La duplication

Henry Plane

Dans les ouvrages anciens consacrés aux opérations arithmétiques, et pas seulement les manuscrits, figure, après addition et soustraction, la duplication. Pourquoi cette mise à part de la multiplication par deux ?

En fait, il s'agit d'une technique qui permet de réaliser le produit de deux entiers quelconques sans connaître ses tables de multiplication. Seul le calcul du double d'un entier est nécessaire.

Comment ?

Il est possible, ainsi que cela se faisait jadis, de le montrer en opérant sur deux nombres a et b pris comme exemple général. Prenons le temps de reconnaître les idées directrices.

Soit le produit $P = a \times b$

Si a est pair, $a = 2a'$ et $P = (2a')b = a'(2b)$

Si a est impair, $a = 2a' + 1$ et

$P = (2a' + 1)b = 2a'b + b = a'(2b) + b$

Voyons $P = 26 \times 37$

$P = (2\times13)\times37 = 13\times(2\times37) = 13\times74$

$= (2\times6 + 1)\times74 = (2\times6)\times74 + 74$

$= (6\times148) + 74$

$= (2\times3)\times148 + 74 = (3\times296) + 74$

$= (2 + 1)\times296 + 74$

$= 2\times296 + 296 + 74$

$= 592 + 296 + 74$

$= 962$

Sont additionnés les seuls « doubles » apparus avec des « moitiés » impaires, à savoir 13, 3 et 1 ; le calcul consiste alors essentiellement en des multiplications ou des divisions par deux.

Une disposition habile des écritures facilite le travail en opérant sur trois colonnes séparant « moitiés paires » et « moitiés impaires ».

Ainsi :

26	**37**	
13		74
6	148	
3		296
1		592
		962

$P = (2\times13)\times37 = [2\times(6 \times2+1)]\times37$

$= [2^2\times6 + 2]\times37 = [2^2\times(3\times2) + 2]\times37$

$= [2^3\times3 + 2]\times37$

$= [2^3\times(2\times1 + 1) + 2]\times37$

$= [2^4 + 2^3 + 2]\times37$

$= 2^4 \times 37 + 2^3 \times 37 + 2^1 \times 37$

soit $74 + 296 + 592$

$2^4 + 2^3 + 2$ n'est autre que la décomposition de 26 en puissances de 2.

De la même façon (ci-contre) : 38×131

$38 \times 131 = (2^5+2^2+2^1) \times 131$

$= 2^5 \times 131 + 2^2 \times 131 + 2^1 \times 131$ où $2^5+2^2+2^1$ est la décomposition de 38 en puissances de 2.

38	**131**	
19		262
9		524
4	1048	
2	2096	
1		4192
		4978

Dans le cas où a est impair, attention à la disposition dans le tableau.

Ainsi, pour 25×37 :

25		**37**
12	74	
6	148	
3		296
1		592
		925

Et si l'on inverse les rôles de a et b ? On trouve bien sûr le même produit mais avec des calculs intermédiaires différents ; mieux vaut choisir d'écrire le plus petit des deux facteurs à gauche.

37		**26**
18	52	
9		104
4	208	
2	416	
1		832
		962

9		**1£ 2s 8d**
4	2£ 5s 4d	
2	4£ 10s 8d	
1		9£ 1s 4d
		10£ 4s

Le procédé fonctionne même dans un système non décimal. Il permettait donc, avant le 19ème siècle, d'éviter le détour par « les comptes faits » du sieur Barreme.

Exemple : coût de 9 toises de toile à 1 livre 2 sols 8 deniers la toise (1 livre = 20 sols ; 1 sou = 12 deniers)
Le coût des 9 toises de toile est de 10 livres 4 sols.

Au début du 20ème siècle, le procédé était nommé « multiplication à la russe » car il était encore utilisé et enseigné au pays du tsar.

Il apparaît donc que la propriété, pour tout entier, d'être somme de puissances de deux (y compris $1 = 2^0$), ait été reconnue assez tôt sans être spécialement énoncée. Elle a permis, à la suite de son usage pour la multiplication, de s'en servir pour la division. C'est pourquoi la duplication a pris place dans nombre de textes avant ces deux opérations. Diviser *x* par *y* se fera en recherchant combien de « doubles » de *y* sont contenus dans *x*. On obtiendra le résultat en retranchant successivement de *x* les « doubles » de *y* à partir du plus grand.

Soit à diviser 1789 par 23.
On a en tête les « doubles » de 23 :
$23 \times 2^0 = 23$ $23 \times 2^1 = 46$
$23 \times 2^2 = 92$ $23 \times 2^3 = 184$
$23 \times 2^4 = 368$ $23 \times 2^5 = 736$
et $23 \times 2^6 = 1472$

1789	
- 1472	64
317	
- 184	8
133	
-92	4
41	
-23	1
Reste 18	77

Soustractions successives, correspondant aux multiples du diviseur 23 par une puissance de deux (ci-contre).
$1789 = (77 \times 23) + 18$
soit $(2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6) \times 23 + 18$

C'est ainsi que, comme pour la multiplication, la division peut être faite sans connaître jusqu'à neuf les fameuses tables…

Le système de numération binaire était comme en attente de se mettre au service du procédé. Toutefois, ce n'est qu'au début du 18ème siècle que Leibniz se fit le chantre de cette numération aux seuls 0 et 1.

Ainsi, 37 **:** 5 devient $\overline{100101}$ **:** $\overline{101}$ en binaire et nous obtenons :

$\overline{100101}$	
- $\overline{10100}$	$\overline{100}$
$\overline{10001}$	
- $\overline{1010}$	$\overline{10}$
$\overline{111}$	
- $\overline{101}$	$\overline{1}$
Reste $\overline{10}$	$\overline{111}$

$\overline{100101} = \overline{111} \times \overline{101} + \overline{10}$
ou, dans notre système décimal,
$37 = (7 \times 5) + 2$

P.S. : au 20ème siècle, à leur création, les calculatrices s'emparèrent de l'outil. Mais dès l'approche du 21ème siècle, face aux longs calculs qui leur étaient confiés et pour aller plus vite encore, celles-ci se tournèrent vers d'autres méthodes plus rapides. Il y aurait là une autre manière de narrer l'aventure de la multiplication et de la division.

NDLR : De nos jours, de nombreux sites (notamment *Mathématiques magiques*) vous proposent d'effectuer en ligne des multiplications à la russe ; des manuels du primaire ou de 6ème exposent la méthode pour la multiplication (la disposition des nombres en colonne n'étant pas standardisée) et c'est un exercice classique pour les étudiants préparant le CRPE.
Une lecture fort documentée et très bien détaillée est téléchargeable sur le site de l'IREM de Grenoble : « Histoire des techniques opératoires » de Raymond Guinet parue dans un dossier spécial de « Grand N » (addition-soustraction : n°14—1978 ; multiplication : n°15—1978 et division : n°17—1979).
Cette technique de multiplication très ancienne est attestée dès l'Égypte antique.