Un lac, 4 moniteurs, des enfants et une ligne d'eau : pourront-ils se baigner aujourd'hui ?

Véronique Cerclé et Agnès Monfront

« Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes » : c'est dit dans les programmes. Oui, mais quels problèmes ? Problèmes concrets, ouverts, ... tâches complexes ou non guidées ; à chaque époque, son vocabulaire. Laissons là les questions de dénomination et penchons-nous sur trois versions d'un même problème en nous posant quelques questions essentielles : quelle est l'activité de l'élève ? Que peut-il en apprendre ? Quelle en sera l'institutionnalisation ?

Véronique Cerclé est professeure au lycée Jean Moulin de Pézenas.

Dans les trois problèmes proposés, il s'agira toujours de définir une aire de baignade à partir d'une ligne d'eau de longueur donnée en tenant compte de contraintes de surface. Il y a donc au départ une situation concrète : on peut imaginer un animateur confronté dans la réalité à ce type de problème quand il souhaite emmener des enfants se baigner en plein air. On espère ainsi motiver les élèves en leur montrant que les maths peuvent servir dans la vie courante. Qu'en est-il ?

Un premier énoncé avec des questions enchaînées (ci-contre)

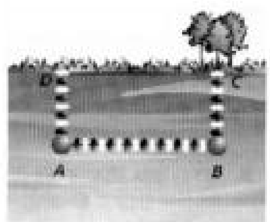
On a ici un « problème à questions enchaînées ». Seules les questions 1 et 6 ramènent l'élève à la situation « concrète » initiale. On imagine mal l'animateur sportif suivre la démarche proposée pour savoir s'il peut faire une aire de baignade supérieure à 3 000 m².

C'est pourquoi l'élève perd très vite le caractère concret du problème pour entrer dans un rôle consistant à « répondre aux questions posées ». La situation concrète n'est qu'un prétexte, un habillage.

La situation est au départ concrète mais la résolution reste dans un cadre mathématique imposé, celui des fonctions. L'élève doit suivre l'ordre des questions qui s'enchaînent. Il est pris par la main, le professeur le guide —espérant ainsi aider les plus en difficulté— mais dans le même temps il impose la démarche « experte » —empêchant toute autre initiative. Cette forme ne laisse pas de place au raisonnement singulier de certains élèves, il ne permet pas de tirer parti du cadre vivant de la classe.

Activité

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées A et B.



On se propose de déterminer comment placer les bouées A et B pour que l'aire de baignade soit supérieure à 3 000 m².

1) Si la distance de la bouée A à la rive est de 25 m, quelle est la longueur de la zone de baignade ? Quelle est alors son aire ?

2) Montrer que la distance x (en m) de la bouée A à la rive varie entre 0 et 80 m. Déterminer en fonction de x la longueur de la zone de baignade.

3) Calculer l'aire de la zone de baignade A(x) pour x variant de 0 à 80, de 10 en 10.

4) En utilisant le graphique, dire pour quelles valeurs de x l'aire semble supérieure à 3 000 m².

5) Vérifier que l'inéquation $A(x) > 3\,000$ est équivalente à $(x - 40)^2 < 100$ et résoudre cette équation sur l'intervalle [0;80].

6) Conclure en précisant la place des bouées A et B pour que l'aire de baignade soit supérieure à 3 000 m².

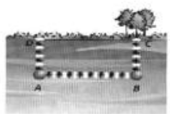
L'activité de l'élève est donc réduite à l'application de « savoir-faire » voire uniquement à la recopie du corrigé fait au tableau pour certains. Cela permet un entraînement technique indispensable mais pour lequel un habillage concret n'apporte rien. La synthèse consistera à reprendre certains points de méthode qui auront posé problème à plusieurs élèves dans la classe.

Conclusion : c'est une forme adaptée pour travailler ou mesurer l'acquisition d'automatismes et développer une habileté technique mais qui ne tire pas parti de la richesse potentielle de la situation concrète.

Sous une deuxième forme : une situation problème, la modélisation numérique ou fonctionnelle, de la conjecture à la preuve.

L'aire de baignade

Le cordon mesure 30 mètres de longueur



L'effectif est de 54 enfants, il voudrait que chaque enfant dispose de 2m².

Est-ce possible ?

La formalisation (poser x et exprimer l'aire en fonction de x, qui suppose de comprendre qu'une grandeur dépend d'une autre et que cette dépendance peut se modéliser par une fonction) me semble un objectif essentiel de la classe de seconde. C'est l'objectif visé ici. En quoi ce problème peut-il aider à l'atteindre ?

Sous cette forme, on prend la notion de « problème » dans le cadre de « résolution de problème » ou de « situation-problème » puisqu'on a affaire à une situation posant question. L'énoncé est court, la situation compréhensible par tous, aucune méthode n'est indiquée ou induite et différents cadres de résolution sont possibles.

La formulation proposée ouvre une véritable recherche, au cours de laquelle on va rencontrer différentes phases pour lesquelles on peut reprendre une typologie proposée par J-J. Dahan :

- la recherche erratique : l'élève teste des propositions de dispositions de cordon pour voir si l'aire obtenue convient ; le professeur relance la recherche en demandant s'il y a d'autres possibilités dans le but d'amener l'élève à la deuxième phase.
- la recherche ordonnée : il lui reste à déterminer quand cette aire est supérieure à 108, ce qu'il peut faire par différentes méthodes (algébrique, graphique, voire tableau de valeurs). On souhaite que l'élève reconnaisse une situation de fonction.

Lors de la première phase qui peut rester dans un cadre simplement numérique, tous les élèves peuvent entrer dans l'activité. Ils gardent le sens de la situation concrète ; certains dessinent, d'autres expliquent à leurs camarades en utilisant leur écharpe en guise de ligne d'eau... Tous sont actifs. Ils s'approprient ainsi vraiment l'activité.

En demandant si d'autres solutions sont possibles, le professeur profite de la dynamique qui s'est créée. En s'appuyant sur les essais numériques, il peut espérer progressivement amener la formalisation par une fonction qui reste l'objectif d'apprentissage et qui sera donc l'objet de la synthèse. Il peut alors sensibiliser les élèves à la différence entre conjecture à partir des nombreux exemples numériques et la preuve dans le cadre fonctionnel et algébrique.

Conclusion : en laissant aux élèves une véritable phase d'appropriation, en prenant appui sur leurs premières idées, sur leurs premiers calculs, ce type de problème permet progressivement de travailler la « modélisation par une fonction ».
Mais ce modèle mathématique des fonctions est appliqué à une situation qui est déjà modélisée par une figure géométrique (ici un rectangle) : la situation tout en restant concrète est proposée dans un cadre mathématique où les objets réels sont déjà des objets géométriques épurés.

Une troisième version : la tâche complexe, du monde des objets réels aux objets géométriques. (ci-contre)

Le problème est donné sous une forme concrète brute. Il ne s'agit pas seulement d'un habillage. L'élève est vraiment mis à la place du moniteur en charge de l'organisation de la baignade de 120 enfants. Il dispose d'une ligne d'eau de longueur donnée et doit respecter la législation en vigueur. La formalisation sous une forme fonctionnelle n'est plus l'objectif principal : ce qu'il faut, c'est être capable d'initiatives pour proposer des idées permettant de répondre à la question posée : pourra-t-on se baigner aujourd'hui ?

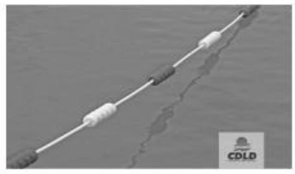
* Attention : situation complexe ne signifie pas situation compliquée. La situation doit rester abordable par tous. Après un temps de lecture individuelle permettant la dévolution du problème, on organise une plénière pour s'assurer que tous les groupes vont pouvoir entrer dans une phase de recherche active.
Il faut construire le modèle mathématique sur lequel raisonner ; autrement dit, il faut se ramener à la situation de l'énoncé précédent, où les conditions permettent la mise en œuvre d'outils numériques ou algébriques.

<u>L'aire de baignade</u>

Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble.
Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent du package ci-dessous pour faire une ligne d'eau.

Pourront-ils respecter la législation ?

Kit pour la confection de ligne d'eau à monter



Offre « package » comprenant :
cordage Ø 10mm + flotteurs Bolinche blancs et rouges + entretoises longueur 50 cm permettant de monter une ligne d'eau de balisage de bain de 25 mètres.

Réf. **A2496-100** pour 25 mètres

<u>Normes d'hygiène et de sécurité applicables aux piscines et baignades aménagées.</u>

Légifrance - Article D1332-10
Modifié par <u>Décret n°2006-676 du 8 juin 2006 - art. 2 JORF 10 juin 2006</u>

La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert. Pour l'application du présent article, la surface des pataugeoires et celle des bassins de plongeon ou de plongée réservés en permanence à cet usage ne sont pas prises en compte dans le calcul de la surface des plans d'eau.

* Le point crucial de cette présentation du problème est donc celui de la modélisation géométrique . En effet on va traduire la situation concrète par une figure géométrique, et pour cela, on doit « épurer » les objets : la rive et le cordon deviennent des segments de droite qui forment un rectangle. Or ce travail n'est presque jamais laissé à la charge des élèves, et très rarement questionné en classe : les problèmes « concrets » sont presque toujours présentés avec une figure qui passe sous silence la modélisation géométrique sous-jacente et les conventions simplificatrices choisies (le choix d'une zone rectangulaire est totalement implicite et confié au

dessin). Ce moment peut être l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le fait qu'en mathématique on travaille sur des figures géométriques qui sont des modèles de la réalité, mais ne sont pas la réalité.

Ce premier temps est donc indispensable et permet de faire prendre conscience aux élèves de ce passage du monde réel au monde mathématique. Ils ont à leur charge cette modélisation géométrique, qui peut être laissée à l'initiative de chaque groupe ou discutée en plénière.

- On modélise la situation concrète par une figure géométrique épurée. Pour cela on simplifie la situation : on néglige le problème de la hauteur d'eau qui amènerait à se demander s'il faut prendre en compte la partie où l'eau n'arrive pas aux chevilles, les objets réels deviennent des objets géométriques (la rive et le cordon sont modélisés par des segments de droite qui forment un rectangle). Peut-être y a-t-il d'autres hypothèses ? La parole et le questionnement sont laissés à l'initiative des élèves. Ce n'est pas le professeur qui impose ses choix et son cadre de résolution.

Cette première modélisation, qui amène le problème concret dans le monde géométrique, permet de se ramener à la version 2. On peut alors travailler sur cette situation modélisée et mettre en œuvre les calculs qui conduiront au concept de fonction.

- On se met alors d'accord sur la contrainte de surface et pour cela, il faut une information supplémentaire (aire de baignade en plein air ou non). Ne pas donner l'information dans l'énoncé permet d'en discuter avec la classe et donc de s'assurer que tous ont bien repéré les deux normes différentes. On pourrait ouvrir davantage l'énoncé en ne donnant pas le point de règlement au départ, sa nécessité apparaissant au cours de la recherche (pédagogie de l'enquête). Et même donner un catalogue de cordons flottants avec budget minimum. Mais la question du temps disponible risque de s'imposer.

Expérimentation en classe

Cette troisième version a été proposée dans une classe de troisième et une classe de seconde, sous forme d'un travail de groupe. Les outils utilisés ne sont pas les mêmes (calculatrice ou tableur), l'initiative est laissée aux élèves.

Classe de troisième : les élèves privilégient l'approche numérique mais les démarches ne sont pas pour autant toutes identiques. L'activité mathématique des élèves est donc réelle durant cette séance ; ils se questionnent, s'écoutent, confrontent leur idées, prennent des initiatives et surtout doivent s'assurer de la pertinence des valeurs trouvées. Certes, dans la classe de troisième aucun groupe n'a réussi à écrire l'expression d'une fonction. Mais ce n'était pas l'objectif prioritaire pour cette phase de recherche.

Le travail sur la modélisation géométrique de la situation concrète n'a pas été formalisé mais est une première sensibilisation, qui sera réinvestie dans d'autres situations. Au cours de la scolarité, cette phase sera progressivement dévolue à l'élève. L'activité permet de voir les élèves faire des mathématiques, de les observer et de les évaluer sur des compétences essentielles du socle.

Ainsi, lors de cette séance, j'ai pu évaluer quelques élèves ciblés au départ sur les quatre compétences transversales du pilier 3 du socle commun.

- Certains ne comprennent pas la contrainte de longueur sur la ligne d'eau (compétence C1),
- D'autres échouent dans le calcul d'aire (compétence C2)
- Nombreux sont ceux qui ont du mal à raisonner pour mettre en place correctement la proportionnalité entre la surface et le nombre d'enfants (compétence C3)
- La présentation de la démarche reste confuse à l'oral ou à l'écrit pour un petit nombre (compétence C4).

Quinze minutes avant la fin de la séance, le professeur demande aux groupes de remettre leur démarche, calculs et conclusion au propre sur une copie ramassée en fin d'heure (voir les copies ci-dessous).

Lors de la synthèse à partir du tableur proposé par un des groupes, un travail sera fait (voir copie d'écran) en binôme pour écrire la formule de calcul d'aire en un seul calcul amenant ainsi « naturellement » la formalisation par une fonction.

D2 =A2*B2

	A	B	C	D
1	Largeur	longueur	longueur	aire
2	10	7,5	7,5	75
3	11	7	7	77
4	12	6,5	6,5	78
5	13	6	6	78
6	14	5,5	5,5	77
7	15	5	5	75
8	16	4,5	4,5	72
9	17	4	4	68
10	18	3,5	3,5	63
11	19	3	3	57
12	20	2,5	2,5	50

Les enfants ne peuvent pas se baigner car on ne trouve jamais 80 m² même en utilisant le tableur
Mais, ils pourront se baigner si 3 enfants ou plus sont absents

Calcul sur tableur de la surface en fonction de la largeur

17 ; 4 ; 4

17×4 = 68 m² 68 × 1,5 = 102
Donc on peut mettre 102 enfants.

15 ; 5 ; 5

15×5 = 75 m² 75×1,5 = 112,5
Donc on peut mettre 112,5 enfants

13 ; 6 ; 6

13×6 = 78 m² 78×1,5 = 117
Donc on peut mettre 117 enfants

11 ; 7 ; 7

11×7 = 77 m² 77×1,5 = 115,5
Donc on peut mettre 115,5 enfants

12 ; 6,5 ; 6,5

12×6,5 = 78 m² 78×1,5 = 117.
Donc on peut mettre 117 enfants

Nos calculs qui se rapprochent le plus de 120 enfants sont nos calculs surlignés en jaune. On peut mettre maximum 117 enfants

Essais-rectifications avec la calculatrice.
Calcul du nombre d'enfants autorisé en fonction de la largeur.

Classe de seconde : deux heures en groupe, suivies par la rédaction d'une synthèse individuelle (30 min).

La première heure a amené les élèves à la compréhension du problème (« entretoise », choix de la forme de l'aire par un rectangle privé d'un côté, calcul de l'aire nécessaire, premiers calculs qui privilégient le carré). Notons que même en seconde, le calcul de la surface nécessaire par la proportionnalité n'est pas immédiat.

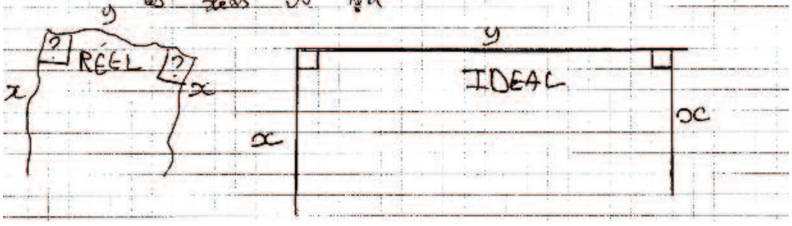
La deuxième heure a commencé par un point oral sur l'aspect « modélisation géométrique », pour mettre en lumière la différence entre le réel et son modèle. Les extraits de travaux d'élèves ci-desssous montrent les traces de ce débat. Les élèves ont ensuite poursuivi leur recherche. La plupart des groupes a pu conclure en traduisant la situation à l'aide d'une fonction et a su montrer que son maximum était inférieur à l'aire voulue. Un groupe a écrit un système, dont la résolution l'a conduit à une équation du second degré résolue comme précédemment par la fonction associée. Si certains groupes ont pu reprendre le problème avec un cordon de 28 m, d'autres n'ont pas réussi à aboutir.

Conclusion : avec cette version, on a une première modélisation qui amène le problème concret dans le monde géométrique, et permet de se ramener à la version 2. On peut alors travailler sur cette situation modélisée et mettre en œuvre les calculs qui pourront conduire au concept de fonction.

1) On ne peut pas materialiser la réalité sur un plan, alors on shématise.
Pour cela nous avons légerement modifier la réalité en mettant des côtés de longueurs identiques et des angles droits car en maths tout doit être précis au millimètre près alors que dans la réalite rien n'est exact (ligne de bain de travers, les angles égal à ~ 90°)

Monde réel et modélisation géométrique avec les mots d'élèves de seconde

pour trouver une aire parfaite
(ce) qui ne prend pas en compte les problème de
Réel [mouvement de l'eau qui pousse les lignes ; pas
d'angles droit à coup sûr]) on donne
quelque chose d'idéal qui ne considère
les désirs du réel



Confrontation du réel et de l'idéal

Bilan : comparaison des trois versions

Finalement, entre la première version et la troisième, on voit que le rôle du concret dans la présentation du problème est inversé :

- dans le première version, on présente une situation pseudo-concrète pour justifier de l'utilité des connaissances apprises ; il s'agit d'un **habillage concret d'un problème mathématique**.

- dans la troisième version, on présente une situation concrète pour interroger le modèle autorisant l'utilisation des connaissances ; il s'agit d'un **habillage mathématique d'un problème concret**, autrement dit une modélisation.

Le travail est ainsi en deux temps : d'abord une modélisation géométrique qui permet d'épurer les objets réels pour obtenir des objets géométriques, qui permet ensuite de travailler sur ces objets dans le cadre interne des mathématiques.

- la deuxième version est intermédiaire, elle présente une situation pseudo-concrète qui permet l'exploration et l'initiative (avec la possibilité d'une approche numérique par essais-rectifications et pas seulement le traitement expert par les fonctions), menant à l'utilisation des connaissances. Ce n'est déjà pas si mal. C'est souvent ce type d'énoncé que nous qualifions de « situation-problème ».

Problème concret

modélisation

Situation-problème

découpage

Problème à questions enchaînées

Les différentes versions n'amèneront pas les mêmes apprentissages.

À chaque objectif, sa version ?