Un problème d'al-Khwârizmî en classe de $3^{ème}$

Pascale Banakas et Cécile Kerboul

Pascale Banakas enseigne au lycée Sainte-Louise (Paris XX^{e}) et Cécile Kerboul au collège Paul Éluard à Chatillon (92).

Travaillant à plusieurs reprises dans l'année sur la mise en équation de problèmes avec nos élèves de $3^{ème}$, nous avons souhaité insérer quelques éléments d'histoire des mathématiques dans nos séances sur ce thème, comme le conseille le BO spécial n° 6 du 28 août 2008. En effet, dans l'introduction commune aux enseignements scientifiques et technologiques pour le collège, on peut lire : « *La perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées* ». Dans le préambule du programme de mathématiques pour le collège, l'histoire des sciences est aussi présente, notamment dans le paragraphe traitant des mises en cohérence : « *Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques* ».

Nous avons essayé de trouver quelques problèmes historiques (ou présentés comme tels), abordables en classe, et ayant marqué de manière significative l'évolution de la notion de mise en équation. En partant d'exercices proposés dans les manuels scolaires des niveaux $4^{ème}$ et $3^{ème}$, nous nous sommes notamment penchées sur le problème d'al-Khwârizmî du carré inscrit dans un triangle proposé sous une forme originale, avec un extrait de la source primaire, dans le manuel *Horizon $4^{ème}$* (édition 2011, Didier). Nous l'avons quelque peu remanié avant de le proposer à nos élèves.

En amont du travail en classe…

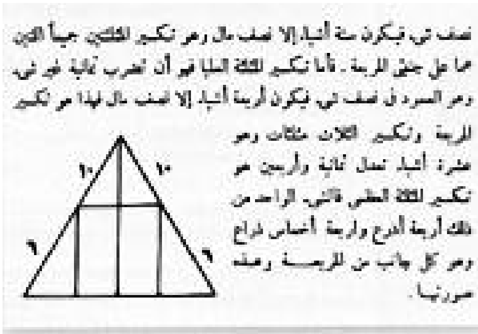
Nous ne sommes pas des spécialistes de l'histoire des mathématiques. Nous nous limitons souvent à raconter occasionnellement l'histoire de mathématiciens (Pythagore, Thalès, Euclide…), quelques anecdotes, ou encore l'histoire de certains concepts mathématiques mais nous ne travaillons que très rarement à partir de textes anciens (ou de traductions proches des originaux).

Ainsi, avant de proposer le travail à nos élèves, il nous a semblé important de contextualiser ce problème, à la fois dans son époque (contexte historique : vie de l'auteur, son entourage, son cadre de vie…) et dans l'évolution des mathématiques (contexte scientifique : éléments mathématiques lui servant de base, apports mathématiques par l'auteur ou simple reprise d'un concept élaboré antérieurement…). Notre première intention fut de consulter des sites sur le sujet sur Internet, mais plusieurs données semblaient se contredire d'un site à l'autre. La lecture de deux ouvrages *L'algèbre arabe, genèse d'un art* (A. Djebbar) et *al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre* (R. Rashed) nous a permis d'obtenir des informations fiables et récentes sur al-Khwârizmî et de retrouver la trace du problème du carré inscrit dans un triangle avec sa solution dans le célèbre ouvrage *Kitâb al-Jabr wa-al-muqâbala* d'al-Khwârizmî (dans le chapitre sur la mensuration).

En classe : la découverte du problème

Dans un traité du IX^{e} siècle, on trouve le problème suivant :

« Dans un triangle isocèle de base 12 coudées, on trace un terrain carré. Quel est son côté ? ».



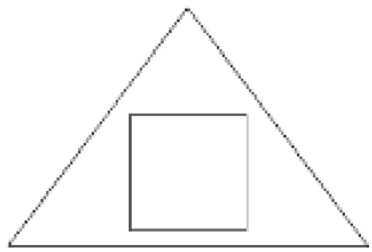
Cécile propose ce problème dans une classe de 3ème, de niveau hétérogène. Elle y consacre pratiquement deux heures (dans la même matinée mais non consécutives).

Après avoir distribué l'énoncé, elle demande aux élèves de le commenter. Une première élève prend la parole et émet l'hypothèse que c'est un texte écrit en arabe. Une camarade, lisant et parlant l'arabe, atteste que c'est bien le cas, mais ne reconnaît aucun mot (ce qui était prévisible car il s'agit d'arabe littéraire).

Plusieurs élèves se demandent ce qu'est une coudée. Un camarade tente d'expliquer que coudée vient vraisemblablement du mot « coude », que ce doit être une unité de mesure (longueur entre le coude et la main ?) et qu'une coudée peut être différente d'un individu à l'autre. Le professeur projette alors la définition du *Larousse* (*« ancienne mesure de longueur, définie comme la distance du coude à l'extrémité du grand doigt, lorsque le bras et l'avant-bras sont pliés en équerre et que la main est ouverte »*) et précise que les Arabes du Moyen Âge utilisaient une coudée qui variait de 44,1 cm à 59,2 cm.

S'en suivent des échanges à propos de la figure. Les élèves ont des difficultés à expliciter clairement ce que signifie « un carré inscrit dans un triangle » :

- « un carré dont les côtés doivent toucher les côtés du triangle » ? (invalidé par la figure de l'énoncé)
- « un carré à l'intérieur du triangle » ? Un dessin à main levée au tableau, comme ci-dessous, permet aux élèves de s'accorder sur le fait que les quatre sommets du carré doivent être sur les côtés du triangle isocèle.



Enfin, Cécile questionne sur l'époque (une rapide lecture de l'énoncé permet de répondre) puis enchaîne sur la vidéo *Voyage en Mathématique - Ahmed Djebbar - Al-Khwârizmî, père de l'algèbre arabe* (http://www.voyage-mathematique.com/exposition/al-kwârizmî - voir le coup de cœur dans PLOT 50). Cette courte vidéo (2 min 56) permet de préciser davantage le contexte historique du problème proposé.

La résolution du problème à la manière d'al-Khwârizmî

Partie 1
1. L'auteur du traité, al-Khwârizmî, nous dit :
« Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une *chose* et nous la multiplions par elle-même ; il vient un *bien*. […] ».
Que représente une *chose* sur la figure ? Et un *bien* ?
2. al-Khwârizmî nous donne ensuite le calcul suivant :
« Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs […] leur aire est que tu multiplies une *chose* par six moins un demi d'une *chose*, il vient six *choses* moins la moitié d'un *bien*. »
Expliquer ce calcul.
3. Avec nos notations actuelles, si on note ℓ une *chose*, comment s'écrit un *bien* ?
Écrire le calcul précédent avec ces notations.

Après quelques minutes de recherche personnelle, la majorité des élèves saisit la signification du mot « chose ». Certaines réponses manquent cependant de rigueur : la chose représente « un nombre inconnu », « une mesure », « un côté du carré », « la valeur du carré ». Un élève pense qu'une chose représente « la moitié de la base du triangle ». A-t-il été influencé par la figure ?

En ce qui concerne le mot « bien », même si certains se limitent à dire que c'est le carré de la longueur du côté du terrain carré, la plupart des élèves l'associent bien à l'aire de ce carré.

Beaucoup d'élèves interprètent difficilement « les triangles sur les flancs ». Le mot « flanc » ne leur est pas familier. Certains pensent au dessert ! Puis, un élève désigne les parties latérales (droite et gauche) de son abdomen. Cette explication satisfait ses camarades qui s'accordent sur les triangles dont il est question. Ils cherchent ensuite à traduire sous la forme d'une égalité les propos d'al-Khwârizmî.

2/ chose × (6 − $\frac{1}{2}$ chose) = 6 choses − $\frac{1}{2}$ bien
On multiplie la longueur d'un côté du carré (« chose ») par 6 moins la moitié d'une longueur [illegible]
(C'est donc 6 longueurs d'un côté moins la moitié de l'aire du carré (« bien »)

2) chose × 6 − $\frac{1}{2}$ chose = 6 choses − (bien ÷ 2)

Mais certains ne maîtrisent pas encore l'utilisation des parenthèses dans les expressions et écrivent des égalités erronées sans regard critique sur leurs écrits.

Aucun élève ne se demande d'où vient le calcul de départ donné par al-Khwârizmî, ce que représente notamment le « 6 moins un demi d'une chose ». Lors de la correction collective, le professeur amène les élèves à se questionner. L'un d'eux justifie oralement que les deux triangles sur les flancs sont rectangles (propriété des angles du carré). D'autres sont persuadés que les côtés de l'angle droit de ces triangles mesurent respectivement une chose et 3 (le quart de 12, interprétation abusive de la figure) et ne comprennent donc pas d'où vient le « six moins un demi d'une chose ». Une élève vient au tableau pour l'expliciter et parle de la propriété de la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle.

Cette première partie correspond à l'activité 8 page 85 du manuel Horizon, dans le chapitre « Calcul littéral ».

La dernière question de cette partie est plutôt bien réussie dans l'ensemble. Elle a souvent été traitée avant la question 2 !
Mais 45 minutes se sont déjà écoulées…

3/ $(6 - \frac{\ell}{2}) \times \ell$ $6\ell - \frac{\ell^2}{2}$ bien = ℓ^2
chose = ℓ

La partie 2 correspond à l'exercice 79 page 127 du manuel Horizon, dans le chapitre « Résolution de problèmes ».

Partie 2

Dans cette partie, on sait de plus que les deux côtés égaux du triangle mesurent 10 coudées et que la hauteur issue du sommet principal mesure 8 coudées.

1. Al-Khwârizmî poursuit ses calculs en écrivant :
« Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une *chose*, et c'est la hauteur, par la moitié d'une *chose* ; il vient quatre *choses* moins la moitié d'un *bien*. »
Justifier que l'aire du triangle supérieur est celle donnée par al-Khwârizmî.

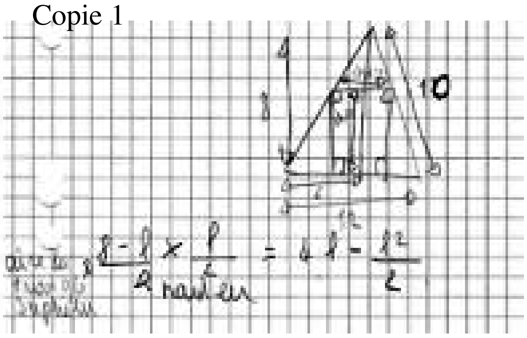
2. **« Ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix *choses*, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle. »**
Calculer l'aire du grand triangle.
Pourquoi l'aire du carré et des trois triangles est-elle égale à dix *choses* ?
Quelle équation obtient al-Khwârizmî ?

3. **« De cela la *chose* est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée. »**
Vérifier la solution d'Al-Khwârizmî.

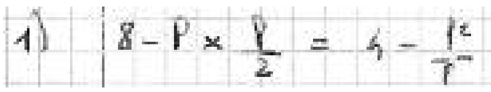
Cécile laisse les élèves chercher, sans intervenir, jusqu'à la sonnerie. Lors de la 2ème heure, il faudra être efficace pour aller jusqu'au bout du scénario prévu !

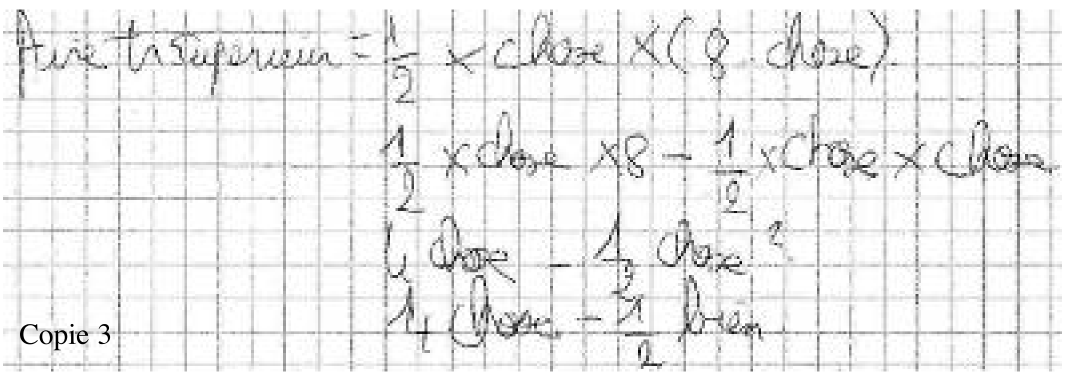
À la question 1, beaucoup se contentent encore de reprendre le calcul proposé par al-Khwârizmî puis de le traduire sous forme symbolique en gardant « chose » et « bien », ou en reprenant la lettre ℓ donnée dans la partie 1 (copie 1). Ils ne se questionnent ni sur l'origine du (8 – chose), ni sur l'application de la formule de l'aire du triangle. Certains oublient les parenthèses (copie 2) et seuls quelques-uns détaillent le développement de l'expression (copie 3).

Copie 1



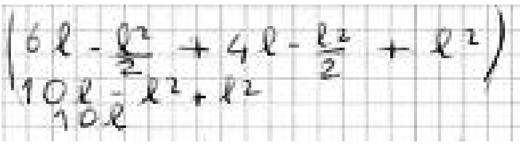
Copie 2

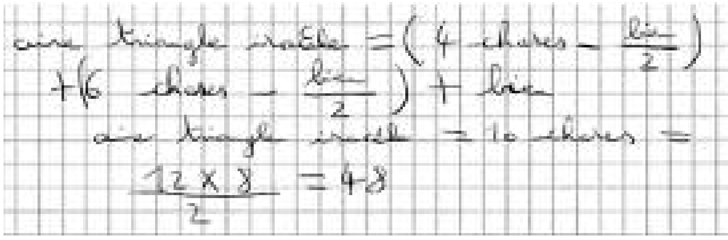




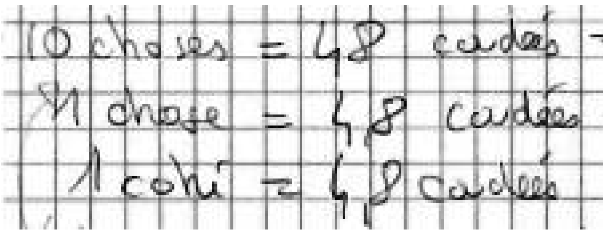
Copie 3

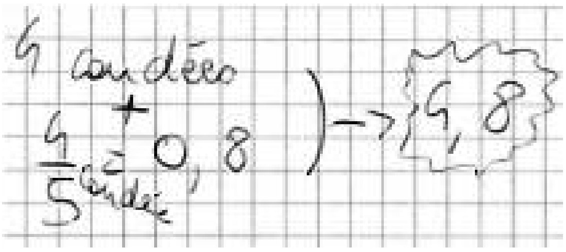
À la question 2, le « dix choses », comme somme des deux aires trouvées précédemment et de l'aire du carré (à calculer) vient assez rapidement. Par contre, la valeur « 48 » bloque une grande partie des élèves, qui se demandent d'où vient ce nombre : ils n'ont vraisemblablement pas compris qu'al-Khwârizmî calcule de deux manières différentes l'aire du triangle isocèle.



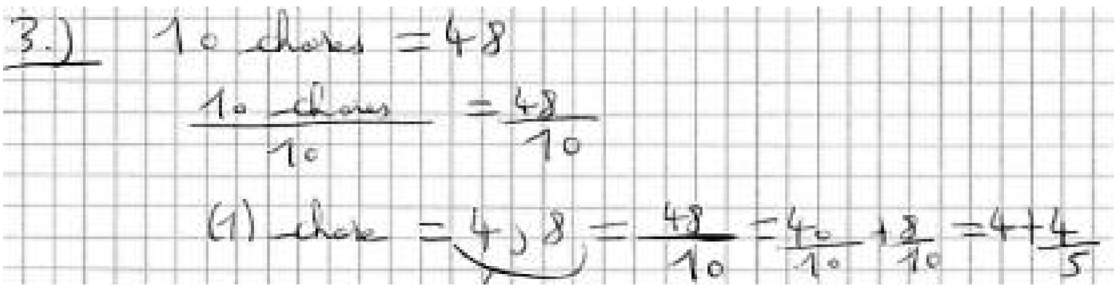


Lorsqu'il s'agit ensuite de vérifier la solution d'al-Khwârizmî, aucun élève ne remplace « chose » par 4 + 4/5 dans l'équation trouvée précédemment « 10 choses = 48 ».
Ils essaient de résoudre cette équation et trouvent 4,8 coudées. Ignorant qu'au cours du IX^{e} siècle, l'écriture décimale 4,8 n'existait pas, beaucoup se contentent de ce résultat, même si ce n'est pas celui annoncé par al-Khwârizmî.





La difficulté essentielle de cette question réside dans le passage de ces 4,8 coudées à coudées (compétence pourtant travaillée en 6ème).



Suite du scénario

S’en suit un échange avec les élèves sur la résolution de ce problème du IXᵉ siècle. Les élèves abordent plusieurs points :

- Le raisonnement est écrit en toutes lettres, sans aucun symbole (même les nombres sont écrits en toutes lettres, sans chiffre). Les signes opératoires sont absents ainsi que le signe « = ».
- Il n’y a pas de traitement symbolique ou littéral, mais on observe cependant quelques éléments typiquement algébriques : une inconnue (désignée par le mot « *chose* »), la formation d’expressions de calcul (rhétoriques) mêlant indifféremment valeurs connues et inconnues, la mise en équation du problème à partir de l’expression d’une même grandeur (ici une aire) de deux manières différentes, un travail sur les expressions obtenues (notamment le développement par la distributivité, les réductions d’écriture), la résolution de l’équation (du 1er degré) obtenue.
- Quelques élèves se questionnent : est-ce que ce problème pourrait se résoudre à l’aide de la propriété de Thalès ? (Ils seront invités à y réfléchir pour la séance suivante). Est-ce que le raisonnement d’al-Khwârizmî pourrait être utilisé dans un triangle quelconque ?

La séance se poursuit par la question « à votre avis, quand sont apparus les symboles algébriques que nous utilisons aujourd’hui ? ». Les élèves tentent des réponses du type « avant JC », « juste après l’invention de l’écriture », « forcément après le IXᵉ siècle, puisqu’al-Khwârizmî n’en utilisait pas », « au XVᵉ ou XVIᵉ siècle ». Ils n’ont en fait aucune idée sur la question (ce qui n’est pas surprenant). Est alors projeté le tableau ci-dessous (*Histoire des mathématiques pour les collèges*. Page 97).

moderne	$12 + 5x = 20$	$x^2 + x = 3$	$x^3 - 5x^2 + 8x - 1$
Babyloniens Egyptiens	ne savent pas écrire une telle équation, mais savent résoudre des problèmes se ramenant à ce type d'équation	idem	
Diophante IIIᵉ	[illegible] [illegible] [illegible] ισ [illegible] inconnue 5 unité 12 égale 20	[illegible] [illegible] inconnue carré 1 inconnue 1 [illegible]	[illegible] [illegible] [illegible] inconnue cube 1 inconnue 8 moins [illegible] [illegible] inconnue carré 5 unité 1
Chuquet XVᵉ	12⁰ p5¹ egault 20⁰	1² p 1¹ egault à 3	1³ m 5² p8¹ m 1⁰
Tartaglia XVIᵉ	12N p5R equale 20N	1q p 1R equale 3	1C m5q + 8R m 1N
Viète XVIᵉ	12 + 5in A aequatur 20	A quad + A aequatur 3	A cubus − 5in A quad + 8in A − 1
Descartes XVIIᵉ	$12 + 5z \propto 20$	$z^2 + z \propto 3$	$z^3 - 5z^2 + 8z - 1$

Les élèves sont invités à observer l’évolution des notations pour quelques notions importantes en algèbre (notamment ce qui concerne les signes +, - et =), puis celle de l’écriture des trois équations proposées (en particulier l’inconnue). Ils se montrent, dans l’ensemble, très attentifs, curieux et intéressés (même ceux plutôt en difficulté en mathématiques).

Réactions d'élèves

Dans cette classe, 17 élèves (sur 29) disent avoir été intéressés par le problème d'al-Khwârizmî alors que 9 élèves n'ont vraisemblablement pas été conquis. 3 élèves ne se prononcent pas.

« Un mélange de maths et d'histoire. »

« Ça change des problèmes quotidiens que l'on nous donne depuis la primaire. On apprend plusieurs choses (histoire,…) alors que nous sommes en maths. »

« J'ai trouvé ce problème dur et incompréhensible. Le calcul avec des lettres, c'est déjà pas facile, alors avec des mots… non merci. »

« L'algèbre existe depuis longtemps, mais a changé. »

« Au final les lettres en maths ne compliquent rien, mais simplifient. »

Une alternative à creuser

Nos lectures nous ont fait découvrir l'existence du problème du carré dans un triangle dans l'ouvrage *Geometrica*, attribué (peut-être à tort) à Héron, et dont R.Rashed nous dévoile une traduction dans son *al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre* (p. 59) :

> *Étant donné un triangle isocèle, dont la base est de 12 portions de terre, la hauteur de 8 portions de terre, (…), et un carré étant inscrit à l'intérieur d'un tel triangle, trouver l'aire du carré. Fais comme voici. Ajoute base et hauteur du triangle, soit 12 et 8. Cela donne 20. Ensuite, multiplie la base par la hauteur, c'est-à-dire les 12 par les 8. Cela donne 96. Divise-les par la somme, soit par 20. Cela donne 4 1/2 1/5 1/10, soit 4 et 4/5. C'est la quantité des portions de terre de chaque côté du carré. (…)*

Comparer deux solutions d'un même problème avec les élèves nous semble une piste intéressante à creuser. On s'aperçoit en effet que :

- La figure de départ est la même : un triangle isocèle et un carré inscrit dans ce triangle.

- Les dimensions du triangle isocèle sont les mêmes : base 12, côtés 10, hauteur 8 (avec des unités utilisées différentes : coudées d'une part, portions de terre de l'autre).

- La problématique est la même : chercher la mesure des côtés du carré (même si Héron cherche ensuite l'aire de ce carré).

- Mais la résolution est bien différente. Héron n'explique pas sa démarche et n'a recours à aucune valeur inconnue…

Prouver avec nos élèves de 3ème que $\dfrac{b \times h}{b+h}$ (où b est la longueur de la base du triangle et h sa hauteur associée) est bien la longueur du côté du carré inscrit peut être l'occasion de réinvestir la propriété de Thalès !

Bibliographie utilisée pour préparer la séance

DJEBBAR A. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert, Paris, 2005.

HOCQUENGHEM M.L., MISSENARD C., MISSENARD D., MONNET F., SERFATI A.M., TARTARY G. *Histoire des mathématiques pour les collèges*. CEDIC, Paris, 1980.

RASHED R. *al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre*. Albert Blanchard, Paris, 2007. Collection : Sciences dans l'histoire.