Au collège comme au lycée : une activité sur les connecteurs ET et OU

Groupe « Logique » de l'IREM de Paris 7

Après cette présentation et l'analyse de manuels de seconde, peut-être vous demandez-vous comment il est possible de travailler concrètement ces notions en classe. En lycée comme en collège, l'activité que nous propose le Groupe Logique de l'IREM de Paris peut se décliner à loisir et offre une intéressante réflexion didactique. Nous vous laissons la découvrir...

Les nouveaux programmes de lycée comportent à nouveau explicitement quelques notions de logique. Un groupe « Logique » a été créé à l'IREM de Paris en 2009, réunissant des enseignants du secondaire, des universitaires mathématiciens, logiciens, didacticiens. Dans la rubrique « La parole à... », nous sommes revenus sur les objectifs du programme, sur la définition et l'utilisation des connecteurs ET et OU, et sur quelques exercices extraits de manuels de Seconde. Dans ce second article, nous présentons une activité proposée dans une classe de sixième. On y aborde les connecteurs ET et OU qui font justement partie des nouveautés des programmes du lycée. Nous présentons ensuite les discussions autour de l'activité initialement proposée, et une proposition nouvelle qui s'ensuit.

Présentation de l'activité

Pour concevoir l'activité, nous sommes partis de l'exercice suivant, proposé par un membre du groupe dans sa classe de 6ème, autour des critères de divisibilité et des connecteurs ET et OU :

1) Recopier et compléter la propriété suivante :
Les nombres entiers divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 … qui sont divisibles par 5.

2) a) 315 est-il divisible par 2 ?
b) 315 est-il divisible par 5 ?
c) 315 est-il divisible par 10 ?

3) a) 4864 est-il divisible par 2 ?
b) 4864 est-il divisible par 5 ?
c) 4864 est-il divisible par 10 ?

4) En vous inspirant de la propriété du 1), comment pouvez-vous caractériser les nombres qui ne sont pas divisibles par 10 ?

Nous avons discuté collectivement de l'exercice en lui-même, regardé les réponses des élèves, puis élaboré une nouvelle activité s'en inspirant, que vous trouverez ci-après. Celle-ci peut, selon nous, être également proposée au lycée, justement pour travailler sur ces connecteurs dans un contexte déjà connu. On pourra alors selon le niveau formaliser plus ou moins les règles qui apparaissent dans cette activité.

Exercice 1

1) Rappeler la propriété vue en cours concernant les nombres entiers divisibles par 5 (« critère de divisibilité par 5 »).

2) Comment caractériser les nombres entiers non divisibles par 5 ?

Exercice 2

1) Pour chacun des nombres suivants : 315 ; 4864 ; 730 ; 5610 ; 955 ; 561 et 30,

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 10 et dans le tableau de droite sinon,
- répondre par « oui » ou par « non » aux questions posées dans le tableau.

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

2) Compléter les tableaux suivants en proposant, quand c'est possible, un nombre qui convienne :

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

3) Recopier et compléter les propriétés suivantes pour qu'elles soient vraies :

- Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 ..…… par 5.
- Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui …........... par 2 .... par 5.

L'objectif de l'exercice 1, pour le professeur de sixième, est de bien faire comprendre le critère de divisibilité par 5 en demandant aux élèves de formuler sa négation. Ce qui revient à écrire la négation d'une proposition contenant le connecteur OU.

Pour l'exercice 2 il s'agit, à partir des critères de divisibilité par 2 et par 5, d'élaborer un critère de divisibilité par 10, puis d'en prendre la négation. Ce qui revient maintenant à écrire la négation d'une proposition contenant le connecteur ET.

Les critères de divisibilité sont une occasion de travailler sur l'idée de caractérisation, derrière laquelle il y a la notion d'équivalence. L'utilisation de l'expression « si et seulement si » est prématurée en sixième, mais c'est tout de même ce qui est sous entendu dans une caractérisation et c'est l'occasion de souligner avec les élèves les 4 inférences possibles à par-

tir de : de A je peux déduire B, de B je peux déduire A, de NON(A) je peux déduire NON(B), de NON(B) je peux déduire NON(A).
Le déroulement de cette activité a été pensé avec des alternances de travail individuel (ou en groupes) et de phases de mise en commun. Notamment, une mise en commun et une discussion autour des réponses au premier exercice est importante avant le second exercice. Selon le niveau auquel l'activité est proposée, on pourra plus ou moins formaliser les propriétés des connecteurs ET et OU qui auront été vues.

À propos du premier exercice

La formulation de la caractérisation des nombres entiers non divisibles par 5 attendue par le professeur dépend de la formulation du critère de divisibilité par 5 énoncé dans le cours.
Une formulation couramment rencontrée est (1) : « Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ». C'est une proposition vraie mais elle ne caractérise pas les entiers divisibles par 5. Le manuel *Nouveau Prisme* utilise cette formulation, mais précise avant ce qu'est un critère de divisibilité :

Définition : un critère de divisibilité est une règle qui permet de savoir si un nombre entier a est divisible (ou n'est pas divisible) par un nombre entier b différent de 0, sans effectuer de division.

Extrait du manuel Nouveau Prisme 6^{e}, Belin, 2009

Cette définition permet de commenter le sens particulier du « si » dans la formulation (1), qui a alors, dans le cas particulier d'un critère de divisibilité, le sens d'une équivalence. Vues les confusions fréquentes entre implication et équivalence, associer le terme « si » à ces deux notions, comme c'est effectivement le cas dans le langage courant, nous paraît inopportun.

Pour caractériser la divisibilité par 5, certains manuels complètent la formulation (1) pour exprimer également la réciproque de l'implication. Par exemple (c'est nous qui mettons en italique la partie qui exprime la réciproque) :

Un nombre entier est divisible par 5 quand son chiffre des unités est 0 ou 5 *et uniquement dans ce cas*.

Extrait du manuel Hélice 6^{e}, Didier, 2009

Ou encore :

Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5 alors il est divisible par 5. *Sinon, il ne l'est pas*.

Extrait du manuel Phare 6^{e}, Hachette, 2009

Notons que dans ces extraits, la réciproque n'est pas donnée sous la forme « si un nombre entier est divisible par 5, alors son chiffre des unités est 0 ou 5 », mais sous sa forme contraposée « si le chiffre des unités d'un nombre entier n'est pas 0 ou 5, alors il n'est pas divisible par 5 ». Quelle que soit la formulation choisie, l'important est de faire comprendre aux élèves que cette caractérisation cache 4 implications, c'est-à-dire signifie tout à la fois :
« Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ou 5 alors il est divisible par 5 »,
« Si un nombre entier est divisible par 5 alors son chiffre des unités est 0 ou 5 »,
« Si le chiffre des unités d'un nombre entier n'est pas 0 ou 5 alors il n'est pas divisible par 5 »
« Si un nombre entier n'est pas divisible par 5 alors son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5 ».

Une formulation possible pour cette caractérisation est (2) : « Les nombres entiers divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités est 0 ou 5 ». Elle permet de signifier la caractérisation en une seule phrase comportant un seul bloc. Mais elle utilise le terme « dont » qui n'est pas maîtrisé par la plupart des élèves de sixième. Là encore, afin d'expliquer le sens de ce terme, et plus globalement de l'expression « sont ceux dont », le détour par les 4 implications suggérées est éclairant.

La difficulté de la question 2) de l'exercice 1 est de donner la négation d'une proposition contenant le connecteur OU. On pourra recueillir les différentes réponses des élèves pour les comparer et les commenter avec eux.
Au préalable, le professeur devra sans doute donner quelques explications sur l'expression « entier non divisible par 5 » : une telle expression, courante en mathématiques, est peu courante en français et n'est probablement pas comprise par des élèves de sixième.
Une première réponse possible est « Les nombres entiers non divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5 » (ou « si un nombre entier est non divisible par 5 alors son chiffre des unités n'est pas 0 ou 5 » si la formulation retenue est la (1)). Cette proposition est ambiguë, « son chiffre des unités n'est pas 0 ou 5 » peut également être compris comme « son chiffre des unités n'est pas 0 ou n'est pas 5 », ce qui est vrai pour tous les nombres (qu'ils soient ou non divisibles par 5) ! Il vaut donc mieux ne pas rester sur cette formulation.
Une autre formulation possible est « Les nombres non divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5 ». Cette formulation proche du langage courant est sans ambiguïté mais présente l'inconvénient de cacher le connecteur ET. Il nous semble important de dire qu'elle a le même sens que celle-ci : « Les nombres non divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités n'est pas 0 et n'est pas 5 non plus » qui n'apparaîtra peut-être pas dans les réponses des élèves.
Une autre réponse correcte est « Les entiers non divisibles par 5 sont ceux dont le chiffre des unités est 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9 ». Cette formulation est un équivalent qui utilise le fait que le chiffre des unités est 0, 1, 2, 3, … ou bien 9. Elle ne peut pas être obtenue seulement à partir de considérations d'ordre logique.

Travailler sur la négation d'une propriété ou d'une définition permet de mieux la comprendre.
Lors de l'introduction d'une notion, il est bon de donner un exemple d'objet ayant la propriété étudié et de donner un exemple d'objet n'ayant pas cette propriété. Il est souvent possible et intéressant de faire formuler la négation de la propriété.
Comprendre une propriété ou une définition c'est être capable de reconnaître si elle s'applique ou non et, par conséquent, de travailler aussi sur sa négation (de façon explicite comme dans cet exercice ou de façon implicite en ne traitant que des exemples).
Pour le critère de divisibilité par 5 :

435 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
760 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 0.
552 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.

À propos du deuxième exercice

Le but de la question 1 est de faire prendre conscience aux élèves que, pour les nombres divisibles par 10, il y aura systématiquement des OUI dans les deux colonnes et que, pour les nombres non divisibles par 10, il y a trois possibilités NON/NON, NON/OUI et OUI/NON. La question qui vient alors est de savoir s'il peut y avoir autre chose dans ces

tableaux, ce qui est l'objet de la question 2. Les tableaux de la question 2 sont à rapprocher (dans la tête du professeur !) de la table de vérité des connecteurs ET, OU.
Ces questions 1 et 2 introduisent la question 3.
Dans le cours, le seul critère de divisibilité par 10 ayant été vu est la caractérisation par le chiffre des unités égal à 0.

Dans la question 3, pour la première propriété, on attend des élèves qu'ils complètent les pointillés par « et ». Attention à corriger une formulation comme « Les nombres entiers divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et ceux qui sont divisibles par 5 » (ici le « et » n'est pas un et-connecteur[1]). Cette formulation est synonyme de « Les nombres entiers divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 ou par 5 », cela correspond à deux manières de décrire quels sont les éléments appartenant à une réunion de deux ensembles.

Pour la deuxième propriété à compléter, la difficulté est maintenant de donner la négation d'une proposition contenant le connecteur ET.
Comme dans l'exercice 1, différentes réponses seront probablement données par les élèves.
Une première formulation est obtenue en prenant simplement la forme négative de chaque partie de la phrase : « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 et par 5 ». Cette formulation, apparemment la plus simple possible, est ambiguë, elle peut être comprise comme « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 et qui ne sont pas divisibles par 5 », c'est-à-dire « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 », ce qui est faux.
Une formulation correcte est « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou qui ne sont divisibles par 5 ». Il faut veiller à corriger des formulations comme « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou bien qui ne sont divisibles par 5 » ou encore « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont soit ceux qui ne sont pas divisibles par 2 soit ceux qui ne sont divisibles par 5 ». Le « ou bien », tout comme le « soit...soit... » indique un OU exclusif.
Finalement, nous pouvons voir que faire une phrase avec « les nombres entiers qui sont / qui ne sont pas divisibles par 10… » amène des formulations ambiguës par rapport au ET et au OU. Dans une classe où il est possible de parler d'équivalence, on pourra parler d'équivalence de propriétés : « être divisible par 10 » est équivalent à « être divisible par 2 ET être divisible par 5 », « être non divisible par 10 » est équivalent à « être non divisible par 2 OU être non divisible par 5 », ce qui fait mieux ressortir les lois de Morgan.

Une variante de cet exercice serait de s'intéresser à un critère de divisibilité par 6 au lieu de 10.

S'il utilise cet exercice dans une classe de lycée, le professeur peut conclure l'activité en énonçant les lois de Morgan qui, bien que n'étant pas explicitement au programme, peuvent être utiles, notamment pour vérifier la cohérence lors de la formulation d'une négation ou la recherche d'un contre-exemple, et sont parfois même indispensables comme dans certains exercices de probabilités.

[1] Il y a une différence subtile entre les deux propositions « les x qui sont P sont ceux qui sont Q et qui sont Q' » et « les x qui sont P sont ceux qui sont Q et ceux qui sont Q' ». Dans la première, le « et » peut être assimilé à un connecteur propositionnel, elle signifie que P est égal à l'intersection de Q et de Q', dans la deuxième, le « et » ne peut pas être assimilé à un connecteur propositionnel, elle signifie que P est égal à la réunion de Q et de Q'.