Bravo, Monsieur le Monde !

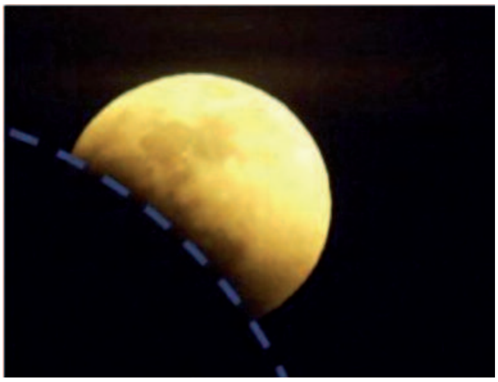
Karim Zayana

Ce texte reprend un exposé donné le 10 mars 2017 au lycée Jean Zay à Paris, dans le cadre du plan national de formation « Construction des croisements didactiques en mathématiques et physique-chimie au collège »

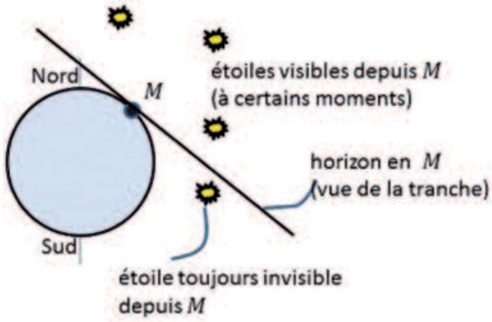
Karim Zayana est Inspecteur Général de l'Éducation nationale, professeur associé à Télécom ParisTech.

La circonférence terrestre ? Comme toute question épistémologique, ce sujet, cité dans les programmes du collège [1], se prête volontiers aux croisements interdisciplinaires, et convoque les cinq domaines du socle. De fait, la mesure d'un méridien à la manière du grec Ératosthène est présentée dans de nombreux ouvrages, revues ou sites de vulgarisation [2-6]. Si efficace qu'elle soit, la démonstration ne doit toutefois pas faire oublier le cheminement scientifique qui l'a précédée, ni la bonne fortune qui l'a jalonnée – il faut en effet toujours un peu de chance à une grande découverte pour éclore, et le consentement de la nature à livrer ses merveilles : *Chapeau Monsieur Le Monde !* [7]. Elle n'occultera pas non plus une des méthodes alternatives, certes davantage calculatoire mais moins abstraite car fondée sur des observations plus tangibles, probablement célèbre elle aussi depuis l'Antiquité.

La Terre est ronde !



La Terre est ronde. L'homme en a pris conscience en contemplant les éclipses de Lune : l'ombre de la Terre sur la Lune est circulaire, notre satellite s'y consomme petit à petit dans sa large morsure. Mais notre planète pouvait encore être plate, comme une immense galette. En chaque point du globe, tout du moins d'une même face, on verrait alors le même ciel. Or les voyageurs comparaient leurs récits. C'était manifeste : au même moment mais selon le lieu, de nuit les constellations changeaient, de jour la course du Soleil variait.

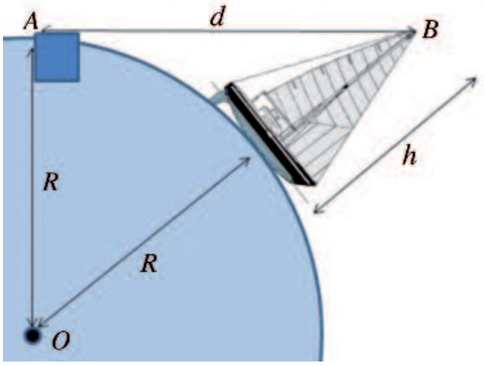


Enfin, il y avait ce mirage, déroutant, et maintes fois rapporté : en s'éloignant vers la haute mer, les navires disparaissent de bas en haut, comme s'ils coulaient. Et pour cause, ils s'enfoncent sous la ligne d'horizon. Écoutons Marguerite Duras nous le conter dans *L'amant*. Lui : l'amant de la Chine du Nord. Sur le quai, à côté de la foule, dans sa grande automobile noire. À travers la vitre, comme suspendu, il la suit des yeux. Elle : la narratrice, accoudée au bastingage du paquebot qui retourne en Europe. Elle retient ses larmes. Trois grands coups de sirène, autant d'adieux ; elle pleure en secret. Ils se regardent, encore, encore, encore. « Beaucoup de gens restaient là à le *(bateau)* regarder, à faire des signes de plus en plus ralentis, de plus en plus découragés, avec leurs écharpes, leurs mouchoirs. Et puis, à la fin, **la terre emportait la forme du bateau dans sa courbure**. Par temps clair on le voyait lentement **sombrer** » [8]. Poétique, poignante[2], la scène que dépeint l'écrivain s'accorde avec le modèle d'une Terre ronde, expliquant pourquoi la vue qui porte habituellement à une cinquantaine de kilomètres perd l'embarcation prématurément (une quinzaine de kilomètres en pratique) et dans ces conditions.

Au contour circulaire, volumineuse, la Terre pourrait être un disque enflé, disons une ellipsoïde. Si ! C'est le cas : elle est aplatie aux pôles et ventrue le long de l'équateur, conséquence de sa rotation autour de l'axe Nord-Sud et de la force centrifuge qui en découle. En ont attesté des arpentages très précis réalisés à l'initiative de notre académie des sciences en Laponie (près du pôle Nord) et au Pérou (près de l'équateur) au cours du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Puis, plus tard bien entendu, des images satellites. Mais revenons à l'Antiquité. Vers 500 avant Jésus-Christ, et donc *après* Thalès (600 avant J.-C.), on se fait ainsi à l'idée que la Terre n'est pas plate, et plutôt sphérique. L'enjeu consistait dès lors à en mesurer le rayon, ou le périmètre d'un grand cercle. Pas plus qu'on ne forera la planète de part en part, on n'en fera le tour complet à pied une règle à la main. Des moyens plus pratiques ont donc été imaginés.

Quand Pythagore et Thalès s'en mêlent

L'approche la plus pragmatique, abordable au cycle 4, n'est pas due à Ératosthène. Nommons d la distance de l'amant au point culminant du bateau quand l'extrémité du mât (ou des cheminées) va disparaître, h la hauteur du bâtiment, R le rayon de la Terre.



La coupe réalisée met en évidence un triangle rectangle, le théorème de Pythagore (500 avant J.-C) s'y applique :

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2$$

Puis, après simplification,

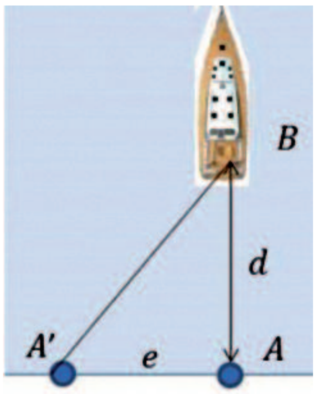
$$h\,(h + 2R) = d^2$$

Les grecs avaient du bon sens : $h << R$ et donc, tout en délicatesse

$$2hR = d^2$$

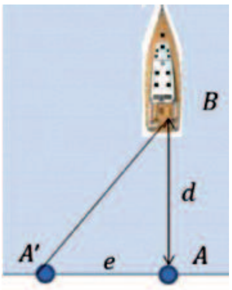
Il suit $R = d^2/2h$.

Évidemment h est connu, disons 20 mètres[3]. Il n'est pas question d'aller mesurer d à la nage, on l'obtient par triangulation. Pour cela, on place à côté de l'amant A un amer A', c'est-à-dire un point de référence sur la côte.



[2] La vie les séparera à tout jamais : ils ne se reverront pas.

[3] L'unité choisie, le mètre, est anachronique mais bien commode



On mesure l'écartement *AA'* = *e*. On relève par visée les angles du triangle dont l'amant *A*, l'amer *A'* et le bateau *B* sont les sommets (deux angles suffisent, les deux qui sont bordés par la plage : $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$; typiquement $\widehat{A}$ est droit sans que cela soit impératif non plus).

On reproduit à petite échelle la situation, on y mesure la longueur *d* en réduction. On la dilate du coefficient de proportionnalité ad-hoc, à savoir $e/e_{\text{réduit}}$: le théorème de Thalès fait son œuvre. Avec soin, on déterminerait ici *d* =15,8 km, d'où en bonne approximation *R* = 6300 km.

Inversement, Marguerite Duras verra l'amant jusqu'à la distance de 15,8 km à condition de monter tout en haut du navire. On comprend l'intérêt de poster une vigie sur la hune d'un grand voilier.

Le nid de pie de l'Hermione

Rotondité du globe oblige, c'est ce guetteur qui verra le premier la Terre ferme, un récif, les secours… ou les pirates !

Le trajet de l'amant *A* vers l'amer *A'* est courbe en vérité. Pour limiter cet effet, et le biais qu'il induit, on choisit *A'* proche de *A*, de l'ordre du kilomètre. Aussi les droites (*AB*) et (*A'B*) sont-elles presque parallèles. Une incorrection des mesures d'angle fausserait considérablement la localisation du point *B*, donc la distance *d*, et par ricochet le rayon *R*.

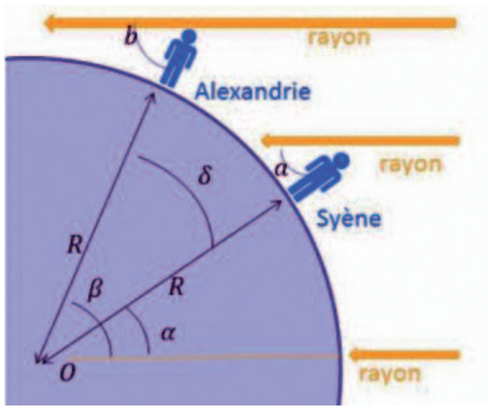
Les grecs maîtrisaient les raisonnements ci-dessus ; ils connaissaient le degré (et donc la division en 360 du cercle, la base 60 ayant été préférée à la base 10 pour ses nombreux diviseurs) ; mais ils n'avaient pas encore d'instruments assez précis. S'il a été appliqué dans l'Antiquité, et cela est très vraisemblable, ce procédé n'a sans doute pas fourni des résultats satisfaisants. L'heure d'Ératosthène a sonné.

Avec Thalès seul : Ératosthène

Ératosthène (200 avant J.-C.) a dirigé la grande bibliothèque d'Alexandrie. Célèbre pour son crible des nombres premiers, il est aussi l'auteur d'une méthode fiable de la mesure du méridien terrestre. Ses travaux furent consignés dans un ouvrage disparu prématurément [9]. Plusieurs savants, tels le grec Cléomède (100 avant J.-C.) ou le latin Vitruve (100 avant J.-C.), en ont cependant attesté dans leurs écrits et pour la postérité.

Dans son principe, la méthode est d'une simplicité enfantine. On mesure la distance entre Syène, l'actuelle Assouan (en haute Égypte), et Alexandrie (en basse Égypte) : 800 kilomètres. Ce parcours représente le cinquantième d'un méridien terrestre (7,2°). La circonférence est donc cinquante fois plus grande : 40 000 km, c'est une règle de trois.

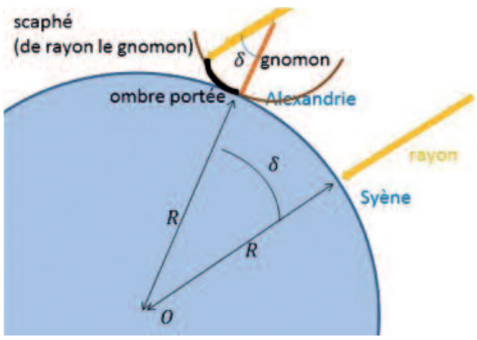
On a mesuré ces 800 kilomètres à la marche. Quid des angles ? À midi, quand le Soleil culmine, ses rayons, Syène et Alexandrie, ainsi que le centre de la Terre sont coplanaires. Si la distance zénithale[4]



[4] Angle que forment les rayons du soleil avec la verticale, complémentaire de la hauteur qui est l'angle des rayons du Soleil avec l'horizon.

du Soleil change de 7,2° d'une ville à l'autre, l'arc δ entre les deux en vaut autant. En effet, $\delta = \beta - \alpha = b - a$ car $\alpha = a$ et $\beta = b$ (angles alternes-internes). On ne mesurait pas les hauteurs en visant le soleil, cela fait mal aux yeux. Habilement, on utilisait l'ombre frappant le sol pour reconstituer le bon secteur angulaire. Et on remplaçait l'observateur par un gnomon, à savoir un piquet planté d'aplomb.

Quelques raffinements ont pu être apportés au calcul de δ par Ératosthène lui-même, [10]. Par une heureuse coïncidence, Syène est située près du tropique du Cancer. Au solstice d'été, à midi, le Soleil y atteint le zénith. À la verticale du gnomon, il le prive de son ombre : $a = 0$ d'où $\delta = b$. Enfin, on gagne à projeter le gnomon non pas sur un plan, mais sur un cadran hémisphérique gradué en degrés, appelé aussi scaphé. L'arc sombre qui s'y dessine est alors semblable à la portion terrestre reliant Syène et Alexandrie, ce qui fournit δ sans détour.



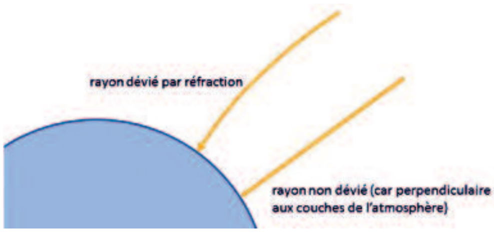
Au fait, où se cache le théorème de Thalès ?

Obstacles théoriques et didactiques

Inoffensive en apparence, l'expérience d'Ératosthène est un casse-tête théorique et didactique.

Le procédé est abstrait. Il est malaisé à représenter sur un croquis, les proportions des objets ne pouvant être conservées. Il est peu accessible aux sens (on ne regarde *jamais* directement le soleil). Il est dépendant de la météo : que le ciel se voile et tout est à refaire ! Il exige un don d'ubiquité (donc deux observateurs) : se trouver au même moment – idéalement un 21 juin – à plusieurs centaines de kilomètres l'un de l'autre, dont un sous les tropiques. Certes on pourrait faire les mesures ailleurs qu'en Égypte, par exemple en Angleterre, et un autre jour qu'au début de l'été. Sur le papier seulement.

On sait aujourd'hui que cela fonctionnerait moins : plus ils sont rasants, plus les rayons du soleil sont déviés lors de leur traversée des couches de l'atmosphère (par réfraction) : Ératosthène se trouvait donc au bon endroit au bon moment. Ardent, le soleil d'Égypte l'aura également bien aidé.



Ce n'est pas tout. La méthode cache d'autres implicites, plus ou moins épineux ; demande (et apporte) une culture astronomique certaine ; nécessite une bonne vision dans l'espace bien qu'au final tout se conclut dans le plan.

Pourquoi Syène et Alexandrie sont-ils sur un même méridien ? On n'avait pas de boussole[5] à l'époque pour s'orienter, ni de montre de précision pour déterminer

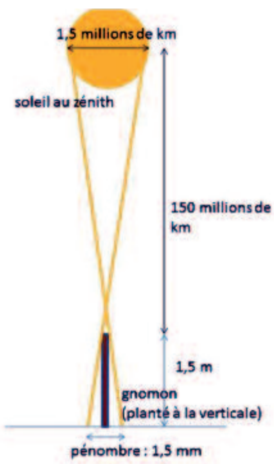
[5] L'objet viendrait de Chine, vers l'an mille après J.-C.

les longitudes[6], encore moins de GPS[7]. C'est l'observation des astres qui aura guidé les voyageurs. Par exemple à midi, le soleil indique l'axe Nord-Sud. On relève donc son cap à ce moment précis. Encore faut-il un horizon, donc pas trop de relief autour, et un point de repère à prendre au bout. Par chance, le Nil coule dans cet axe. En dépit de ses quelques méandres, il indiquait alors la direction à suivre. De ce fait Syène s'est placée (presque) pile au sud d'Alexandrie.

[6] Le bureau des longitudes a vu le jour en France en 1795.

[7] Premier système opérationnel en 1995, organisé autour de 24 satellites.

L'horizon ne doit pas être confondu avec le plan du sol, qui peut être localement bosselé. L'horizon est le plan tangent à un globe idéalement sphérique. On peut le considérer perpendiculaire à la verticale que pointe un fil à plomb.



Le soleil n'est pas exactement une source lumineuse ponctuelle. Les ombres ne se découpent donc pas nettement. Leur bord, flou, dessine une frange appelée pénombre. Celle-ci demeure quand bien même l'ombre disparaîtrait. Voilà qui brouille les mesures légèrement, de l'ordre d'un demi-degré : une chance que le soleil soit beaucoup plus loin qu'il n'est large[8] !

L'écartement de 800 km entre Syène et Alexandrie est une bagatelle, comparée au trajet Soleil-Terre. L'imprécision induite est cette fois de l'ordre du dixième de seconde[9]. D'où le parallélisme assumé des rayons lumineux.

[8] Ces distances astronomiques n'ont été établies qu'au XVIIème siècle.

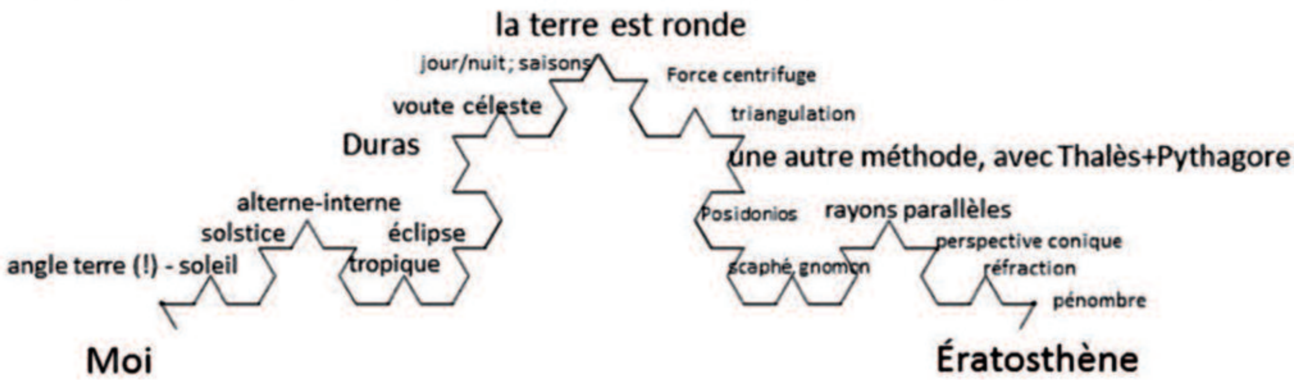
[9] Une seconde d'arc = 1/60 de minute, une minute = 1/60 de degré.

Notons combien ce résultat est contre-intuitif : ainsi le faisceau des rayons filtrant à travers un nuage nous semble-t-il divergeant.

Effet de perspective trompeur puisqu'au même titre, les rails d'une voie ferrée se rejoindront à l'infini.

Depuis son paradis, Ératosthène défend bien ses secrets. Fruit du génie et du hasard, sa méthode ne se conquiert pas sans effort. Soit. Maintenant, comment l'enseigner ? D'abord, en ayant soi-même les idées claires. Cela peut prendre plusieurs heures, voire quelques jours. On se documente, on interroge, on s'inscrit à un atelier d'astronomie [11], on rebondit sur d'autres sujets comme cette troisième solution attribuée au grec Posidonios (- 100 avant J.-C. ; méthode fondée sur l'observation d'une étoile, Canopus, la nuit)… Une fois devant sa classe, on brosse le contexte, le principe, quelques détails, un zeste d'étymologie (gnomon-gnome-gnomonique ; scaphé-scaphandre), quelques calculs, quitte à revenir plus tard (ou jamais) sur des finesses moins évidentes qu'on ne soulèvera donc que du bout des lèvres. On désamorce deux-trois idées reçues. On apporte une mappemonde, une maquette de bateau. Une vingtaine de minutes sur chaque méthode suffit. Un élève peut venir au tableau pour développer un calcul. Ou pour faire un dessin, et il faut en faire et en faire faire beaucoup : il s'agit de géométrie après tout ! En guise de complément, on conseillera des références ou des capsules vidéo disponibles au CDI ou sur la toile mais qui ne sauraient se substituer à la classe. Certains points délicats peuvent échapper à la compréhension des élèves de prime abord ? Je ne crois pas cela trop grave du moment que l'évaluation ne les met pas en première ligne. Nous, adultes, les rassurerons dans ce sens : l'élève les reprendra à tête reposée, ou la fois suivante, ou l'année suivante avec un autre professeur.

Ératosthène n'est qu'un exemple. Il y a un côté fractal, récursif façon flocon de von Koch, dans l'acquisition des connaissances. On veut aller d'un point A à un point B. Cela oblige ou incite à un détour. Chemin faisant, on se dit donc qu'il faudra visiter le point C. Si on a le temps et qu'on se sent les forces, on le fait tout de suite. Sinon, on met en réserve dans sa mémoire. Au moment de repenser au point C, le processus s'itère et la carte mentale se dentelle.



[1] Bulletin Officiel n°11 du 26 novembre 2015.
[2] *Mathématiques de la planète Terre*, tangente n°151, 2013.
[3] *Mais qui a attrapé le bison de Higgs ?*, David Louapre, Flammarion, 2016.
[4] Blog *Physique et Mathématiques* d'Alexandre Moatti.
[5] Chaîne *e-penser* de Bruce Benamran.
[6] Chaîne *Science for All* de Lê Nguyên Hoang.
[7] *Bravo Monsieur Le Monde !*, Fugain et le Big Bazar, CBS, 1973.
[8] *L'amant*, Marguerite Duras, éditions de Minuit, 1984.
[9] *Sur la mesure de la Terre,* Ératosthène, vers 200 avant Jésus Christ.
[10] *Quelques éléments didactiques et théoriques sur l'expérience d'Ératosthène,* Nicolas Decamp et Cécile de Hosson, bulletin de l'union des professeurs de physique et de chimie, 2011.
[11] *Palais de la Découverte*, *Observatoire de Paris, projet Eu-HOU,* etc.

Photographiques : d'après Europe 1 (éclipse) ; Google Earth (carte) ; CNRS (nuage et lumière)