À propos de l'erreur en mathématiques

Daniel Perrin

*Daniel Perrin a enseigné à l'université Paris-Sud (Orsay) et à l'ÉSPÉ (ex-IUFM) de l'académie de Versailles. Son domaine de recherche est la géométrie algébrique. Pendant 40 ans, il s'est occupé de formation des maîtres : préparation à l'agrégation et au CAPES. Il a créé à Orsay une licence pluridisciplinaire pour la formation des futurs professeurs des écoles. Il a publié trois livres : « Géométrie algébrique, une introduction », « Cours d'algèbre » et « Mathématiques d'École ». Son prochain ouvrage dont le titre devrait être « Géométrie projective et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes » sera disponible sur son site personnel (*http://bit.ly/DanielPerrin*), tout comme de nombreux articles publiés au cours de sa carrière d'enseignant.*

Le texte qui suit (à peine remanié) m'avait servi de support pour une intervention dans une table ronde sur le thème *Fécondité de l'erreur scientifique*, dans le cadre de la semaine de la Science 2003 à Saint-Michel-sur-Orge. En dépit de son ancienneté, la rédaction de PLOT a considéré que ce texte conservait un intérêt et m'a proposé de le publier. Si je n'ai pas fondamentalement varié sur ces questions depuis, le lecteur pourra toutefois noter quelques évolutions en allant consulter le texte de la conférence de novembre 2015 intitulée « Problèmes ouverts, pourquoi et comment » sur mon site.

http://bit.ly/IremOuverts

1. Introduction

On imagine assez bien ce qu'un physicien, pensant aux conceptions du monde des anciens, voire des modernes, peut dire au sujet de l'erreur. Cela pourrait être, sans doute : la physique, comme interprétation du monde, procède par approximations successives et ce qui est vrai aujourd'hui avec une certaine précision, à ε près, va devenir faux demain à $\varepsilon \times 10^{-n}$ près.

En mathématiques les choses sont moins simples car un résultat mathématique est vrai ou faux et les siècles écoulés n'y changent rien. Mais décider du vrai ou du faux peut être long et laborieux : on pensera à la longue incertitude sur le postulat d'Euclide, la quadrature du cercle ou le grand théorème de Fermat. Cela fait que l'importance de l'erreur en mathématiques se trouve plutôt dans les phases d'élaboration du savoir. Discuter de l'erreur en mathématiques nécessite donc de se poser au préalable la question de la nature de la création mathématique. J'explique ci-dessous la façon dont je perçois cette création. Les sources de ma réflexion sont triples : l'histoire des mathématiques, qui nous enseigne que la genèse des théorèmes peut être complexe et parsemée d'errances, les écrits d'autres chercheurs, qui ont réfléchi sur ce sujet de la création et de l'erreur, et enfin, ma modeste expérience de l'élaboration du savoir mathématique, et notamment le rôle joué par l'erreur dans mon propre travail.

3. L'exploration

Pour expliquer l'une des voies que peut emprunter la création mathématique, je vais utiliser le problème suivant comme fil conducteur.

On considère un entier, on le décompose comme somme de nombres entiers puis on fait le produit des morceaux. Que peut-on dire des différents nombres obtenus ?

Ce problème est élémentaire (il a été proposé par des collègues dans un CM2 d'une ZEP de Gennevilliers relaté dans le passionnant livre de l'équipe ERMEL *Vrai ? Faux ? ... On en débat !,* INRP, 1999), mais il permettra au lecteur de se représenter le cheminement du chercheur.

L'exploration

La première phase de la recherche consiste en une phase d'exploration-expérimentation. Elle consiste avant tout à regarder des exemples, en commençant par les plus simples, à calculer avec eux (éventuellement avec les moyens informatiques), à s'en faire une représentation. L'objectif est d'avoir une vision (partielle) de la situation. Dans notre cas :

On regarde l'exemple du nombre 14. On essaie d'abord les décompositions les plus simples : en deux morceaux. Ainsi, 14 = 12 + 2 donne 24, 14 = 10 + 4 donne 40, 14 = 8 + 6 donne 48, etc.

Une idée géométrique peut nous aider : le nombre donné peut se voir comme le demi-périmètre d'un rectangle écrit comme *longueur + largeur*. Le produit est alors *longueur × largeur*, c'est-à-dire l'aire du rectangle.

Formulation de questions et de conjectures

La deuxième phase, consiste alors à formuler des questions et des conjectures précises, à partir des exemples : c'est un point fondamental, car la **formulation** d'une question, puis d'une conjecture, qu'elle soit vraie ou fausse, est toujours un progrès. Voilà ce qu'en dit Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX$^{\text{ème}}$ siècle : *Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est (peut-être) stupide ou si elle va paraître telle... Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins « à côté de la plaque ».*

http://bit.ly/RecoltesEtSemailles

C'est l'idée de décrire la vision partielle qu'on a de la situation : la conjecture est une tentative pour éclairer le paysage. Bien entendu, cette vision partielle peut être erronée, cela dépend beaucoup de la profondeur de notre connaissance du sujet. Dans notre cas la question est bien naturelle :

Quelle décomposition, disons de 14, donne le plus grand produit ?

Une étude (trop) sommaire des premiers exemples conduit à une conjecture :

Dans la situation du plus grand produit, l'expérience et l'idée du carré et du rectangle font penser que, pour n = 14, la meilleure décomposition est 14 = 7 + 7, qui donne le produit 49.

Conjecture : *la meilleure décomposition c'est de couper le nombre en deux parties égales.*

3. Preuve et réfutation

À l'assaut des conjectures

La phase suivante est de décider si les conjectures sont vraies ou non. Cette phase est dialectique, entre la recherche d'arguments probants en faveur de la conjecture (ou la recherche d'une démonstration dans le cas du mathématicien, l'objectif étant avant tout d'emporter la conviction) et la recherche de contre-exemples. C'est dans cette partie que l'erreur joue un rôle fondamental.

Le rôle de l'erreur

Voilà ce que dit à ce sujet A. Grothendieck : *Mais il arrive aussi que cette image* [de la situation] *est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. [...] Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense*.

Et il ajoute plus loin : *La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte*.

Retour à notre exemple

Dans notre situation, on se rend vite compte que la décomposition en deux n'est pas optimale. Par exemple, la décomposition $14 = 7 + 7$ donne 49, mais on peut faire mieux avec $5 + 5 + 4$ qui donne 100.

Il faut donc remettre en cause notre vision des choses, et renoncer à l'idée trop simple du découpage en deux. D'ailleurs cette remise en cause en induit d'autres. Ainsi, on voit très vite qu'on peut faire encore mieux que $5 + 5 + 4$ en changeant le 5 en $2 + 3$ car $2 \times 3 = 6$ et $6 > 5$. On voit ici apparaître des 2 et des 3. L'exemple de $6 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$ montre que les 3 sont meilleurs. Une nouvelle conjecture émerge naturellement, centrée sur le nombre 3 : *il faut mettre le plus possible de 3 dans la décomposition*.

Voilà une nouvelle conjecture qui semble bien solide car si on prend $14 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2$, on obtient le produit $3^4 \times 2 = 162$ et l'examen des divers cas montre qu'on ne peut faire mieux. Un autre essai avec 15 conforte cette vision. Tout va bien ? Si on examine l'exemple suivant, qui est 16, et qu'on l'écrit $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1$ selon notre principe, le produit est 243, tandis qu'avec $16 = 3 + 3 + 3 + 5 + 2$ c'est 270, la conjecture est encore fausse !

On est ici en présence de ce que j'ai envie d'appeler une erreur « partielle » : dans la situation, il y a un détail qui nous a échappé. En général, ce type d'erreur est réparable (parfois au prix d'un rude labeur) et ne remet pas en cause l'ensemble du travail.

Ainsi, je me souviens encore, tout au début de ma carrière, d'une erreur qui m'avait beaucoup déprimé mais que mon directeur de thèse a réparée en un clin d'œil. Parfois les choses peuvent être plus ardues. Il y a deux exemples assez récents et illustres en la matière, celui d'Andrew Wiles sur le théorème de Fermat, celui de Laurent Lafforgue sur la conjecture de Langlands : tous deux avaient annoncé une preuve de leur résultat, dans les deux cas il y avait un trou dans la démonstration, mais l'un et l'autre ont réussi à le combler.

Dans le cas de notre problème, nul doute que le lecteur a déjà trouvé comment réparer la faute !

4. Quelques exemples d'erreurs, historiques ou actuels

Dans ce paragraphe, on examine le cas (le plus intéressant) où l'erreur rencontrée est plus sérieuse, où elle est fondamentale au point, comme le dit Grothendieck, de remettre en cause toute notre vision des choses.

Pourquoi l'erreur ?

Une des raisons qui fait qu'une erreur peut intervenir tient à la volonté, souvent très forte, du chercheur de parvenir au résultat qu'il convoite : il VEUT à tout prix prouver son théorème ! Cela le conduit parfois à une attitude simplificatrice par rapport à la réalité dont je vais donner deux exemples. Il faut comprendre que cette volonté de simplifier peut être un puissant moteur de découverte, mais qu'elle devient parfois un obstacle lorsque la situation se révèle vraiment plus complexe qu'on ne l'avait imaginée.

Un exemple historique : Euler et Kümmer

Restons en arithmétique. Pour aborder des problèmes d'arithmétique élémentaire, les idées essentielles tournent autour de la divisibilité (nombres premiers, pgcd, etc.) et une technique importante consiste à décomposer les nombres en produit. Par exemple, pour trouver les solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, on écrit $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ et on utilise des raisonnements de divisibilité. Afin de résoudre des problèmes qui résistaient un peu plus (par exemple, trouver quels entiers sont sommes de deux carrés), Euler a eu l'idée de faire de tels raisonnements dans les nombres complexes, car on ne peut pas décomposer $x^2 + y^2$ en produit dans les entiers, mais on peut dans les complexes : $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$. C'est une excellente idée, pourvu qu'on puisse étendre dans ce cadre les raisonnements de l'arithmétique usuelle et notamment la décomposition unique d'un nombre en facteurs premiers. Malheureusement (?), ce n'est pas vrai en général. Les mathématiciens de la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et du XIX$^{\text{ème}}$ siècle ont assez souvent commis cette erreur de faire comme si tout marchait comme dans les entiers.

Bien entendu, il s'agissait d'une véritable erreur de conception, mais cette erreur, une fois comprise, a été la source d'un progrès considérable pour les mathématiques : l'invention des « nombres idéaux » par Kümmer vers 1840, invention qui visait à franchir l'obstacle qui avait été repéré avec l'erreur. Sur ce sujet, on pourra consulter https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Bachet.pdf.

En fait, la démarche est ici doublement intéressante. D'abord, l'idée d'utiliser les complexes est une idée essentielle et très productive et il y a un certain nombre de cas où Euler a raison (c'est-à-dire le cas où le raisonnement est juste dès l'abord, voir le théorème des 2 carrés). Ensuite, l'erreur commise s'est révélée fondamentale et a nécessité toute une théorie nouvelle pour la surmonter, ce qui, au final, a constitué un grand progrès.

Mon expérience personnelle

J'ai moi-même été confronté plusieurs fois à des erreurs qui ont eu une grande importance dans la suite de mes recherches. En voici deux exemples. Ils concernent les travaux que nous avons effectués, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre g (un objet, noté $H_{d,g}$, peu importe ce que signifie ce symbole).

Premier exemple

Nous avons mis en place une sorte de philosophie sur le sujet dont la motivation initiale était une idée tout à fait fausse : pour étudier les schémas $H_{d,g}$, notre idée était de les décomposer en des objets plus petits, notés $H\gamma,\rho$, en pensant que ces objets eux, ne pouvaient plus être décomposés, en termes mathématiques, qu'ils étaient **irréductibles** (des atomes de la théorie, en quelque sorte). On sait maintenant que c'est très faux. En effet, ces objets sont repérés (entre autres) par un entier appelé largeur. Or, s'ils sont bien irréductibles en largeur ≤ 2 et aussi, sous condition, en largeur 3, ils ne le sont jamais en largeur ≥ 4, donc dans une immense majorité des cas. La source de l'erreur c'est que les premiers exemples que nous avions examinés étaient en largeur ≤ 2, donc semblaient indiquer que la propriété était vraie.

Je retiens plusieurs choses de cet exemple.
1. Les exemples que l'on imagine en premier sont toujours trop simples (ici le cas de largeur ≤ 2). C'est normal, ce sont les premiers qui viennent à l'esprit, ce sont les plus faciles à calculer, sinon les seuls. L'aspect psychologique qui fait qu'on veut démontrer des théorèmes, fait qu'on a tendance à prendre ces exemples particuliers pour argent comptant. C'est aussi ce qui est arrivé à Euler et aux autres : les succès obtenus dans quelques cas masquent la difficulté du cas général. Cela étant, ces cas spéciaux sont souvent déjà d'un grand intérêt.

2. Lorsqu'on se rend compte de la difficulté, passé le temps de la déprime, il reste à en tirer les conséquences, en se gardant de jeter le bébé avec l'eau du bain. En fait, dans notre cas, même si les $H\gamma,\rho$ ne sont pas irréductibles, leur introduction garde son intérêt, notamment parce qu'on dispose d'une méthode d'investigation de ces objets qui a des conséquences intéressantes sur l'objectif initial. Simplement, ici, comme c'est souvent le cas en mathématiques et ailleurs, les choses étaient plus complexes que nous ne l'avions pensé. Cette sous-estimation des difficultés est, à mon avis, un atout psychologique important pour la recherche : si le chercheur imaginait toutes les embûches du chemin avant de s'y engager, sans doute renoncerait-il souvent à l'emprunter. C'est d'ailleurs aussi une raison qui fait que de jeunes chercheurs, qui n'ont pas avec certains problèmes le passif de leurs aînés, parviennent parfois à en venir à bout.

Dans ce premier exemple, l'erreur était implicite, même si elle sous-tendait tout notre travail. En fait, dès que nous avons vraiment formulé la question, comme le dit Grothendieck, la découverte de l'erreur a été assez rapide, mais elle a constitué une sorte de révolution dans notre conception des choses.

Deuxième exemple

La deuxième erreur a une histoire plus spectaculaire : il y a une vingtaine d'années, nous avions cru prouver que notre fameux objet $H_{d,g}$ n'était « **presque » jamais connexe**. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, mais heureusement pas encore parue ! Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, le premier exemple non trivial $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous affirmions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception erronée sur l'objet en question, fondée sur une connaissance trop fragmentaire des exemples. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe (à ma connaissance, ce problème est toujours ouvert).

Poincaré

Sur ce sujet, le texte suivant, dû à Poincaré, est magnifique : *Toute généralisation est une hypothèse [...] qui doit être soumise à la vérification. Il va sans dire que, si elle ne supporte pas cette épreuve, on doit l'abandonner sans arrière-pensée. C'est bien ce qu'on fait en général, mais quelquefois avec une certaine mauvaise humeur.*

Eh bien, cette mauvaise humeur même n'est pas justifiée ; le physicien qui vient de renoncer à une de ses hypothèses devrait être, au contraire, plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte.

Son hypothèse, j'imagine, n'avait pas été adoptée à la légère ; elle tenait compte de tous les facteurs connus qui semblaient pouvoir intervenir dans le phénomène. Si la vérification ne se fait pas, c'est qu'il y a quelque chose d'inattendu, d'extraordinaire ; c'est qu'on va trouver de l'inconnu et du nouveau.

5. L'enseignement des mathématiques

Pour terminer, je voudrais juste indiquer que si la reconnaissance et le dépassement de l'erreur sont des opérations fondamentales dans la recherche, elles le sont aussi dans l'enseignement. En effet, dans tout processus d'apprentissage, comme en recherche, c'est en remettant en question des conceptions fausses que l'on progresse et il y a des erreurs nécessaires. Je donne un seul exemple, bien connu des enseignants : le passage des entiers aux décimaux par rapport à l'ordre.

Exemple : partant de l'idée que l'entier 37 est plus petit que 123, ce qui est juste, les enfants en induisent souvent que 5,37 est plus petit que 5,123, ce qui est faux.

Les enfants (comme tout le monde) fonctionnent à l'économie, avec les connaissances anciennes et l'erreur, qui oblige à remettre en cause ces connaissances, est l'un des moteurs de l'apprentissage : toute erreur repérée au moyen d'un contre-exemple ou d'un argument correct est un pas vers la solution et vers une meilleure compréhension du sujet. Il me semble que l'enseignement des mathématiques n'a pas encore suffisamment intégré ce point de vue.

Références

Martin-Deschamps M. et Perrin D., *Sur la classification des courbes gauches,* Astérisque, Vol. 184-185, 1990

Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit*, Rapport de recherche du LMENS, 1995

Martin-Deschamps M., Perrin D. *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. scient. Ec. Norm Sup., 4ème série, t. 29, 1996. p. 757-785.

Perrin D., *Un pas vers la connexité du schéma de Hilbert : les courbes de Koszul sont dans la composante des extrémales*, Collect. Math 52, 3 (2001), 295-319