Découper au laser son tapis de Sierpiński

Aurélien Alvarez

Aurélien Alvarez est enseignant-chercheur, co-auteur avec Éienne Ghys et Jos Leys des films « Dimensions » et « Chaos ». Ce qui suit est un extrait d'un article qu'il a publié sur le site Image des maths. Nous ne saurions trop vous recommander de vous référer à la version en ligne, qui permet un accès direct à divers niveaux d'approfondissement, via des liens hypertextes. Mais PLOT a jugé que publier ce raccourci papier, avec l'aimable autorisation de l'auteur, serait utile pour susciter votre curiosité et vous donner envie d'en savoir davantage.

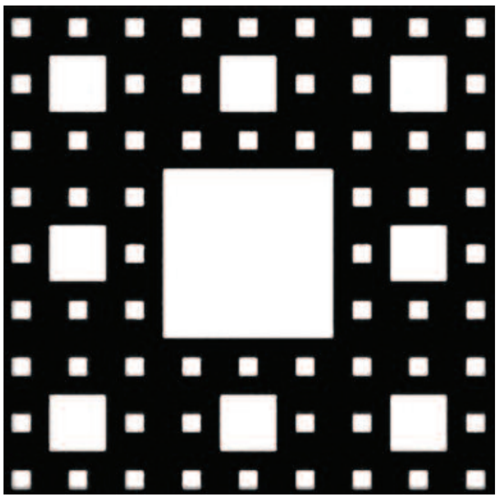
En 2018 ouvrira le grand musée égyptien du Caire. Les pharaons du Caire pourront bientôt contempler le triangle de Sierpiński puisque les architectes du futur « grand musée égyptien » ont conçu une façade imposante qui en reprend le motif principal.

Vue d'artiste du futur musée. Image tirée du site web du cabinet d'architectes « heneghan peng architects ».

Le héros de cet article sera non pas le triangle de Sierpiński mais le tapis de Sierpiński, dans des dimensions beaucoup plus raisonnables, qui plus est. Les constructions du triangle et du tapis s'appuient sur les mêmes idées ; dans le premier cas on part d'un triangle équilatéral, dans le second d'un carré. Si on veut fabriquer le triangle de Sierpiński dans un matériau réel, on rencontre un problème de fragilité : une fois le triangle central retiré, les trois petits triangles restant ne tiennent plus entre eux que par les sommets. Pour ce que nous souhaitons faire, il nous faut donc quelque chose d'un peu plus « robuste » comme le tapis.

Le tapis de Sierpiński

Ce tapis doit son nom au mathématicien polonais Wacław Sierpiński. Davantage encore qu'un tapis, il s'agit surtout d'une fractale que l'on obtient à partir d'un carré que l'on subdivise en neuf carrés avant de supprimer le carré central. Et on recommence la même procédure sur chacun des huit petits carrés restants. Voici les premières étapes de cette construction qui date de 1916.

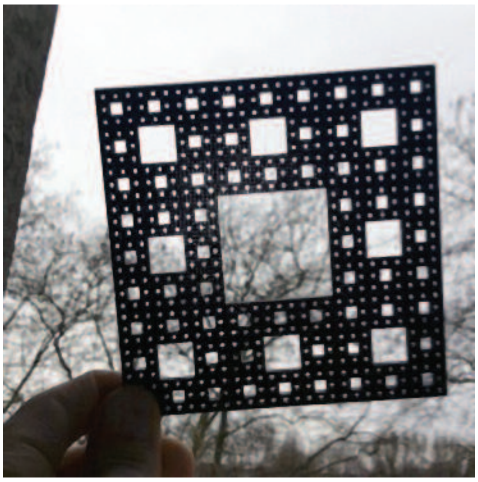


Dans mon université, nous avons la chance de disposer d'un FabLab*, le FabLab orléanais. On y trouve plein de machines diverses et variées, comme des imprimantes 3D bien sûr mais aussi une découpe laser, répondant au doux nom de TROTEC SPEEDY 400 ; cette dernière permet de faire de la gravure et de découper des pièces de bois ou de plastique (PMMA) de moins de 10 mm d'épaisseur.

C'est exactement ce qu'il nous fallait pour fabriquer notre propre tapis de Sierpiński !

Mon laboratoire accueille régulièrement des collégiens de 3ème qui viennent faire un stage d'une semaine. Ils y découvrent un peu le monde de la recherche et certains chercheurs n'hésitent pas à prendre le temps de raconter un peu de science à ces jeunes plutôt motivés.

C'est donc avec l'aide d'un collégien venu faire son stage récemment que nous nous sommes attelés à la tâche de fabriquer notre tapis ! Voici le résultat.



Le « vrai » tapis de Sierpiński, c'est l'objet limite, celui qu'on obtient quand on itère indéfiniment la procédure de découper chaque carré en neuf carrés plus petits avant de supprimer le carré central. Mais dans la réalité, on s'arrête au bout d'un certain nombre d'étapes.

Quand j'ai montré notre tapis à un collègue au retour du FabLab et qu'il l'a pris dans ses mains, celui-ci m'a de suite dit : « je vois bien que vous n'êtes pas allés jusqu'à l'infini, sinon ton tapis serait de masse nulle ! ». On voit effectivement sur l'image cinq tailles de trou. Quant à la boutade de notre ami mathématicien, elle sera démystifiée dans les prochaines lignes...

Comment fabriquer un tel tapis en pratique ?

La première étape, c'est de générer l'image du tapis, du moins une approximation à l'ordre n. Nous allons donc écrire une fonction qui, étant donné un carré de côté L, retourne les neuf petits carrés de côté L/3. Pour cela, repérons un carré par la donnée des coordonnées de son coin supérieur gauche et de la longueur de ses côtés. L'axe des abscisses ira comme d'habitude de gauche à droite mais l'axe des ordonnées de haut en bas, de sorte que nous ne travaillerons qu'avec des coordonnées positives ; le coin supérieur gauche du carré initial aura pour coordonnées le couple (0,0).

On aurait aussi pu partir du coin inférieur gauche et garder l'axe des ordonnées orienté vers le haut comme d'habitude. C'est un choix.

** NDLR : FabLab est la contraction de l'anglais fabrication laboratory (laboratoire de fabrication). C'est un lieu ouvert au public où il est mis à sa disposition toutes sortes d'outils, notamment des machines-outils pilotées par ordinateur, pour la conception et la réalisation d'objets. La caractéristique principale des FabLabs est leur « ouverture ». Ils s'adressent à tous, entrepreneurs, designers, artistes, bricoleurs, étudiants quels que soient leur âge, profession, formation. Ce lieu permet de passer de la phase de concept à la phase de mise au point grâce aux matériels fournis et aux rencontres sur place. Ces FabLabs constituent aussi des espaces de rencontre et de création collaborative.*

Puisque nous le supposerons de taille 1 par convention, on notera donc [0,0,1] le carré initial. Après la première itération, nous obtiendrons les huit petits carrés positionnés ainsi :

- trois sur la première ligne :
  a = [0,0,1/3], b = [1/3,0,1/3],
  c = [2/3,0,1/3],
- deux sur la deuxième ligne :
  d = [0,1/3,1/3], e = [2/3,1/3,1/3],
- trois sur la dernière ligne :
  f = [0,2/3,1/3], g = [1/3,2/3,1/3],
  h = [2/3,2/3,1/3]
- et le trou central sur la deuxième ligne :
  t = [1/3,1/3,1/3].

Il suffit donc à chaque étape de stocker la liste des petits carrés et celle des trous, comme ci-dessus. On itère alors notre fonction sur chaque petit carré nouvellement créé de la liste des petits carrés, etc. Dernière étape : disposant de la liste des trous jusqu'à l'ordre n, il ne reste plus qu'à créer une image en partant d'un carré noir et en dessinant un carré blanc pour chacun des trous de notre liste.*

** Le programme en Python est accessible via le site Image des maths*

L'ultime étape, c'est de transmettre ce fichier à la découpe laser. Pour cela, il y a un dernier travail à faire pour expliquer au logiciel de la machine où découper : dans notre cas, c'est facile puisque c'est précisément sur les bords des carrés blancs. On ajuste également quelques paramètres du laser (vitesse, puissance du faisceau selon la matière, etc.) et c'est parti ! Regarder la machine travailler est assez spectaculaire (au moins la première fois qu'on la voit !) de par la rapidité d'exécution et la précision du déplacement du laser. Un très bel outil, relativement simple à utiliser au final.

Quelques mots de plus sur ce tapis

Quelle est l'aire du tapis ? Le carré initial était d'aire 1×1=1. Après la première itération, son aire a été multipliée par 8/9 puisque nous avons gardé 8 des 9 petits carrés. Plus généralement, à chaque étape, on multiplie l'aire par 8/9 pour chaque petit carré, donc pour l'objet global. L'aire à l'étape n est donc de $(8/9)^n$. Quand n tend vers l'infini, cette aire tend vers 0. Et si le tapis de Sierpiński est d'aire nulle, sa masse aussi !

Les mathématiciens attribuent à cet objet d'aire nulle une dimension fractale qu'on appelle aussi dimension de Hausdorff. Sans rentrer dans les détails car c'est une notion assez subtile à définir, la dimension du tapis de Sierpiński est de log8/log3, ce qui reflète le fait qu'à chaque étape, on construit huit répliques de la figure précédente, chacune étant trois fois plus petite que la précédente. Soit une dimension d'environ 1,89... Une dimension non entière donc ! Mais proche de 2 tout de même. Et 2, c'est la dimension du plan ou de la surface de la Terre. Comme quoi, bien que d'aire nulle, le tapis n'est pas si loin que ça d'être une surface...

Quant à la généralisation en dimension 3 du tapis, c'est la courbe (on parle encore d'éponge) de Menger que l'on peut aussi fabriquer pour de vrai !