Vers le système binaire par magie

Jérôme Coillot

Dans les numéros 21 et 22, PLOT s'était déjà fait l'écho de « mathémagie » à la suite de l'atelier que Dominique Souder avait animé aux Journées Nationales de l'APMEP à Clermont en 2006.
La motivation des élèves est toujours au rendez-vous lorsqu'il s'agit de tour de magie, avec le désir très fort d'en connaître l'explication. Et quand cette explication repose sur des notions mathématiques, profitons-en dans notre enseignement !

Jérôme Coillot enseigne au collège de La Roche-Posay dans la Vienne.

C'est dans un livre d'activités mathématiques acheté aux USA que j'ai découvert le tour de magie ci-après. La consigne pour réussir le tour y était bien sûr donnée. Je l'ai donc tout d'abord utilisé dans l'optique d'une activité sur le calcul mental en classe. Les puissances de 2* intervenant dans l'explication de ce tour, j'ai fait ensuite le lien avec le système binaire.

Et, progressivement, ce tour de magie numérique a donné lieu à l'activité que je présente ici.
Les compétences et capacités qui y sont développées sont bien sûr le calcul mental, mais surtout le raisonnement (recherche, prise d'initiative, conjecture…).

* J'utilise cette expression dans l'article par commodité, mais je n'ai pas parlé de puissances de 2 avec mes élèves de 6ème.

Le tour de magie

Le jeu des six cartes ci-dessous constitue le seul matériel de ce tour.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

NDLR : il fut un temps où ces cartes étaient données en cadeau dans les « boîtes joyeuses » d'une grande marque de restauration rapide.

Le principe est simple : l'élève choisit un nombre entre 1 et 63 et désigne toutes les cartes sur lesquelles ce nombre figure. Le magicien trouve alors le nombre ! Comment ?

Comment fait le magicien ?

Les élèves sont bien sûr intrigués et émerveillés par une telle prouesse et donc très motivés pour trouver comment a fait le magicien.
La recherche se fait par groupes de quatre élèves. L'un d'eux (rapide en calcul mental) a été informé du « truc » et joue le rôle du magicien. Les autres élèves du groupe, avides de connaître le « truc », lui proposent une multitude de nombres. Mais, dans la plupart des groupes, la recherche n'est pas véritablement organisée.

Je me déplace de groupe en groupe pour observer et aider les élèves sans pour autant donner la réponse.

Coups de pouce possibles :
n° 1 : réflexion sur le choix des nombres à faire deviner (le plus grand, le plus petit, deux nombres qui se suivent…),
n° 2 : regarder le nombre en haut à gauche des cartes désignées.

Après des recherches plus ou moins fructueuses suivant les groupes, un groupe ou moi-même explique à la classe comment opère le magicien : il additionne les nombres en haut à gauche des cartes dans lesquelles figure le nombre. La somme est le nombre choisi.

Activité

Dans ce qui suit, mon rôle est plutôt celui d'un animateur. Les consignes sont données oralement. Les élèves travaillent individuellement et restent très motivés ; la moitié n'a pas besoin d'aide.

A- Décomposition d'un nombre
Maintenant que les élèves connaissent le « truc », je leur propose les recherches suivantes :
- à l'aveugle (sans voir les cartes mais en connaissant leur premier nombre), sur quelles cartes se trouve le nombre 29 ?
- même chose avec d'autres nombres… (18 ? 46 ?). C'est un bon petit exercice de décomposition et de calcul mental.
Je suis souvent amené à donner de manière magistrale le coup de pouce suivant : décomposer en commençant par les plus grands nombres (32, 16, etc. : ordre décroissant).
- Peut-on décomposer ainsi tous les nombres de 1 à 63 ?

Institutionnalisation
Chaque nombre de 1 à 63 peut se décomposer de manière unique en somme des nombres 1, 2, 4, …, 32 (chaque nombre n'étant utilisé qu'une seule fois au maximum).

B- Vers le système binaire
Les élèves savent décomposer un nombre en somme de puissances de 2. Ils ont donc les moyens de découvrir le système binaire. Voici les deux phases de travail.

1/ Coder un nombre en système binaire
Je donne le tableau ci-dessous avec, en exemple, la décomposition de 29 où on utilise un 16, un 8, un 4 et un 1.
De la même manière, compléter le tableau pour chacun des nombres 14, 58… en indiquant les nombres que vous utilisez.

32	***16***	***8***	***4***	***2***	***1***	
0	1	1	1	0	1	$\longrightarrow$ 29

29 correspond à $\overline{11101}$
14 …
58 …
32 …

2/ À quel nombre correspond une suite donnée de 1 et de 0 ?

Il s'agit donc maintenant de faire le travail inverse. J'écris dans le tableau des suites de 1 et de 0, par exemple 101, et je demande de trouver les nombres correspondants.
Je propose ensuite le même travail, mais « à l'aveugle », c'est-à-dire sans le tableau, ce qui oblige les élèves à repérer les puissances successives de 2 à partir de la droite (chiffre des unités).

Institutionnalisation

11101 est l'écriture en ***système binaire*** (uniquement avec des 0 et des 1) du « 29 » du système décimal. Cela revient à indiquer la décomposition de 29 en 1, 2, 4, …

On trouve sur internet des convertisseurs système décimal <—> système binaire (voir lien sur le site de l'APMEP, rubrique PLOT) qui permettent de vérifier un résultat. Mais pas question de lui faire aveuglément confiance : il faut contrôler la fiabilité du convertisseur !

Un peu de culture générale

Le système binaire est utilisé par les systèmes électroniques les plus courants (calculatrices, ordinateurs…). En effet, les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors ne gérant chacun que deux états : 0 représentant l'état bas (tension ou courant nul) et 1 l'état haut (tension qui existe, courant qui passe). Un calcul informatique n'est donc qu'une suite d'opérations sur des paquets de 0 et de 1, appelés octets lorsqu'ils sont regroupés par huit.
Complément : le système binaire est l'équivalent en base deux de notre numération de position en base dix.

C- Réaliser son jeu de cartes

Bien sûr, les élèves veulent absolument avoir « leur » jeu de cartes pour le « tester » et faire le tour chez eux ou à des camarades. Le travail se fait individuellement ou par deux ; la moitié des élèves est autonome.
Je débute le travail de fabrication avec toute la classe, mais bien sûr en direction des élèves en difficulté, en traitant le cas des premiers nombres (de 1 à 9 par exemple).

D- Pour aller plus loin

Je propose aux élèves les plus rapides la recherche suivante : quelle(s) conséquence(s) aurait la fabrication de la $7^{\text{ème}}$ carte de ce jeu ?

Bonus

« *Il y a 10 sortes de personnes dans le monde : ceux qui connaissent le système binaire et les autres* ». Pour la première fois cette année, deux élèves ont compris la subtilité et l'ont expliquée aux autres !