Plus de règle en bois, tout à la pointe du compas

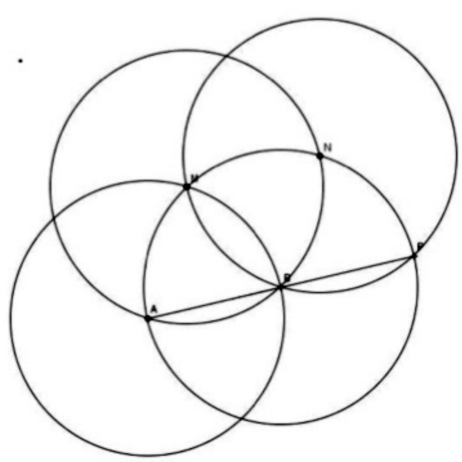
Henry Plane

Qu'aurait été la géométrie naissante sans les deux instruments que sont la règle et le compas ? Allait-on user davantage de l'un ou de l'autre ? Voire se passer de l'un des deux ?
Pour se rendre compte du rôle joué par chacun, essayons de résoudre un problème avec le seul compas.

Doubler une longueur

On donne deux points A et B. On veut construire un point P tel que B soit le milieu du segment [AP].
C'est l'hexagone régulier qui fournit la solution.

Traçons des cercles de rayon r = AB ; celui (A) de centre A recoupe celui (B) de centre B en M. Celui (M) de centre M passe en A et B et recoupe (B) en A et N. Celui (N) de centre N passe en B et recoupe (B) en M et P.

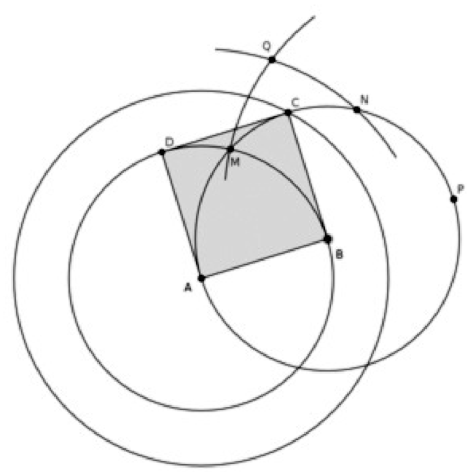


La figure AMNP est la moitié d'un hexagone régulier $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$.
C'est une piste pour avoir des multiples entiers de la longueur r.

Voulez-vous un carré ?

Par exemple, le carré ABCD. Le point C est le milieu de l'arc MN du cercle (B). Il est sur la médiatrice de [AP], mais nous n'avons pas de règle, ni d'équerre…

Reprenons et complétons la figure précédente :



Le triangle ANP est rectangle en N. Nous savons par Pythagore que AN = MP = $r\sqrt{3}$. Alors…

Traçons les cercles de centres A et P et de rayon $r\sqrt{3}$, ils se coupent en Q et (encore Pythagore dans le triangle rectangle ABQ), BQ = $r\sqrt{2}$ qui est la longueur de la diagonale du carré de côté AB.

Le cercle de centre A et de rayon $r\sqrt{2}$ recoupe le cercle (B) au sommet C du carré. On aura le quatrième sommet D sur (A) avec, soit le cercle de centre C et de rayon r, soit celui de centre B et de rayon $r\sqrt{2}$, cercle passant par Q.

Ceux de nos lecteurs que ces exemples ont intéressés sauront :

- que le premier ouvrage connu sur cette question a été écrit par le Danois Georg Mohr en 1762,
- que Mascheroni a publié son traité « la geometria del compasso » à Pavie en 1798 et que Napoléon Bonaparte en eut connaissance sur place (campagne d'Italie),
- que le Premier Consul aimait piéger ses collègues de l'Institut avec des problèmes tirés de ce dernier ouvrage, lequel a été traduit et ré-édité en France (Librairie Blanchard 1980),
- que le Bulletin de l'APMEP de mai 1981 a publié une étude sur ces questions, due à notre collègue Bernard Parzysz et celui de mars 2002 signalait sous la plume d'Henri Bareil le bel ouvrage « Au-delà du compas, la géométrie des courbes » par Franco Conti et Enrico Giusti,
- que maints ouvrages de « math-élem » du siècle dernier évoquaient un « théorème de Napoléon » sur la recherche du centre d'un cercle passant par trois points.

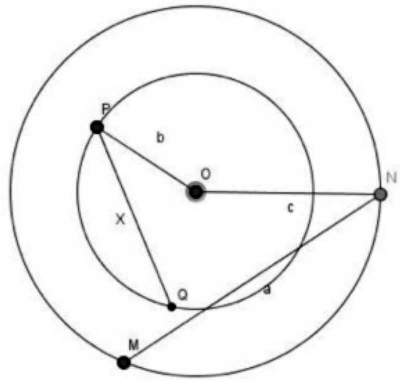
Et sauriez-vous faire une « règle de trois » au seul compas ?

On connaît les ouvertures de compas a, b, c et on désire réaliser celle de x telle que $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Tracer deux cercles concentriques de centre O : (B) de rayon b et (C) de rayon c (figure avec $b < c$). Prendre sur (C) deux points M et N tels que MN = a (si $a > 2c$, on prendra des rayons kb et kc pour (B) et (C)).

P étant un point quelconque sur (B), on déterminera Q, également sur (B), tel que NQ = MP (même ouverture de compas) et que les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{ONQ}$ soient de même sens.

Alors : PQ = x.



Rotation et homothétie à partir des triangles égaux OPM et OQN justifient la similitude des triangles OPQ et OMN.

$\frac{PQ}{MN} = \frac{OP}{OM}$ donc = $\frac{PQ}{a} = \frac{b}{c}$ et PQ = x.

Rien que des ouvertures de compas.

Bien entendu, on combinera ces constructions fondamentales et d'autres…

On retiendra que les géomètres ont démontré qu'il était possible de construire, au seul compas, tout point défini par deux éléments, droite ou cercle. Mais, sans règle, il reste impossible de tracer le moindre segment de droite !