Tant qu'il y aura des poissons ou Escher revisité

Gilles Maréchal

Le mois de juin est un mois à reconquérir pour certains… C'est vite oublier que ces semaines sont d'une part à disposition du recteur pour les surveillances, examens, corrections, jurys divers, mais qu'elles sont aussi l'occasion d'un travail différent de réflexion, de concertation, d'auto-formation, de préparation de cours nouveaux, etc.

Gilles Maréchal enseigne au lycée Saint Joseph de Bressuire (79).

Les livres ? Il en existe encore !

En passant, en juin dernier, dans une librairie (oui, ça existe encore), après avoir cherché le rayon sciences puis maths (là il faut vraiment chercher !) je suis tombé sur un nouveau livre « Petit précis de géométrie à déguster », aux éditions Belin, de Mike Askew et Sheila Ebbutt, édité en 2011.

Feuilleter les pages a été une occasion de repérer des idées de problèmes ou tout au moins d'exercices pour telle ou telle classe.

En préparant la rentrée, étant chargé des maths en Terminale STD2A (Sciences et Technologies du Design et des Arts Appliqués), et n'ayant qu'extrêmement peu d'éléments pour les cours, en dehors des programmes, orientations et ressources, je me suis souvenu d'une figure réalisée par Escher. Avant de pouvoir l'utiliser, j'ai dû m'employer à la retrouver et à la modéliser, voyez plutôt.

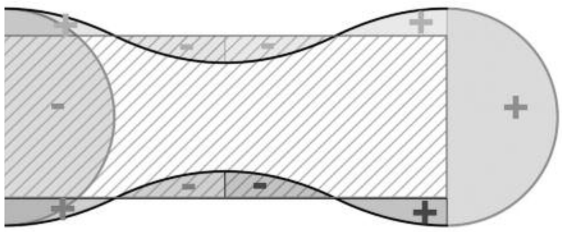
Quelques éléments du programme d'enseignement de mathématiques en Terminale STD2A :

- Exemples de courbes représentatives de fonctions polynômes de degré 3,
- Problèmes de raccordements de courbes,
- Découvrir et exploiter sur l'exemple du cercle et de l'ellipse différentes descriptions d'un même objet,
- Créer une figure par répétition de deux transformations simples.
- Exemples de pavage.

Quelques exemples

Enlever – Rajouter

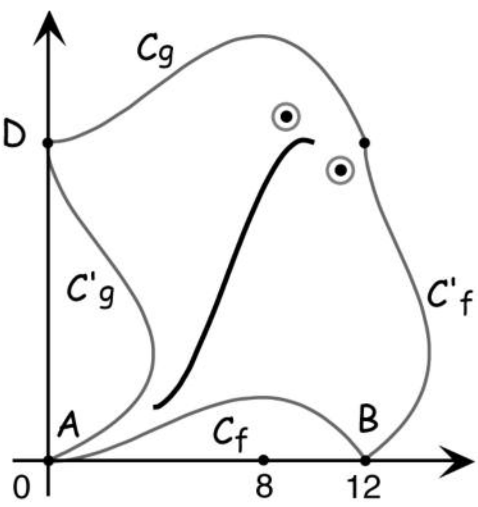
Un pavage ne peut se faire qu'avec des formes bien particulières dont le rectangle. Mais il est possible de modifier la maille à condition de compenser. La forme ci-dessous illustre ce principe.



Avec des cubiques

Les raies d'Escher sont construites sur ce principe. En les observant et en cherchant à reproduire le motif initial, est venue l'idée d'utiliser des cubiques.

Une tangente horizontale au bord gauche, un sommet intermédiaire plus ou moins élevé… Après quelques tentatives (avec crayon et *GeoGebra*), deux fonctions semblent convenir. Les contraintes posées sur les courbes ont été l'occasion d'obtenir un système abordable pour les élèves, et la recherche de tangentes en des points judicieux a permis d'affiner le tracé (voir, p 31, le sujet « Pavage Escher - Raies – Troisième degré »).



Par exemple avec $f(0) = 0$; $f(12) = 0$; $f(6) = 2$; $f'(0) = 0$; $f'(8) = 0$, on obtient $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{108}x^3$ de représentation graphique C_f dans un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j})$.

Puis avec $g(0) = 12$; $g(12) = 12$; $g(8) = 16$; $g'(0) = 0$; $g'(8) = 0$ on obtient $g(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{64}x^3+12$ sur [0;12] de représentation C_g.

L'utilisation de la rotation de centre B(12 ; 0) d'angle droit de sens horaire permet d'obtenir une nouvelle courbe C'_f et celle de centre D(0 ; 12) d'angle droit de sens horaire permet d'obtenir C'_g, ce qui permet de fermer le domaine.

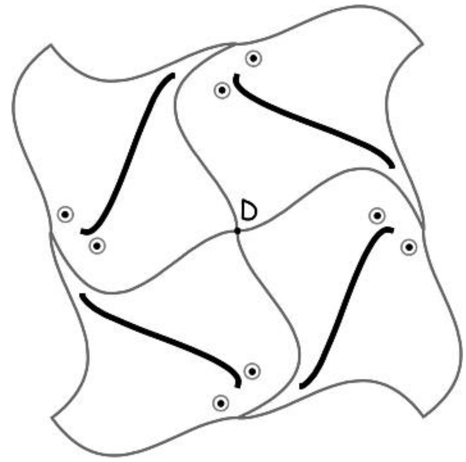
Le rajout d'yeux a été l'occasion d'utiliser des cercles. Pour obtenir une dorsale, il a été nécessaire d'interpoler pour répondre à des contraintes locales : par exemple ici sur l'intervalle [5;11] avec I(5;2), J(7;5), K(9;9), L(11;11).

N'est-elle pas belle, cette raie ?

Par la suite, en prenant l'image des éléments précédents par trois rotations de centre D et d'angles 90°, 180° et 270° de sens direct on obtient une figure appuyée sur une maille carrée.

Cela va permettre le pavage du plan avec les translations de vecteurs :

$\vec{u}_1 = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}_2 = 2\overrightarrow{AD}$.



Avec des fonctions de degré deux : travail sur les raccordements.

Pourquoi s'obliger à utiliser des cubiques ? Pourquoi pas des fonctions du second degré ?

De là est venue l'idée de fonctions par morceaux avec raccordement. Restait à enrichir la situation pour avoir exemple et contre-exemple de « même tangente » aux points de raccordement (voir p 30 le sujet « Pavage Escher - Raies – Second degré ») : pourquoi d'ailleurs ne parlerait-on pas de « raccordement régulier » ?

Par exemple, sur [0;6] avec $h(x)=\frac{1}{12}x^2+12$ et sur [6;12] avec $k(x)=16-\frac{1}{4}(x-8)^2$, on a bien $h(6) = k(6)$ avec $h'(6) = k'(6)$.

Mais sur [0;5] avec $f(x)=\frac{7}{200}x^2$ et sur [5;12] avec $g(x)=2-\frac{1}{8}(x-8)^2$ on a $f(5) = g(5)$ et $f'(5) \neq g'(5)$, ce qui donne des (demi) tangentes différentes aux deux courbes C_f et C_g en 5.

Adaptations possibles pour d'autres niveaux

En seconde

Les exemples de fonctions du second degré sont tous adaptables en seconde, la notion de fonctions par intervalles étant limitée à un travail maison.

La classe de seconde dans laquelle j'interviens étant constituée uniquement d'élèves ayant choisi l'enseignement d'exploration Création et Culture Design, il restait à faire tracer les deux bords, la notion de rotation étant abordée seulement en première STD2A.

Un changement de repère est un moyen pour faire tracer les deux courbes formant les deux bords de la raie. Le découpage d'un gabarit permet ensuite de dessiner les trois autres raies de façon à obtenir la maille précédente.

Après avoir introduit la notion de vecteur, en analysant certains dessins d'Escher, le pavage du plan se fait naturellement, les élèves faisant spontanément preuve d'initiatives pour mettre en couleur l'ensemble.

Dans d'autres classes ?

Avec des élèves d'une MANAA (Mise À Niveau en Arts Appliqués), souvent allergiques aux maths, ou pour le moins demandant sans cesse « mais à quoi servent les maths ? », de tels exemples permettent de mettre à niveau nombre de notions indispensables pour des études en Arts Appliqués ou Design.

De même en début d'année en BTS DCEV (Design Création Espace et Volumes) de tels exemples sont riches et motivants pour les étudiants.

Par ailleurs lors de l'introduction de la notion de courbes paramétrées l'utilisation de l'outil « rotation » sous *GeoGebra* permet de poser le problème, à partir de l'affichage des équations des nouvelles courbes obtenues. De plus, les arcs de cercles sont des occasions d'introduire un paramétrage.

Pour une bonne recette

Pour déguster la géométrie il est parfois utile, comme ici, d'utiliser l'algèbre. Ces activités offrent l'opportunité d'accrocher nombre d'élèves en attente de découvrir des maths autrement, et ainsi de les amener à s'investir dans des études de fonctions, des tracés de courbes et de tangentes.

Ces recherches ont été données, après une présentation en classe, en travail hors temps scolaire. Une figure a été le support d'un exercice lors d'un « bac blanc ».

En dehors de l'indispensable maîtrise des techniques de base (dérivées, tangentes, transformations, etc…) la tentation a été grande pour certains élèves de faire un tracé puis un pavage grossier : demander certaines tangentes est un moyen pour (tenter de) faire tracer avec précision et rigueur de telles courbes, en utilisant de façon judicieuse les propriétés de diverses transformations.

Pour plusieurs élèves, souvent en difficulté, ces activités ont été des accroches motivantes, certains tentant même leur chance sur des croquis pour créer d'autres formes.

Pavage Escher - Raies – Second degré

L'objet du problème est de construire un motif pour un pavage du plan, selon un procédé utilisé par Escher.

On utilise un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On se donne les points A(0;0) ; B(12;0) ; C(12;12) ; D(0;12).

1ère étape : Bord supérieur

1) On définit la fonction h sur [0;6] par $h(x)=\frac{1}{12}x^2+12$.

Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)=\frac{1}{12}x^2+12$: valeur exacte							
Valeur approchée à 0,1 près							

Calculer $h'(x)$. Démontrer que la fonction h est croissante. Établir le tableau de variations de la fonction h.

2) On définit une nouvelle fonction k sur [6;12] par $k(x)=4-\frac{1}{4}(x-8)^2+12$.

Compléter le tableau de valeurs :

x	6	7	8	9	10	11	12
$k(x)=4-\frac{1}{4}(x-8)^2+12$: valeur exacte							
Valeur approchée à 0,1 près							

Développer $k(x)$ puis démontrer que $k'(x)=-\frac{1}{2}(x-8)$.

Résoudre $k'(x) = 0$ puis $k'(x) > 0$. Établir le tableau de variations de la fonction k.

3) Dans le repère donné, la fonction h se représente par la courbe C_h, la fonction k par la courbe C_k.
Compléter le tableau suivant :

Valeur	$h'(0)$	$h'(6)$	$k'(6)$	$k'(8)$	$k'(12)$
Exacte					
Approchée à 0,1 près					

Tracer avec précision les deux courbes C_h et C_k, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 ; 6 ; 8 ; 12.
On appelle C_1 la réunion de ces deux courbes C_h et C_k. Tracer en trait de couleur cette courbe C_1.

4) En justifiant :
- les deux courbes sont elles raccordées ?
- ce raccordement est-il régulier ?

2ème étape : Bord inférieur

1) On définit la fonction f sur [0;5] par $f(x)=\frac{7}{200}x^2$.

Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)=\frac{7}{200}x^2$: valeur exacte						
Valeur approchée à 0,1 près						

Calculer $f'(x)$. Démontrer que la fonction f est croissante. Établir le tableau de variations de la fonction f.

2) On définit une nouvelle fonction g sur [5;12] par $g(x) = 2 - \frac{1}{8}(x-8)^2$.

Compléter le tableau de valeurs :

x	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(x) = 2 - \frac{1}{8}(x-8)^2$: valeur exacte								
Valeur approchée à 0,1 près								

Développer $g(x)$ puis démontrer que $g'(x) = -\frac{1}{4}(x-8)$.

Résoudre $g'(x) = 0$ puis $g'(x) > 0$. Établir le tableau de variations de la fonction g.

3) Dans le repère donné, la fonction f se représente par la courbe C_f et la fonction g par la courbe C_g.
Compléter le tableau suivant :

Valeur	$f'(0)$	$f'(5)$	$g'(5)$	$g'(8)$	$g'(12)$
Exacte					
Approchée à 0,1 près					

Tracer avec précision les deux courbes C_f et C_g, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 ; 5 ; 8 ; 12.
On appelle C_2 la réunion de ces deux courbes C_f et C_g. Tracer en trait de couleur cette courbe C_2.

4) En justifiant : - les deux courbes sont elles raccordées ? - ce raccordement est-il régulier ?

3ème étape : Pavage

Deux autres courbes sont tracées en annexe. Avec les courbes C_1 et C_2, on obtient une « raie ». Ceci nous donne un motif initial ***m***. On considère les trois rotations de centre D et d'angles antihoraires 90°, 180°, 270° notées $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$.

1) Construire avec précision les images de ***m*** par les trois rotations $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$. La réunion de ces quatre images constitue un motif ***M***. Les points I (-12;0), J(12;0), K(12;24), L(-12;24) forment la maille carrée IJKL du motif ***M***.

2) Paver la page en utilisant les translations de vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$.

3) Embellir en utilisant des couleurs adaptées.

● ●

Pavage Escher - Raies – Troisième degré

L'objet du problème est de construire un motif pour un pavage du plan, selon un procédé utilisé par Escher.

1ère étape : Recherche d'une cubique

On utilise le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se donne les points A(0;0) ; B(12;0) ; C(12;12) ; D(0;12).
On recherche une courbe cubique notée C_1 dont l'équation est de la forme $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; elle représente donc la fonction f.

1) Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b, c, d.

2) Sachant que la courbe C_1 passe par le point A et admet en A une tangente parallèle à l'axe des abscisses, démontrer que $d = 0$ et que $c = 0$.

3) Ecrire en fonction de a et b le fait que la courbe C_1 passe par B, puis, de même le fait que la courbe C_1 passe par le point E(6;2).

4) On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

Montrer que ce système peut s'écrire : $\begin{cases} 12a + b = 0 \\ 6a + b = \frac{1}{18} \end{cases}$. Résoudre le système et conclure.

2ème étape : Étude d'une fonction cubique

Soit la fonction *f* définie sur [0;12] par $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{108}x^3$.

1) Calculer *f'(x)* puis montrer que $f'(x)=\frac{1}{36}x(8-x)$.

2) Résoudre *f'(x)* = 0, puis étudier le signe de *f'(x)* sur [0;12].

3) Établir le tableau de variations de la fonction *f*.

4) Établir un tableau de valeurs donnant *(x,f(x))* pour *x* allant de 0 à 12, de 1 en 1.

5) Tracer, dans le repère, la courbe représentative C_1 de la fonction f.

6) Tracer avec précision les tangentes à C_1 aux points A, B, E et F d'abscisse 8.

3ème étape : Seconde cubique

Soit la fonction *g* définie sur [0;12] par $g(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{64}x^3+12$. Elle se représente par la courbe C_2.

1) Procéder comme aux questions 1), 2), 3), 4) au-dessus en vérifiant que $g'(x)=\frac{3}{64}x(8-x)$.

2) Tracer avec précision la courbe C_2.

3) Démontrer que les tangentes aux deux courbes C_1 et C_2 aux points d'abscisses 0 ; 12 ; 8 sont parallèles entre elles ; les tracer avec précision.

Utiliser une feuille à petits carreaux en prenant 1 petit carreau pour 2 unités sur chacun des axes.

4ème partie : Construction du motif

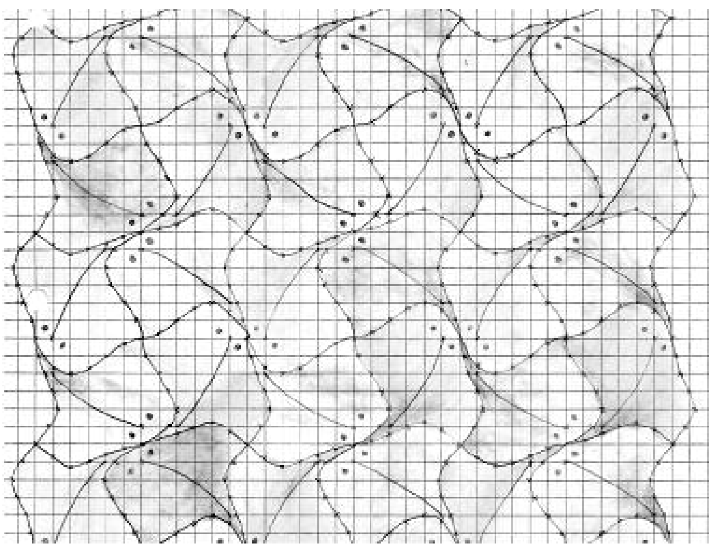
On définit les courbes suivantes :

- C_3 image de C_1 par la rotation de centre B et d'angle 90°,
- C_4 l'image de C_2 par la rotation de centre D et d'angle 90°,

1) Tracer en traits forts les 4 courbes C_1, C_2, C_3 et C_4. On obtient ainsi l'ébauche d'une raie.

2) Tracer à « main levée » une courbe sur [4;10] représentant la dorsale du poisson passant par les points G(4;2) et H(10;12).

3) Rajouter deux disques correspondants aux yeux centrés aux points I(11;11) et J(9;13).



5ème partie : Pavage avec ce motif

1) Reproduire ce motif *R* en utilisant les trois rotations de centre D et d'angles 90°, 180°, 270°.

2) Reporter ensuite ce bloc de 4 motifs *R* par translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

3) Poursuivre le pavage de la page.

4) Embellir en utilisant des couleurs judicieuses.