d'entiers.

Ainsi 4 divisé par 7 s'exprimait non pas $\frac{4}{7}$ mais $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$.

Ainsi, pour partager 4 mesures de blé entre 7 personnes, chacune recevait $\frac{1}{2}$ mesure puis $\frac{1}{7}$ du reste de la première distribution car $\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{14}$.

Comment opérait-on ? Le mode de décomposition n'est pas toujours évident !

Les historiens ont émis bien des hypothèses à partir des listes de résultats retrouvées sur papyrus et hiéroglyphes tel celui copié par le scribe Ahmès au 17ème siècle avant notre ère et appelé « papyrus Rhind » du nom de celui qui le récupéra au 19ème siècle.

Il existe maintes études approfondies sur ces sommes d'inverses. Nous proposons ici un algorithme simple pour opérer cette « division-développement ».

À partir de $n < d$ puisque $\frac{n}{d} < 1$, nous recherchons a et b tels que $an = d + b$ et nous divisons cette égalité par ad :

$$\frac{an}{ad}=\frac{d}{ad}+\frac{b}{ad} \text{ et donc } \frac{n}{d}=\frac{1}{a}+\frac{b}{ad}.$$

Ainsi pour $4 \div 7$ il existe : $2 \times 4 = 7 + 1$, égalité que nous divisons par 2×7. On obtient : $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$.

Et pour $\frac{5}{14}$?

$3 \times 5 = 14 + 1$ et, en divisant par 3×14 :

$$\frac{5}{14}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 14}=\frac{1}{3}+\frac{1}{42}.$$

Sur les listes de résultats qui ont été découvertes, l'inverse est noté par ○ au-dessus du nombre. Et bien entendu, la graphie des entiers est tout autre.

Nous noterons : $(5 \div 14) = \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{42}$

La décomposition n'est pas toujours unique : pour $7 \div 12$, on a :

$2 \times 7 = 12 + 2$ donc, en divisant par 2×12 :

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\times 12} \text{ ou } (7 \div 12) = \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{12}.$$

Mais aussi :

$3 \times 7 = 12 + 9$ et, en divisant par 3×12 :

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{9}{3\times 12} \text{ ou } (7 \div 12) = \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{4}.$$

Cela, les Egyptiens le savaient, il y a maints exemples. En effet, il n'est pas nécessaire que, dans la relation $an = d + b$, a soit le plus petit entier possible.

Mais, dans nos exemples, le produit « ad » est multiple de « b » ce qui n'est pas toujours le cas. Il suffit alors d'itérer le procédé.

Ainsi pour $5 \div 7$ on a :

$2 \times 5 = 7 + 3$ donc $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \times 7} = \frac{1}{2} + \frac{3}{14}$.

Puis $5 \times 3 = 14 + 1$ donc :

$\frac{3}{14} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \times 14} = \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$,

alors : $(5 \div 7) = \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{70}$.

De même pour $7 \div 11$, il vient :

$3 \times 7 = 11 + 10$ donc :

$\frac{7}{11} = \frac{1}{3} + \frac{10}{3 \times 11} = \frac{1}{3} + \frac{10}{33}$.

$4 \times 10 = 33 + 7$ donc :

$\frac{10}{33} = \frac{1}{4} + \frac{7}{4 \times 33} = \frac{1}{4} + \frac{7}{132}$.

$19 \times 7 = 132 + 1$ donc :

$\frac{7}{132} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19 \times 132} = \frac{1}{19} + \frac{1}{2508}$.

Et donc, finalement,

$(7 \div 11) = \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{2508}$.

Cette dernière décomposition nous montre, en outre, que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{19}$ est une valeur approchée par défaut à 4.10^{-4} près de $\frac{7}{11}$.

Des remarques analogues peuvent être faites avec : $(4 \div 7) = \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{14}$

$(4 \div 7) = \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{27} + \overset{\circ}{945}$

Et encore :

$$\begin{aligned}(3 \div 10) &= \overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{20} = \overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{10} = \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{120} \\ &= \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{45} = \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{10} + \overset{\circ}{30} \\ &= \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{11} + \overset{\circ}{24} + \overset{\circ}{1320} \\ &= \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{12} + \overset{\circ}{20} + \ldots \text{etc.}\end{aligned}$$

$(5 \div 9) = \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{13} + \overset{\circ}{410} + \overset{\circ}{335790}$

etc.

Au bout de quarante siècles, l'étude de ce chapitre des mathématiques peut toujours enrichir et être source d'exercices :

- vérification de calculs à la main, à la machine ;
- établissement d'algorithmes, à la main, à la machine. On remarquera que la recherche de « *a* » fait appel à la partie entière du quotient mais il n'est pas nécessaire de la privilégier ;
- ces décompositions permettent de dégager rapidement des valeurs approchées.

Les scribes, serviteurs du Pharaon, étaient sans doute tenus au secret de leurs calculs, utiles à remplir les caisses de l'État. Mais qui dit que d'aucuns n'avaient pas une calculatrice, belle esclave venue d'au-delà de l'Indus, en avance sur eux sur ces