Un pseudo problème de Chuquet en classe de 3ème

Pascale Banakas et Cécile Kerboul

Toujours à la recherche de problèmes historiques se résolvant par mise en équation et d'époques différentes (voir article *Un problème d'al-Khwârizmî en classe de 3ème*, PLOT n°53), nous nous sommes penchées sur le problème suivant :

131 Un problème du XVe siècle

En 1484, le mathématicien français Nicolas Chuquet présenta l'énigme suivante dans son traité d'algèbre « Triparty en la science des nombres » à propos d'un marchand.

« Je pose que le premier jour où j'entre à Paris, on me double tout l'argent que j'ai en bourse et ce même jour je dépense un gros. De même le second jour, on me triple tout l'argent qui m'est resté et ce second jour, je dépense 2 gros. De même, le troisième jour, on me quadruple tout mon argent et ce même jour je dépense 3 gros. Et après je regarde dans ma bourse et je trouve que je n'ai plus que 3 gros. On veut savoir combien j'avais d'argent au départ. »

Exercice 131 page 131, manuel *Transmath 3ème* (édition 2012 – Nathan), chapitre « Equations et inéquations du premier degré ».

Une enquête de détectives…

Avant de le proposer en classe, nous réfléchissons aux diverses méthodes de résolution de ce problème par nos élèves : résolution arithmétique par essais-erreurs (même s'il est cependant fort peu probable que nos élèves pensent à tester des nombres rationnels non décimaux), résolution arithmétique « à rebours » (partant de la somme finale et inversant les étapes, méthode efficace mais rarement utilisée), ou encore mise en équation du problème. Mais par quelle méthode Chuquet résolvait-il ce problème ?

Nous consultons en ligne, sur Gallica, le *Triparty en la science des nombres*, mais nous ne trouvons pas le problème de *Transmath*. Nous découvrons par la suite l'existence de trois appendices au *Triparty* et téléchargeons celui concernant les *problèmes numériques faisant suite et servant d'application au Triparty* sur GDZ (Göttinger Digitalisierungs Zentrum). En le parcourant, nous trouvons dans le folio 155 plusieurs problèmes de marchands, dont le problème XXXI le plus proche de celui de *Transmath* (page suivante).

XXXI. Vng marchant a este a troys foyres dont a la premiere Il a double f.156 r. [1]
ses deniers et diceulx en a despendu 5. A la seconde foyre Il a triple
son argent et a despendu .9. A la tierce Il a quadruple son argent et
si a despendu .12. Et a la fin luy sont demourez .8. Asßmort quantes
pieces dargent Il auoit au cōmancemt (2).

Response : [.4. ds. $\frac{5}{6}$]

Malheureusement, seule la solution non détaillée est écrite… Chuquet a-t-il résolu ce problème par la « règle des premiers » largement détaillée dans son *Triparty* ? La « règle des premiers » est la « règle de la chose », à savoir la chose à trouver, qui régit la résolution des problèmes à une inconnue à cette époque en Italie.

Nous poursuivons nos recherches… La lecture de l'article de Maryvonne Spiesser *Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XV^e^ siècle* (Bulletin de l'APMEP n°444. 2003. Pp. 32-50) nous ouvre une nouvelle piste : le problème attribué à Chuquet proviendrait en fait du folio 76 du manuscrit 456 de Nantes, d'un auteur anonyme. Après nous être procurées une photographie de ce folio auprès de la médiathèque de Nantes[2] (folio que nous ne réussissons pas à déchiffrer : le vieux français, ce n'est pas si simple !), nous nous rapprochons de M.Spiesser qui nous apporte une aide précieuse grâce à sa transcription. Il s'avère que ce problème est quasi identique à celui du manuel *Transmath*, à part la somme dépensée le 3ème jour (2 gros au lieu de 3 gros). De plus, la résolution du problème y est détaillée : il ne s'agit pas ici d'une résolution algébrique, mais d'une résolution à l'aide de la « méthode de double fausse position ». « *On ne connaît pas de manière précise l'origine des règles de fausse position. Un problème étant posé, il paraît naturel, en l'absence d'algorithmes ou de méthodes bien établis, de procéder par essais. (..) Les ouvrages de mathématique dite pratique du Moyen Age et de la Renaissance en Europe occidentale ont un penchant affiché pour ce type de raisonnement.* » (IREM de TOULOUSE, Groupe d'Histoire des mathématiques. *De l'arithmétique à l'algèbre. Fausses positions et premier degré*. 2008. Page 13).

Le scénario en classe

Pascale propose le problème *Transmath* dans sa classe de 3ème. Elle ajoute en fin d'énoncé que « le gros est une monnaie de l'époque et qu'il y a 12 deniers dans un gros ». Elle y consacre une séance. Après une courte biographie de Nicolas Chuquet (projetée au tableau), les élèves se lancent dans la recherche du problème. La formulation ne les perturbe pas. Beaucoup d'entre eux tentent, de manière autonome, une mise en équation en posant x (ou une autre lettre) pour la somme inconnue à chercher. Certains introduisent g (g pour gros) dans leurs expressions littérales, confondant alors parfois inconnue et unité, ce qui crée des difficultés. Aucun élève ne teste de valeurs, ou essaie de raisonner « à rebours ».

b → bourse
g → gros　　1er jour → 2 × b − 1g
gros = 12 denier　　2ème jour → 3 (2 × b − 1g) − 2g
1 denier = $\frac{1}{12}$ g　　3ème jour → 4 [3 (2 × b − 1g) − 2g] − 3g
Fin → 3g

[1] Si on le traduit rapidement : « *Un marchand a été à trois foires. À la première foire, il a doublé son argent puis dépensé 5 deniers. À la deuxième foire, il a triplé son argent puis dépensé 9 deniers. À la troisième foire, il a quadruplé son argent puis a dépensé 12 deniers. À la fin il lui reste 8 deniers. Combien de deniers avait-il au départ ?* »

[2] La médiathèque de Nantes peut vous faire parvenir un cliché numérique de ce folio, dans un délai très bref, soit au format 72 dpi (pour 4 €), soit au format 300 dpi (pour 8 €).

Peu d'élèves parviennent cependant sans heurts à l'équation $24x - 23 = 3$: application hasardeuse de la distributivité de la multiplication, réduction malaisée des expressions littérales, ou encore manque de maîtrise du calcul numérique avec des nombres relatifs négatifs.

argent du 1e jour = $x \times 2 - 1$ gros
argent du 2e jour = $(x \times 2 - 1$ gros$)\,3 - 2$ gros
argent du 3e jour = $[(x \times 2 - 1$ gros$)\,3 - 2$ gros$]\,4 - 3$ gros
argent du 3e jour = 3 gros

argent du 2e jour = $3x \times 6 - 1$ gros $- 2$ gros
argent du 2e jour = $\boxed{3x \times 6 - 3 \text{ gros}}$

$[(x \times 2 - 1)3 - 2]4 - 3 = 3$
$[(x \times 2 - 1)3 - 2]4 = 6$
$[(3x \times 6 - 3) - 2]4 = 6$
$[(18x - 3) - 2]4 = 6$
$(16x - 1)4 = 6$
$64x - 4 = 6$
$64x = 12$
$x = \frac{12}{64}$

À noter que le sens du signe « = » n'est pas non plus toujours maîtrisé dans l'enchaînement des expressions littérales liées aux différentes étapes du problème.

x = prix du départ
$2 \times x = 2x - 1$
$= (2x - 1) \times 3$
$= 6x - 3 - 2$
$= 6x - 5$
$= (6x - 5) \times 4$
$= 24x - 20 - 3$
$= 24x - 23$

$24x - 23 = 3$
$\frac{24x}{24} = \frac{26}{24}$ $\quad x = \frac{13}{12} =$

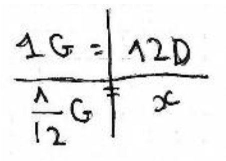
Une fois l'équation $24x - 23 = 3$ obtenue, la majorité des élèves réussit à la résoudre correctement.

$(x \times 2 - 1)$
$(x \times 2 - 1) \times 3 - 2$
$[(x \times 2 - 1) \times 3 - 2]\,4 - 3 = 3$
$[(x \times 2 - 1) \times 3 - 2]\,4 = 6$
$[(2x - 1) \times 3 - 2]\,4 = 6$
$[6x - 3) - 2] \times 4 = 6$
$(6x - 5) \times 4 = 6$

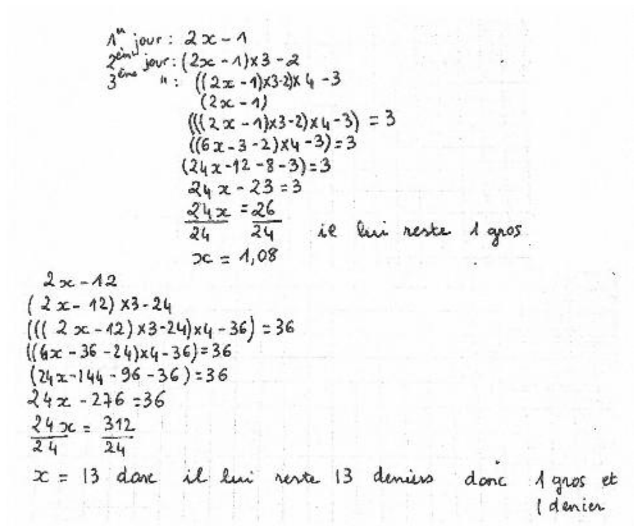
$24x - 20 = 6$
$24x = 26$
$x = \frac{13}{12}$
$\frac{13}{12} = \frac{12}{12} + \frac{1}{12}$
$\frac{12}{12} = 1$

Il possédait 1 g et 1 denier

Mais beaucoup d'élèves se contentent de la réponse $\frac{13}{12}$. Certains vont un peu plus loin en donnant une valeur décimale approchée, sans se demander si écrire 1,08 gros a du sens : ils ne reviennent pas au contexte du problème et ne font pas le lien avec la monnaie de l'époque. Ainsi, une difficulté importante (et non prévue) est le passage de « $\frac{13}{12}$ gros » à « un gros et $\frac{1}{12}$ de gros », c'est-à-dire un gros et un denier : décomposer $\frac{13}{12}$ en $1+\frac{1}{12}$ n'est pas naturel (programme de 6[e]), puis comprendre l'équivalence entre de $\frac{1}{12}$ gros et 1 denier est encore malaisé pour certains.



La copie suivante nous a paru fort intéressante : ne réussissant pas à exprimer la réponse finale en gros et en deniers, l'élève recommence tout son raisonnement en convertissant tous les gros de l'énoncé en deniers et arrive alors à la solution souhaitée !



Le dernier quart d'heure de la séance est consacré à la méthode de la « double fausse position ». Voici l'énoncé distribué aux élèves (la photographie du folio 76 du manuscrit 456 de Nantes est projetée au tableau) :

> À la suite de recherches, il apparaît que le problème posé ne provient pas du « *Triparty en la science des nombres* » de Nicolas Chuquet mais d'un manuscrit conservé à Nantes.
>
> Le texte en ancien français est le suivant :
> *« Autre raison. Je pose que le premier jour que j'entray a Paris, on me double tout l'argent que je porte en ma bourse, et icelui jour, je despens ung gros. Item le second jour ensuivant, on me tripple tout l'argent qui m'est resté en ma bourse, et icelui second jour, je despens 2 gros. Item le tiers jour, on me quadruple tout mon argent et icelui tiers jour, je despens 2 gros. Et après regarde en ma bourse et treuve que je n'ay plus que 3 gros. Assavoir combien j'avoye d'argent ».*
>
> Transcription du manuscrit 456 par Maryvonne Spiesser
>
> L'auteur anonyme de ce manuscrit donne ensuite la solution de ce problème :
> *« Responce. Pose premièrement que quant je y entray que j'avoye ung gros, et qui me le double, sont 2 gros desquelz le dit jour je despens ung gros. Item le second jour qui me le triple, sont 3 gros desquelz je en despens 2 et reste ung gros. Item le tiers jour qui me le quadruple, sont 4 gros desquelz si je en despens 2 il n'en reste que 2, et il en deust rester 3. Ainsi ceste position est par 1 moing ung.*
> *Secondement, faictes une autre posicion par 2, et la considérés comme la precedente, et vous trouverés que le premier jour j'avoye 1 gros et 1/24 de gros, qui est un petit denier d'Avignon. »*

La lecture à voix haute du problème et de sa solution en ancien français par une élève amuse beaucoup le reste de la classe ! Plusieurs élèves repèrent très vite et font remarquer que la somme finale est différente de celle du premier problème résolu et qu'un petit denier d'Avignon n'équivaut pas à un denier.
Est ensuite projetée au tableau la méthode de résolution utilisée :

Règle de double fausse position

* Choisir un nombre u de gros dans la bourse au 1er jour.

* Calculer alors le nombre de gros dans la bourse au 3ème jour. On le note b'.

* Si b' = 3 alors u est la solution du problème.

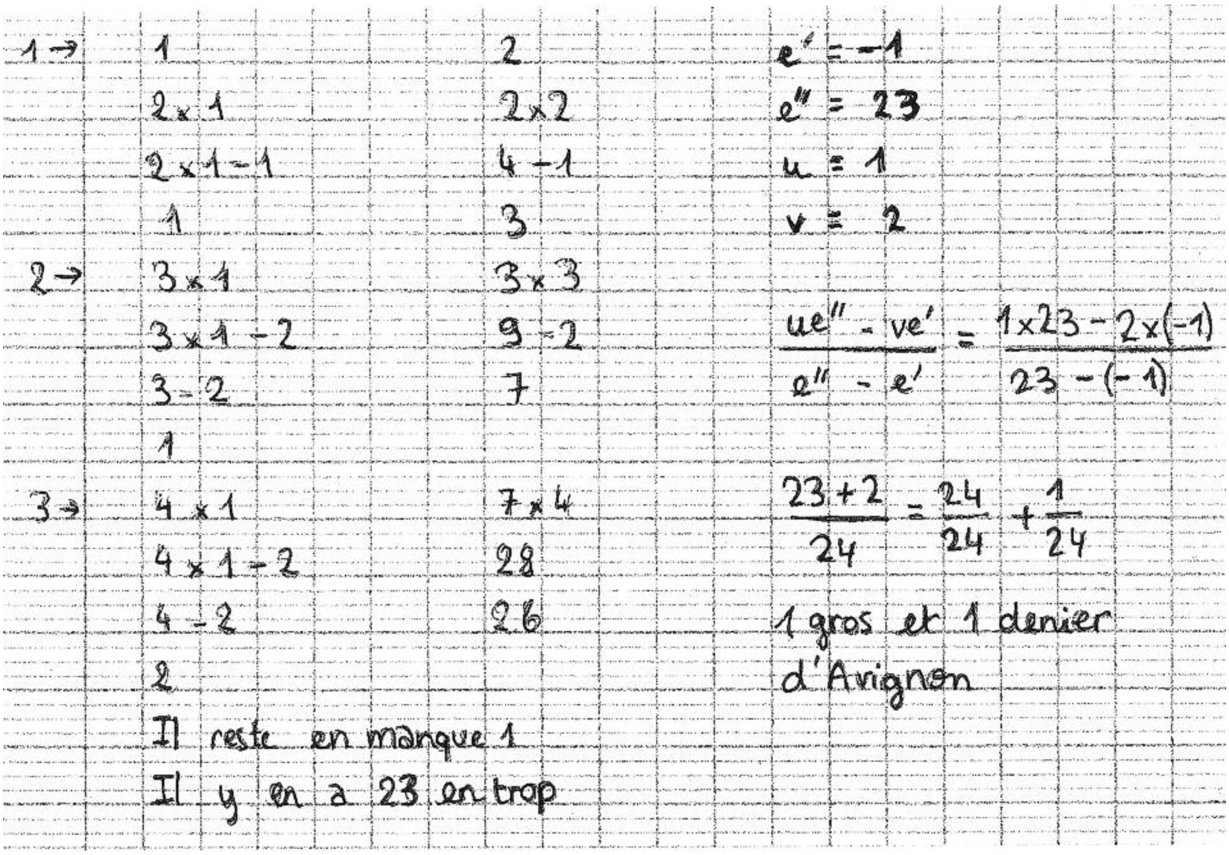
Sinon : - Recommencer avec un autre nombre v de gros dans la bourse au 1er jour.

- Calculer le nombre de gros dans la bourse au 3ème jour. On le note b''.
- Si b'' = 3 alors v est la solution du problème.

  Sinon : · Calculer e' = 3 – b' et e''= 3 – b''

  · Calculer le nombre $\dfrac{ue''-ve'}{e''-e'}$: c'est la solution du problème.

Les élèves calculent le nombre de gros au 3ème jour lorsqu'on a 1 gros le premier jour, puis 2 gros. Ceci ne leur pose pas de problème, cela leur rappelle les programmes de calcul largement travaillés au cours de l'année. Ils admettent ensuite facilement l'idée d'utiliser la règle projetée, qui n'a pas été prouvée. Il nous a en effet semblé que démontrer la formule de la « double fausse position » en 3ème était un peu ambitieux et nous ne nous y sommes pas risquées.



1→	1	2	e' = −1
	2×1	2×2	e'' = 23
	2×1−1	4−1	u = 1
	1	3	v = 2
2→	3×1	3×3	
	3×1−2	9−2	$\dfrac{ue''-ve'}{e''-e'} = \dfrac{1\times23-2\times(-1)}{23-(-1)}$
	3−2	7	
	1		
3→	4×1	7×4	$\dfrac{23+2}{24} = \dfrac{24}{24}+\dfrac{1}{24}$
	4×1−2	28	
	4−2	26	1 gros et 1 denier
	2		d'Avignon
	Il reste en manque 1		
	Il y en a 23 en trop		

La sonnerie retentit déjà. Travail à faire pour la séance suivante : résoudre le pseudo problème de Chuquet du manuel *Transmath* par la « méthode de double fausse position » !