Moins de questions, plus de recherches

Fabien Aoustin

Fabien Aoustin enseigne au lycée Condorcet de Saint-Quentin dans l'Aisne.

Introduction

Comment transformer les enchaînements de questions (parfois bien fades) des exercices proposés au baccalauréat, que bien des élèves résolvent sans en comprendre le but ou l'idée générale, en exercices permettant la prise d'initiatives ? Le document *Ressources pour la classe de terminale générale et technologique* ainsi que le document d'accompagnement thématique pour la mise en place de l'épreuve E4 de mathématique au sein de la série STAV (Sciences et Technologies de l'Agriculture et du Vivant) présentent des exercices avec une version classique puis une autre avec prise d'initiative.

Dans PLOT 49, Fabien Aoustin nous a proposé le « problème du train », un type de problème de recherche qui déstabilise vite nos élèves. Pourquoi ce type de travail n'est-il pas proposé plus fréquemment dans nos classes ? Quelques arguments entendus lors d'échanges entre collègues :
- il n'y a déjà pas assez de temps pour traiter un programme riche en concepts nouveaux,
- beaucoup d'élèves manquent cruellement de bases calculatoires solides,
- de plus, pourquoi consacrer du temps pour former les élèves sur ce genre de situations, puisque ce n'est pas vraiment évalué à l'examen (avec du coup des élèves ou leur famille prêts à vous reprocher de pas avoir davantage bachoté...),
- ce type d'exercices ne figure pas au baccalauréat.

Ce dernier argument devient caduc, certains sujets du bac 2015 proposant un exercice sur trois points demandant à l'élève de prendre des initiatives. Par ailleurs, il existe des élèves qui s'ennuient à ne travailler que sur des exercices techniques : c'est normal et même bon signe, les maths sont ailleurs !

Il n'est pas question de blâmer les uns ou d'acclamer les autres, il faut juste être conscient des limites de telle ou telle pratique et réussir à panacher ses cours tout au long de l'année avec des méthodes et des outils variés (que PLOT aime vous transmettre). Fabien nous propose ici quelques réécritures de sujets de bac.

Un premier exemple

Souhaitant mesurer les réactions de mes élèves, j'ai ainsi commencé un cours de terminale en écrivant au tableau :

$$\sqrt{2\sqrt{\ldots 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}}}$$

Les réactions furent nombreuses et fructueuses. Mes relances sont en italique.
- Il va en mettre combien comme ça des racines ?
- C'est quoi encore ce truc ?
- Ça fait combien ?
- Attends, je le tape sur ma calculatrice !... Heu, mais on fait quoi avec les petits points ?
- C'est comme une suite !
- *Oui mais quelle suite ?*
- Avec u_{n+1}!
- *Oui, on peut la définir par récurrence.*

- Ah ouais, et on cherche la limite.
- On peut utiliser la touche rep. Tu tapes 2 et après racine de 2 rep.
- (en tapant comme un forcené sur la calculatrice) Ça tend vers 2 !!
- Vous êtes sûrs ? Vous vous souvenez de la fonction définie par ln(ln(x)) ? C'est parfois trompeur ces conjectures sur les limites...
- Oui, mais elle est sûrement majorée.
- Et alors ?
- Elle est croissante aussi !
- Donc elle converge !
- Et vous démontrez ça comment ?
- Par récurrence !
- Supposons que ce soit démontré. Qu'est-ce que cela vous dit sur la limite ?
- Bah c'est 2 !
- Mais non, pas forcément ! Elle est inférieure ou égale à 2.
- Bah on n'a qu'à l'appeler l et résoudre $\sqrt{2l} = l$.

Il ne me restait plus qu'à leur dire de regarder l'exercice 2 donné en Amérique du Nord en mai 2013 (ci-dessous) qui consistait à déterminer l'expression explicite de la suite.

Amérique du Nord mai 2013

Exercice 2 **5 points**

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Second exemple

De même, le fameux sujet de métropole du mois de juin 2014 (ci-dessous) aurait pu être présenté différemment et laisser plus de place aux initiatives. Ainsi l'exercice n°3, consacré aux nombres complexes, aurait pu se résumer à :

« Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$z^4+4z^2+16=0$
Toute trace de recherche, etc. »

Une seule ligne au lieu d'une bonne douzaine !

Par contre, ce type de rédaction entraîne :
- la nécessité pour les concepteurs du sujet de réfléchir à la notation des pistes de recherches fournies par les élèves,
- l'obligation pour les correcteurs de réfléchir aux idées des élèves. Il est bien plus facile de noter des réponses à des questions techniques (recherche d'une primitive puis calcul d'une intégrale) que d'évaluer un début de raisonnement...

Métropole juin 2014

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4+4z^2+16=0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+4Z+16=0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=-2+2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+iy$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}$ défini par $\bar{z}=x-iy$.
   Démontrer que :
   — Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
   — Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$.
4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Conclusion

De tels énoncés susciteront une levée de boucliers tant qu'une pratique régulière de tels exercices ne sera pas monnaie courante dans toutes les classes et ce depuis le primaire... Et nous savons qu'à partir du moment où un type de sujet « tombe » au bac, il finit par être traité en classe (l'algorithmique en est un bel exemple)...

L'enquête PISA révèle que la prise d'initiatives est ce qui fait cruellement défaut à nos élèves ; le retour de nos collègues du supérieur va souvent aussi dans ce sens. Nos élèves sont très vite déstabilisés dès lors qu'on leur demande autre chose que d'appliquer le cours.

Beaucoup d'élèves résument les mathématiques à une suite de savoir-faire techniques. Il est dommage de les laisser quitter le secondaire avec cette image, faute de leur avoir fourni l'occasion de s'émerveiller d'avoir trouvé. Faire des maths c'est avant tout être créatif, être capable de réinvestir ses connaissances théoriques et avoir du plaisir à chercher. PLOT sera ravi de publier vos propositions d'énoncés allant dans ce sens.