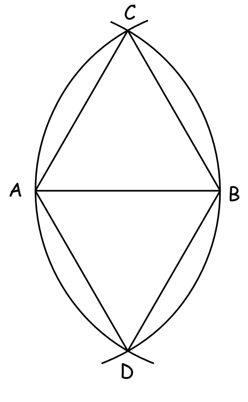
Pythagore… encore !

Henry Plane

Ce sont, dit-on, les élèves d'Euclide qui, au III$^{\text{ème}}$ siècle avant J-C, auraient attribué à Pythagore (V$^{\text{ème}}$ siècle avant J-C) la célèbre relation, qui prit pour nous le nom de « théorème de Pythagore », à la fin de notre XIX$^{\text{ème}}$ siècle. On ne sait ce qu'en connaissaient exactement les gens de l'école de Samos. Mais leur intérêt pour les pavages du plan par des carrés, des hexagones réguliers ou des triangles équilatéraux, lui, est attesté.

Nous proposons ici de constater que, si la priorité est donnée au triangle équilatéral sur le carré, et par là à l'angle de 60° (un tiers de plat) sur celui de 90°, cela ne nuit pas au développement de la géométrie.

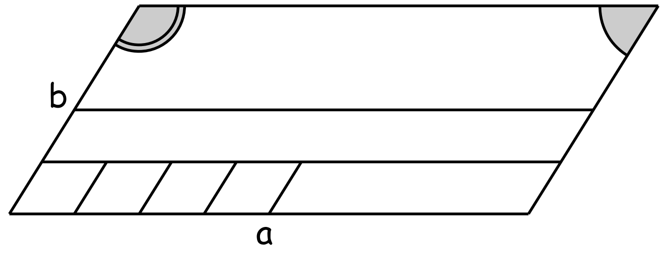
Soit le triangle équilatéral de côté une unité de longueur. **Ayons l'idée de prendre l'aire de ce triangle comme unité d'aire tout au long de notre travail**.
Ce triangle est bien plus facile à construire qu'un carré, deux coups de compas suffisent. C'est plus précis et il en vient même deux, égaux : ABC et ABD. Tous les angles sont égaux à un tiers de plat ($\pi/3$).



Le losange « duo »
La figure ADBC est un losange de côté unité et d'angles $\pi/3$ et $2\pi/3$, que nous appellerons un losange « duo » .
Aire (ADBC) = 2.

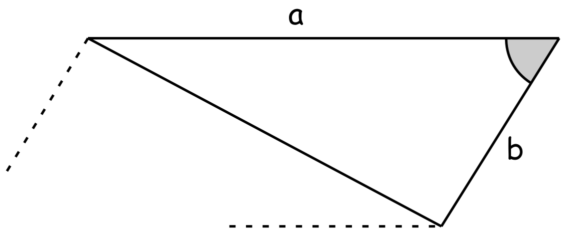
Le triangle équilatéral de côté *c*
Mesuré avec comme unité d'aire le triangle équilatéral de côté 1, ce triangle a pour aire c^2.
En effet le nombre de triangles équilatéraux unités contenus dans un triangle équilatéral de côté c est $1+3+5+\ldots\ldots+(2c-1)$ (somme des c premiers entiers impairs), somme dont on sait (parfois) qu'elle vaut c^2.

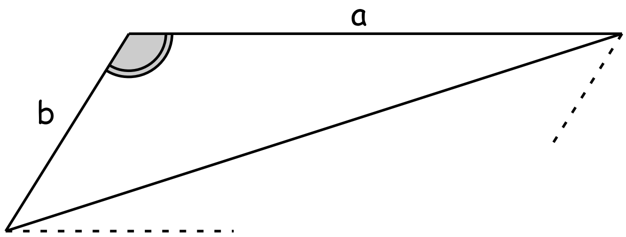
Le parallélogramme « duo »
Nous appellerons parallélogramme « duo », un parallélogramme d'angles $\pi/3$ et $2\pi/3$.
Dans un parallélogramme « duo », dont les côtés mesurent a et b ($a > b$), il est facile de loger b bandes de a losanges « duos ».
Ce qui prouve que l'aire d'un parallélogramme « duo » de côtés a et b vaut $2ab$ (mesurée avec comme unité celle du triangle équilatéral unité).



Triangles « demi-duo »

Si on s'intéresse aux deux triangles obtenus en coupant ce parallélogramme par les diagonales, il vient soit un triangle d'un angle de π/3, soit un triangle d'un angle 2π/3.

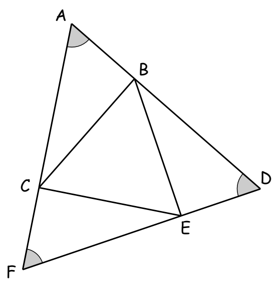




L'aire d'un triangle ayant un angle de π/3 entre deux côtés de mesure a et b vaut ab. De même, l'aire d'un triangle ayant un angle de 2π/3 entre deux côtés de mesure *a* et *b* vaut *ab* (toujours mesurée avec l'unité triangle équilatéral).

Relation entre les côtés d'un triangle demi-duo d'angle π/3

Plaçons-nous dans un triangle « demi-duo » d'angle π/3 de côtés *a* et *b*.
Soit c le côté opposé à l'angle de π/3.
Soient trois triangles égaux de ce type ABC, DEB, FCE.



On peut les disposer pour former deux triangles équilatéraux AFD et BCE.

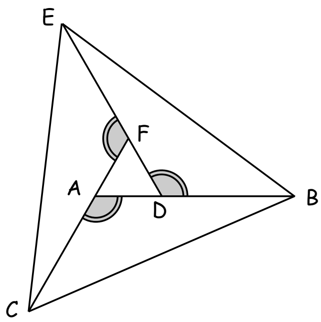
On laisse au lecteur le soin de démontrer les alignements contenus dans cette affirmation.

AC = DB = FE = *a*
AB = DE = FC = *b*
$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{F} = \pi / 3$

Considérons les aires :
Aire (ABC) = Aire (DEB) = Aire (FCE) = *ab* (ce sont des triangles demi-duos)
AD = DF = FA = *a* + *b*
donc Aire (AFD) = $(a + b)^2$
BC = ED = CE = *c* donc Aire (BEC) = c^2
(on a appliqué deux fois le théorème de l'aire du triangle équilatéral)
D'où l'égalité $c^2 + 3ab = (a + b)^2$,
qui donne $c^2 = a^2 + b^2 - ab$

Relation entre les côtés d'un triangle demi-duo d'angle 2π/3

Plaçons-nous dans un triangle « demi-duo » d'angle 2π/3 encadré par des côtés *a* et *b*.
Soit *c* le côté opposé à l'angle de 2π/3.
Nous utilisons encore trois triangles de ce type (les triangles ABC, DEF et FCE) mais disposés autrement toujours pour former deux triangles équilatéraux (le lecteur, là aussi, vérifiera la validité de l'affirmation).

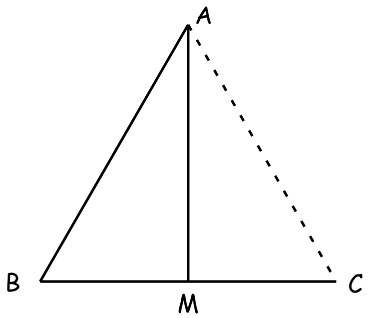


AB = DE = FC = *a*
AC = DB = FE = *b*
$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{F} = 2\pi / 3$

Toujours les aires :
Aire (ABC) = Aire (DEB) = Aire (FCE) $= ab$
Mais AD = DF = FA = $a - b$
Comme :
Aire (BEC) = Aire (AFD) + 3Aire (ABC)
alors $c^2 = (a - b)^2 + 3ab$,
ce qui donne $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Demi-triangle équilatéral

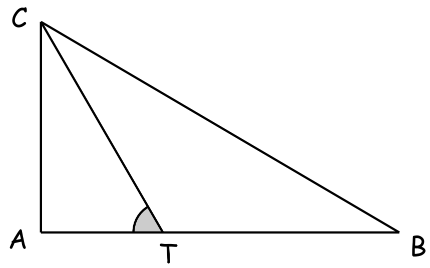
Ces relations ont été obtenues sans apport de trigonométrie et sans angle droit. On peut en introduire un en traçant la hauteur d'un triangle équilatéral ABC.



On a BM = MC = BC/2 = AB/2
d'où $AB^2 = 4BM^2$ et $\widehat{ABM} = \pi / 3$.
ABM est un demi-duo d'angle $\pi/3$; on peut donc lui appliquer la relation trouvée entre les côtés d'un tel triangle :
$AM^2 = BA^2 + BM^2 - BA.BM$
D'où :
$AM^2 = 4BM^2 + BM^2 - 2\ BM.BM = 3\ BM^2$
Tiens, tiens, une relation connue…

Retour au classicisme

Soit un triangle ABC rectangle en A, AB > AC et T est sur AB tel que $\widehat{ATC} = \pi / 3$.
Nous dirons que TC est « tierseur » du triangle.



Appliquons les relations trouvées aux triangles TBC et TAC.
Triangle TBC : $BC^2 = TB^2 + TC^2 + TB.TC$
(c'est un demi-duo $2\pi/3$)
Triangle TAC : CT = 2AT et $CA^2 = 3\ AT^2$
(c'est un demi-triangle équilatéral)
D'autre part : TB = AB – AT
Alors :
$BC^2 = (AB - AT)^2 + 4AT^2 + 2(AB - AT).AT$
$= AB^2 + AT^2 - 2AB.AT + 4AT^2 + 2AB.AT$
$- 2AT^2 = AB^2 + 3AT^2$
Et l'on retrouve une égalité célèbre :
$BC^2 = AB^2 + CA^2$

Égalité que l'on lira « BC puissance deux égale AB puissance deux plus CA puissance deux » puisqu'il n'y a pas eu de carrés dans l'affaire !