François Viète, un juriste mathématicien, le créateur de l'algèbre littérale

Jean-Paul Guichard

Notre collègue Jean-Paul Guichard, qui a collaboré à l'ouvrage « François Viète : un mathématicien sous la Renaissance » (Vuibert) a bien voulu nous dresser ce « hors d'œuvre » à l'intention de ceux qui viendront vivre les journées de Nantes.

Frontispice de la traduction en français par Vasset de l'Algèbre nouvelle de Viète (1630).
Le personnage de gauche représente Apollonius, et celui de droite Viète, l'Apollonius français, celui qui a résolu le problème des quatre cercles tangents qu'évoque la figure sous ses pieds.
Viète tient dans sa main gauche un bandeau sur lequel est écrit B + D, symbolisant sa création du calcul littéral.

Aux Marais des Iles de Monts, la seconde année du règne de notre très chrétien et très auguste roi, Henri IIII. Ainsi s'achève la dédicace à Catherine de Parthenay, qui précède l'*Introduction à l'Art Analytique* de Viète. C'est donc à une soixantaine de kilomètres au sud-ouest de Nantes, tout près de Beauvoir-sur-Mer, où il possède une résidence secondaire, que François Viète met la dernière main à son texte fondateur de l'algèbre littérale. Il a 51 ans. C'est un juriste, avocat à 21 ans, conseiller au parlement de Bretagne et conseiller privé du roi depuis 1574, puis maitre des requêtes (charge à vie, au service exclusif du roi) à partir de 1580, mais aussi amateur de mathématiques : *Moi qui ne fais pas profession de mathématicien, mais que l'étude des Mathématiques charme,* *quand j'ai du temps libre*. Du temps libre il en eut quelques années auparavant, car il fut éloigné de la cour du roi Henri III de 1585 à 1589 sous la pression de la Ligue. Il rejoint alors son Poitou natal et y rédige son projet d'une Algèbre nouvelle : *L'art que je produis aujourd'hui est un art nouveau*.

L'Algèbre nouvelle de Viète

L'ouvrage publié à Tours en 1591, en latin, a pour titre *Introduction à l'Art analytique.* Mais en première page figure le plan de l'ouvrage complet envisagé par Viète, dénommé *Ouvrage d'analyse mathématique restituée* ou *Algèbre nouvelle*, en dix traités, dont l'*Introduction* en est le manifeste et le premier traité. Ces dix traités de l'Algèbre nouvelle n'ont pas été édités dans l'ordre indiqué, certains l'ont été après la mort de Viète ou pas du tout.

En quoi cet *Art analytique* est-il novateur, voire révolutionnaire ? Suivons ce qu'en dit Viète lui-même.

Quel est cet Art ? *La science de bien trouver dans les mathématiques*.

Quel est son but ? *L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème*.

Quel est l'outil qui va permettre de mettre en œuvre la méthode ? Une invention nouvelle : « la logistique spécieuse », c'est-à-dire un calcul sur des symboles, et de fait un calcul littéral. *La forme sous laquelle on doit aborder la recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une logistique nouvelle [...]. Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet.* Logistique est le mot savant, d'origine grecque, pour dire calcul.

C'est donc une nouvelle algèbre que Viète met en place : une algèbre entièrement littérale qui permet de calculer sur n'importe quel type de grandeur, en particulier sur les grandeurs géométriques, permettant ainsi de résoudre par le calcul des problèmes de géométrie.

Voici sa démarche, telle qu'il la décrit.

- Écrire avec des lettres les relations entre les grandeurs du problème : les grandeurs cherchées avec la lettre A ou toute autre voyelle E, I, O, U, Y, les grandeurs données avec les lettres B, C, D ou d'autres consonnes.

  Exemple : trouver deux nombres connaissant leur somme et leur différence (*Zététiques I 1*).

  Viète note *A + E aequatur B* et *A – E aequatur D* ce que nous notons maintenant, à la suite de Descartes, $x + y = a$ et $x - y = b$.

- Respecter la loi des homogènes, c'est-à-dire la dimension des grandeurs. Dimension 2 : A carré, B plan ; dimension 3 : E cube, F solide…

  Exemple : trouver les deux côtés d'un rectangle connaissant son aire et la différence des carrés des côtés (*Zététiques II 9*).

  Viète note *A in E aequatur B plano* et *A quadratum – E quadratum aequatur D plano* ce que nous notons maintenant $xy = a$ et $x^2 - y^2 = b$.

- Extraire les grandeurs inconnues des grandeurs données : pour cela, on apprend à transformer les équations pour pouvoir les résoudre grâce à des formules littérales préétablies.

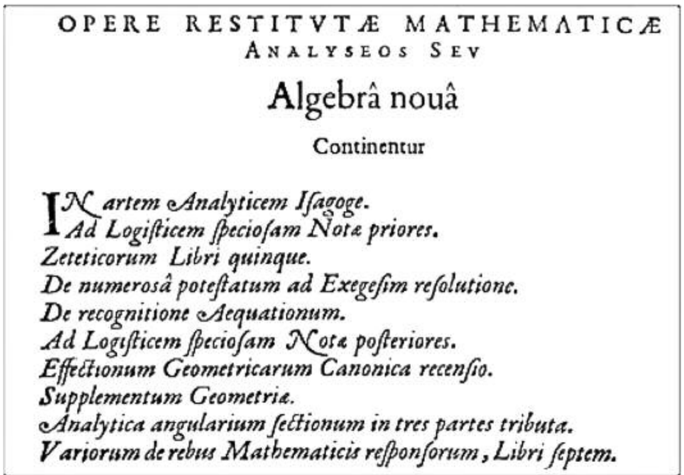
  Exemple : résolution de l'équation $x^2 - 2ax = b$.

  Donnons-en l'idée générale.

NDLR : Le terme zététique fut introduit par Viète pour décrire l'art de modéliser un problème géométrique sous forme algébrisée. Il resta peu utilisé par la suite.

La forme du premier membre de l'équation, début du développement d'une identité connue, $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$, suggère à Viète un changement d'inconnue, $y = x - a$, qui lui permet de ramener l'équation à la forme canonique $y^2 = b + a^2$, dont la solution est connue, ce qui lui donne l'expression littérale de la solution (positive) de l'équation de départ.

- Appliquer à un problème particulier : c'est la dernière étape de la méthode. Une fois la formule générale obtenue, on remplace les lettres par les nombres du problème particulier que l'on a à résoudre. Pour l'application numérique, Viète utilise d'autres notations, pour relier son algèbre nouvelle à l'ancienne : les notations *cossiques* de l'algèbre « numéreuse », c'est-à-dire celles des analystes anciens.


OPERE RESTITVTÆ MATHEMATICÆ
ANALYSEOS SEV
Algebrâ nouâ
Continentur

IN artem Analyticem Iſagoge.
Ad Logiſticem ſpecioſam Notæ priores.
Zeteticorum Libri quinque.
De numeroſâ poteſtatum ad Exegeſim reſolutione.
De recognitione Aequationum.
Ad Logiſticem ſpecioſam Notæ poſteriores.
Effectionum Geometricarum Canonica recenſio.
Supplementum Geometriæ.
Analytica angularium ſectionum in tres partes tributa.
Variorum de rebus Mathematicis reſponſorum, Libri ſeptem.

Pour prendre toute la mesure de l'innovation apportée par Viète, il faut comparer la méthode littérale de Viète avec les méthodes « numéreuses » de ses contemporains, héritées des Arabes, par exemple celles de Jacques Peletier du Mans.

Quels sont les grands apports de la nouvelle algèbre ?

- La possibilité d'écrire des formules. Ceci va permettre, avec les améliorations du symbolisme apportées ensuite par Descartes, un progrès fulgurant des mathématiques, et des sciences physiques et mécaniques. On a du mal à imaginer comment les contemporains et les prédécesseurs de Viète pouvaient faire pour exprimer des relations entre grandeurs : il fallait passer par la géométrie. Il suffit de lire la loi de la chute des corps par Galilée (1638) pour se convaincre du tournant qui va s'opérer en un demi-siècle.

- La conséquence de l'utilisation de formules littérales est la possibilité de trouver de nouveaux théorèmes. C'est ainsi que Viète découvre les liens entre les racines et les coefficients d'une équation.

- Enfin, c'est la possibilité ouverte de résoudre des problèmes généraux par le calcul alors qu'auparavant, seule la géométrie et le raisonnement permettaient de traiter les problèmes dans toute leur généralité. Ainsi le célèbre problème de la trisection de l'angle est ramené à la résolution d'une équation du troisième degré : *L'analyste résout les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels tels que le problème mésographique* (duplication du cube)*, la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'Heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations.* Et c'est grâce à cette formulation algébrique que ce problème de la trisection de l'angle et les autres constructions à la règle et au compas restés sans réponse pendant 2000 ans vont trouver leur solution au courant du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est aussi la clé de la résolution par Viète d'une équation du 45$^{\text{ème}}$ degré posée par Adrien Romain, en 1594, à tous les mathématiciens de la Terre : il a vu que cette équation équivalait au partage d'un angle en 45 parties égales opéré en trois étapes (en trois parties, puis chacune des trois en trois, et enfin chacune des neuf en cinq).

Il faudra une quarantaine d'années pour que les savants s'approprient ce nouveau calcul, mais alors les progrès vont être très rapides : création du calcul différentiel et intégral, développements en séries, résolution de problèmes d'optique, de cinématique et de dynamique.

Les autres travaux de Viète

Les œuvres de Viète, écrites en latin émaillé de grec, sont d'un accès difficile, et il y a peu de choses traduites en français. Viète est cependant connu :
- en astronomie pour son *Canon mathématique*, un recueil de tables trigonométriques très précises, utilisant les nombres décimaux, avec le mode de fabrication (ouvrage plusieurs fois réédité)
- en cryptographie, pour avoir déchiffré des lettres secrètes entre les Espagnols et la Ligue qui menaçaient la royauté, lettres dont le code était réputé inviolable ;
- dans l'histoire du nombre π, pour avoir donné une approximation de π, pour la première fois, à partir d'un produit infini ;
- en algorithmique, pour ses techniques de résolution numérique des équations ;
- en géométrie pour avoir reconstruit la solution perdue d'un problème d'Apollonius : construire un cercle tangent à trois cercles donnés ;
- en algèbre pour avoir explicité les relations entre les coefficients d'une équation polynôme et ses racines.

Par contre, on connaît moins ce qu'il considérait comme une de ses plus merveilleuses découvertes : *le mystère des sections angulaires, que personne jusqu'à présent n'a connu* (les formules et les équations permettant de couper un angle en n parties égales).

Quelques problèmes pour nos élèves

Établir les règles suivantes énoncées et démontrées par Viète.

1. Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme ; si on l'enlève à la somme de leurs carrés, on obtient le carré de leur différence.

2. Le carré de la somme de deux nombres, ajouté au carré de leur différence est égal au double de la somme de leurs carrés.

3. Le carré de la somme de deux nombres, diminué du carré de leur différence est égal à quatre fois leur produit.

4. Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la différence des nombres, on obtient leur somme.

5. Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence.

Utiliser ces règles pour résoudre, comme l'a fait Viète dans le livre 2 de ses Recherches (Zététiques), les systèmes de deux équations à deux inconnues suivants, en les ramenant à la recherche de la somme et du produit de deux nombres.

1) $xy = 20$ et $x^2 + y^2 = 104$.
2) $xy = 20$ et $x - y = 8$.
3) $x - y = 8$ et $x^2 + y^2 = 104$.
4) $x + y = 12$ et $x^2 + y^2 = 104$.
5) $x - y = 8$ et $x^2 - y^2 = 96$.
6) $x + y = 12$ et $x^2 - y^2 = 96$.
7) $xy = 20$ et $x^2 - y^2 = 96$.
8) $xy + x^2 + y^2 = 124$ et $x + y = 12$.
9) $x^3 - y^3 = 316$ et $x^3 + y^3 = 370$.
10) $x^3 - y^3 = 316$ et $xy = 1$.
11) $x - y = 6$ et $x^3 - y^3 = 504$
12) $(x - y)(x^2 - y^2) = 32$ et $(x + y)(x^2 + y^2) = 272$.
13) $x^2 + y^2 = 20$ et $\dfrac{xy}{(x-y)^2} = 2$.
14) $x^2 + y^2 = 20$ et $\dfrac{xy}{(x-y)^2} = 1$.

Dans le livre 3 de ses Recherches (Zététiques), Viète applique son calcul avec des lettres pour trouver des formules sur les triangles rectangles. Retrouver ces formules.

1. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouver cet autre côté et l'hypoténuse.
Application numérique : 5 et 1

2. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouver cet autre côté et l'hypoténuse.
Application numérique : 5 et 25

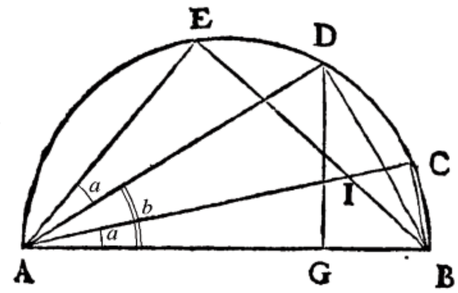
3. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouver les côtés de l'angle droit.
Application numérique : 13 et 7.

4. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouver les côtés de l'angle droit.
Application numérique : 13 et 7.

Un problème pour nos lecteurs

Sauriez-vous démontrer les formules d'addition à partir de la figure de Viète (Analyse des sections angulaires) ?

Viète trace 3 triangles rectangles dont l'angle aigu du premier ajouté à celui du second est égal à celui du troisième.
I est le point d'intersection de EB et de AC, et DG la perpendiculaire au diamètre AB.



Il démontre que :
1) le rapport de EB à AB est égal à celui de AD×CB+DB×AC à AB au carré ;
2) le rapport de AE à AB est égal à celui de AD×AC-CB×DB à AB au carré.

C'est-à-dire avec nos notations :
1) $\sin(a+b) = \cos b \sin a + \sin b \cos a$;
2) $\cos(a+b) = \cos b \cos a - \sin a \sin b$;
en notant *a* l'angle BAC et *b* l'angle BAD.

Quelques indications.

1) Il établit l'égalité :
AB×EB=AD×CB+DB×AC,
puis divise par AB au carré.
Pour cela, il décompose EB et AB en utilisant les points I et G.
Il utilise les triangles rectangles semblables de la figure ayant l'angle *b* en commun (AGD et CIB, GDB et CIB, ABD et AIE), en transformant des égalités de rapports en égalités de produits qu'il substitue dans la décomposition de EB×AB.

2) Il part de l'égalité AB×AE=AD×AI (triangles ABD et AEI), de AI=AC-IC, et conclut avec AD×IC=DB×CB (triangles ADB et ICB).

Bibliographie
François Viète, *Introduction à l'Art Analytique*, texte latin et traduction en français de François Ritter, Cahiers François Viète n°7, Centre François Viète, Université de Nantes, 2004.
Évelyne Barbin & Anne Boyé (dir.), *François Viète : un mathématicien sous la Renaissance,* Paris, Vuibert, 2005.
Jean-Paul Guichard, *D'un problème de Diophante aux identités remarquables*, Repères-IREM, N°53, 2003, p. 5-19 (en ligne).
Voir aussi l'article *François Viète* sur le Portail des IREM (CII Epistémologie et Histoire des mathématiques, rubrique Ressources, Les mathématiciens : les grands textes) et celui sur Wikipédia (très complet et de grande qualité).