Les connecteurs ET et OU dans les programmes de lycée

Groupe « Logique » de l'IREM de Paris 7
(responsable : Zoé Mesnil)

Article théorique OU article appliqué ? PLOT a choisi de ne pas choisir, utilisant notre célèbre OU inclusif et mathématique, et vous présente donc deux articles du Groupe Logique de l'IREM de Paris. Ils peuvent se lire à la suite ou séparément, chacun étant le pendant et la raison d'exister de l'autre.

Les nouveaux programmes de lycée comportent à nouveau explicitement quelques notions de logique. Un groupe « Logique » a été créé à l'IREM de Paris en 2009, réunissant des enseignants du secondaire, des universitaires mathématiciens, logiciens, didacticiens. Nous présentons dans la rubrique « Partageons nos expériences » une activité proposée dans une classe de sixième. On y abordera les connecteurs ET et OU[1] qui font justement partie des nouveautés des programmes du lycée. Mais revenons d'abord sur les objectifs du programme, sur la définition et l'utilisation des connecteurs ET et OU, et sur quelques exercices extraits de manuels de seconde.

[1]Le « ET » en majuscule est le connecteur logique, le « et » en minuscule une conjonction de coordination. Nous reviendrons plus en détail sur cette distinction essentielle. L'utilisation des majuscules permet une distinction typographique bienvenue, et permet d'éviter l'utilisation des symboles .∧. , .∨.

Connecteurs ET/OU dans les nouveaux programmes de mathématiques pour le lycée.

Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2001 soulignait déjà que « *le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée* ». Cela marquait une rupture avec le précédent programme de 1990, qui précisait en gras que « *tout exposé de logique mathématique est exclu* ». Dans les nouveaux programmes, l'importance d'un travail sur la logique est réaffirmée dans un paragraphe intitulé ***Raisonnement et langage mathématiques***, et des objectifs concernant certaines notions de logique sont donnés dans un tableau comme pour les autres notions du programme. Par exemple, concernant les connecteurs logiques ET et OU, le programme demande d'« *entraîner les élèves, sur des exemples, à utiliser correctement les connecteurs « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel* ». Nous allons voir que cette distinction dépasse largement la classique distinction « ou » inclusif / « ou » exclusif.

Le programme de seconde de 2009 précise que « *les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme* » ; ceux de Première et Terminale ajoutent : « *il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonne-*

ment, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation ». Il n'est donc pas question de proposer, comme on a pu le voir au temps des maths modernes, un chapitre 0 de logique (même si les instructions complémentaires au programme de Seconde de 1969 précisaient déjà que le chapitre « *langage des ensembles* » « […] *fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique,* ***à tout moment****, dans la suite du cours* »). La plupart des manuels publiés pour la rentrée 2010 pour la classe de seconde proposent des pages « Notations et raisonnement » dans lesquelles sont exposées les notions de logique évoquées par le programme. Ces pages, comme celles concernant l'algorithmique, relèvent plus du « glossaire » que d'un cours.

Comment donc enseigner des notions de logique, non pas pour elles-mêmes, mais afin qu'elles soient correctement utilisées dans l'activité mathématique, tant au niveau du langage que du raisonnement ? Nul ne le sait vraiment, tout ou presque est à inventer. Encore faut-il avoir les idées claires sur les notions évoquées dans le programme : connecteurs ET et OU, négation, propositions conditionnelles, équivalence, types de raisonnement… Ce sont des notions omniprésentes en mathématiques, mais on peut être allé très loin dans cette discipline sans s'être jamais interrogé à leur sujet. Par exemple, faut-il définir les connecteurs logiques ET et OU ? Si oui, comment ? La lecture des manuels de seconde de 2010 confirme que les réponses à ces questions ne sont pas si simples[2].

Que sont les connecteurs logiques ET, OU dans le langage mathématique ?

Le mathématicien observe un monde d'objets mathématiques et cherche à en découvrir certaines propriétés. Les **propositions** énoncent des faits concernant ces objets. Cela a donc un sens pour des propositions de se demander si elles sont vraies ou fausses. Par exemple, « tous les multiples de 4 sont pairs » est une proposition vraie, « tous les multiples de 3 sont pairs » est une proposition fausse, « considérons un entier multiple de 4 » n'est pas une proposition (cela n'a pas de sens de se demander si cette phrase est vraie ou fausse).

Beaucoup de propositions contiennent des **variables**. Une variable est une lettre, éventuellement affectée d'indice(s). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais a vocation à désigner des objets pris dans un certain domaine (on dira alors que la variable est *astreinte* à ce domaine). Considérons par exemple la proposition « n est pair », dans laquelle la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels. Elle donne une propriété de n, nous pouvons dire qu'elle « parle de n ». La variable n est *libre* (on dit aussi *parlante*). Mais nous ne pouvons pas déterminer si la proposition est vraie ou fausse par manque d'informations sur n. Si nous savions par ailleurs que n est un multiple de 4, nous pourrions dire que la proposition est vraie. Nous pouvons obtenir une nouvelle proposition, qui ne contient plus de variable libre, en remplaçant la variable n par un entier naturel. Il est alors possible de déterminer

[2] Le groupe « Logique » de l'IREM de Paris 7 a rédigé des textes à partir d'une lecture des manuels de seconde, disponibles sur leur site.

sa valeur de vérité, sous réserve des connaissances mathématiques nécessaires (qui ici ne sont pas très compliquées). Considérons maintenant la proposition « pour tout n, si n est un multiple de 4 alors n est pair », dans laquelle la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels. Cette proposition ne donne pas une propriété de n, mais une propriété (vraie) de l'ensemble des entiers naturels. La variable n est *muette* (on dit aussi *liée*). Dire que cette proposition est vraie, c'est dire que toutes les propositions obtenues en remplaçant la variable n par un entier naturel sont vraies. D'autres signes ont pour effet de rendre une variable muette, par exemple le signe d'intégrale, la flèche de fonction[3]…

Les **connecteurs logiques** sont des éléments du langage mathématique. Du point de vue de la syntaxe[4], ce sont des opérateurs sur les propositions : ils permettent, à partir d'une (pour le connecteur NON) ou deux (pour les connecteurs ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À) propositions, d'en obtenir une nouvelle. Il y a là une distinction fondamentale avec d'autres usages des termes « et », « ou » :

- dans la proposition « Pierre et Paul sont les frères de Jean », « et » joue clairement le rôle d'un connecteur logique. Celle-ci est en effet synonyme de « Pierre est le frère de Jean et Paul est le frère de Jean », qui est une conjonction de deux propositions[5].
- en revanche, la proposition « Pierre et Paul sont frères » ne résulte pas de la conjonction de deux propositions. Ce « et » ne peut pas être considéré comme un connecteur logique. Nous pourrions dire que c'est un et-couple, il sert à lier les deux éléments auxquels s'applique la propriété (ici) binaire « être frères ».

En mathématiques aussi, on rencontre des et-connecteurs : « 2 et 7 sont des nombres premiers », et des et-couple : « 2 et 7 sont premiers entre eux ».

Quand un élève écrit sur sa copie :

pour tout réel x,

$$(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow (x=1 \, ou \, x=3) \quad (1)$$

puis conclut :

les solutions de l'équation

$(x - 1)(x - 3) = 0$ sont 1 et 3 (2),

il n'a pas transformé le connecteur logique OU en connecteur logique ET. Si le « ou » utilisé dans (1) est bien le connecteur logique, le « et » utilisé dans (2) est une conjonction de coordination utilisée pour lister les éléments d'un ensemble (nous pourrions parler ici de et-énumération). Il est notamment important de remarquer que la proposition (2) n'est pas équivalente à : la solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$ est 1 et la solution de l'équation est 3 car le terme « la » suppose l'unicité. Mais la proposition (2) n'est pas non plus équivalente à :

une solution de l'équation

$(x - 1)(x - 3) = 0$ est 1

et une solution de l'équation

$(x - 1)(x - 3) = 0$ est 3

car, même si ces deux propositions sont vraies, leur conjonction n'indique pas que ce sont les seules solutions, information supplémentaire présente dans la proposition (2). Une proposition équivalente à la proposition (2) est :

1 est solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$

et 3 est solution de l'équation $(x - 1)(x - 3) = 0$

et ce sont les seules.

Repérer les connecteurs logiques dans les propositions, et les différencier des « et », « ou » qui n'en sont pas, est un bon exercice. Pour le professeur comme pour l'élève, cela permet de déceler la complexité logique que peut cacher une for-

[3] Vous trouverez plus de détails sur ces notions dans les notes du cours « Langage Mathématique » proposé en première année des parcours Math, Info, Math-Info sur le site de l'Université Paris-Diderot.

[4] La syntaxe s'occupe de la construction des expressions mathématiques, la sémantique s'occupe de leur sens.

[5] Cette pratique de mise en facteur dans le langage usuel est très courante. Il nous semble important de le signaler aux élèves, pour qui il peut ne pas être évident que « 2 et 4 sont pairs » est la conjonction des deux propositions « 2 est pair » et « 4 est pair ».

mulation d'apparence simple. Par ailleurs, la structure logique d'une proposition peut fournir une aide utile pour la démontrer ou la faire intervenir dans une démonstration. L'utilisation de majuscules est un moyen de distinguer connecteurs logiques et simples conjonctions. Attention, l'exercice n'est pas toujours si facile : entraînez-vous avec la proposition « les ensembles *A* et *B* sont non vides et disjoints[6] » ! Nous pouvons voir que pour repérer les « et » et les « ou » qui correspondent à des connecteurs logiques, il importe de comprendre le sens des mots qui les entourent. Cela ne va pas toujours de soi pour les élèves, ni pour nous d'ailleurs.

D'un point de vue sémantique, chaque connecteur est défini par son comportement par rapport aux valeurs de vérité. C'est-à-dire qu'un connecteur, par exemple binaire, est associé à une fonction qui prend en argument les valeurs de vérité de deux propositions, et renvoie la valeur de vérité de la proposition obtenue en leur appliquant le connecteur. On résume souvent ce comportement dans une *table de vérité* comme celle-ci :

A	**B**	**A** ET **B**	**A** OU **B**
VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX	VRAI
FAUX	VRAI	FAUX	VRAI
FAUX	FAUX	FAUX	FAUX

[6] Synonyme de « l'ensemble *A* est non vide ET l'ensemble *B* est non vide ET les ensembles *A* et *B* sont disjoints »

La plupart des manuels qui donnent une définition des connecteurs ET et OU ne font pas de distinction entre les aspects syntaxique et sémantique.

Exemple n° 1 :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Extrait du manuel Symbole Math 2^{e}, BELIN, 2010

Les auteurs de ce manuel ont clairement voulu donner les tables de vérité des connecteurs ET et OU, mais sans utiliser cette présentation jugée peut-être trop formelle (et en tout cas pas dans la ligne des programmes !). Mais ils se retrouvent face à plusieurs difficultés. La première concerne la distinction que nous avons déjà évoquée entre ET-connecteur, et-couple, et-conjonction. Dans la définition de la conjonction, le premier « et » correspond effectivement au connecteur logique ET, celui-ci pourrait être remplacé par le symbole $.\wedge.$. Le deuxième « et » a été remplacé par une virgule, sans doute pour éviter d'avoir 3 occurrences de ce même terme. Le troisième « et » est un et-conjonction de la langue française. Au delà du comportement par rapport aux valeurs de vérité, ce qu'il y a d'essentiel à comprendre dans cette définition, c'est cette différence entre le premier et le troisième « et ». Ici ils sont mis tous les deux en gras, pour souligner la concordance entre les deux « et » dans la définition de la conjonction, entre les deux « ou » dans la définition de la disjonction. Mais la distinction entre le ET-connecteur entre **P** et **Q** et le et-conjonction entre **P est vraie** et **Q est vraie** nous paraît plus importante à souligner. Deuxième difficulté, l'utilisation des termes « lorsque », « si » dans les définitions qui ont alors valeur d'équivalence. C'est une pratique courante. Mais un peu plus loin dans les pages sur les notions de logique, il va être question du « si … alors » qui exprime une implication, qu'il ne faut pas confondre avec le « si et seulement si » qui exprime une équivalence. L'utilisation du terme « si » dans une définition, qui exprime alors une équivalence, risque alors d'amener de la confusion. L'intention est louable de ce manuel de vouloir donner une définition effective des connecteurs ET et OU, mais on voit qu'il faut redoubler de prudence sur le vocabulaire à utiliser. Et l'on peut se demander si une table de vérité n'est tout de même pas une façon plus simple de donner le comportement par rapport aux valeurs de vérité.

Quant à l'exemple qui suit cette définition, il nous paraît inopportun, et l'explication qui l'accompagne est désastreuse. Alors que dans la définition il avait été judicieusement question de propositions, elles n'apparaissent pas explicitement dans cet exemple. Tout d'abord, dans la conjonction « le triangle ABC est rectangle et isocèle », il y a une mise en facteur qui est passée sous silence. Et quand le manuel veut exhiber les propositions utilisées pour former la conjonction, ce qui est entre guillemets (« être rectangle », « isocèle »), ce ne sont pas des propositions ! « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est la conjonction des propositions « le triangle ABC est rectangle » et « le triangle ABC est isocèle ». Il y a certes là une impression de répétition, mais c'est la seule façon d'être exact.

D'autres manuels ne donnent pas vraiment de définition ; ils se contentent de préciser l'utilisation de « et », « ou » en mathématiques.

Exemple n° 2 :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
- « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
- « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
- « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
- « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».

Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)

« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)

La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Extrait du manuel Maths 2^{de}, collection Indice, BORDAS, 2009

Ce manuel donne à partir d'exemples le comportement des connecteurs ET et OU par rapport aux valeurs de vérité. Il est sans doute indispensable de partir d'exemples, d'illustrer avec des exemples, mais ces exemples ne peuvent pas tenir lieu de définition. C'est pourtant le cas puisqu'ensuite les élèves se voient proposer l'exercice suivant :

Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs ... inférieurs à 10.
b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ... inférieurs à 10.
c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 ... par 2.
d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 ... de 5.

Notons au passage qu'il est implicite qu'il faut compléter les phrases pour qu'elles soient vraies ! C'est malheureusement toujours le cas dans ce genre d'exercice, ce qui encourage la tendance des élèves à considérer les propositions comme des assertions. C'est-à-dire qu'une proposition n'est pas vue seulement comme un élément du langage mathématique, à propos de laquelle on peut se demander d'une part si elle est « bien écrite », d'autre part si elle est vraie ou fausse. Une proposition est généralement vue comme un acte de langage : l'énoncer, c'est affirmer sa vérité. L'utilisation de « soit … soit … » suggère qu'on attend une seule bonne réponse. Dans le livre du professeur, le corrigé ne donne effectivement qu'une seule réponse pour chaque phrase, par exemple « et » pour la question c. Or, si « **A** ET **B** » est vraie, alors « **A** OU **B** » est vraie. Une stratégie efficace est donc de compléter partout avec des « ou » ! Mais cette stratégie va à l'encontre d'un principe de la communication dans la vie courante : le principe du maximum d'information, qui veut que, quand un locuteur m'informe sur un fait, il m'apporte la totalité des renseignements dont il dispose relativement à ce fait. L'application de ce principe explique la réticence bien connue des élèves à considérer que $3 \leq 5$ est vraie, puisqu'ils savent bien que $3 < 5$.

Savoir que « **A** ET **B** » est vraie donne plus d'informations que de savoir que « **A** OU **B** » est vraie, on donne donc naturellement la première réponse, et on peut considérer qu'il y a faute par rapport au contrat de communication si l'on se contente de dire « **A** OU **B** » alors que l'on sait « **A** ET **B** ». Mais en ce qui concerne la vérité des ces phrases, « **A** ET **B** » n'est pas « plus vraie » que « **A** OU **B** », il n'y a donc pas de raison de la privilégier comme bonne réponse.

Une dernière remarque, sur l'utilisation des virgules à la place des connecteurs : dans le langage courant, les virgules peuvent remplacer parfois un « et », parfois un « ou » (Pierre, Paul et Jacques ; lundi, mardi ou mercredi). Dans cet exercice, les virgules doivent évidemment être interprétés comme des « et ». Il aurait d'ailleurs été plus correct de remplacer à chaque fois la dernière virgule par un « et » mais on comprend les scrupules des auteurs qui n'ont sans doute pas voulu amener de confusion entre ce « et » et celui éventuellement attendu à la place des pointillés. La phrase b. complétée

NDLR : Zoé Mesnil, membre du Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris-Diderot, a animé un atelier aux Journées Nationales de l'APMEP à Metz. L'équipe PLOT l'a sollicitée pour écrire un article sur le contenu de son atelier.

avec un « et » est évidemment fausse. Regardons ce qui se passe avec un « ou » : « 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ou inférieurs à 10 ». On peut tout à fait interpréter cette proposition des deux manières suivantes :
- d'une part comme :

(2 est un multiple de 3 OU 2 est inférieur à 10)

ET (3 est un multiple de 3 OU 3 est inférieur à 10)

ET (6 est un multiple de 3 OU 6 est inférieur à 10)

ET (18 est un multiple de 3 OU 18 est inférieur à 10)

- d'autre part comme :

(2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3 ET 18 est un multiple de 3)

OU

(2 est inférieur à 10 ET 3 est inférieur à 10 ET 6 est inférieur à 10 ET 18 est inférieur à 10)

La présence des virgules amène une ambiguïté car les deux interprétations possibles ne sont pas équivalentes (il est facile de s'en apercevoir : la première proposition est vraie, la deuxième proposition est fausse).
Nous avons ici utilisé les propriétés suivantes des connecteurs ET et OU :

Soient **P, Q** et **R** trois propositions. On a :

P ET (**Q** OU **R**) est logiquement équivalent à (**P** ET **Q**) OU (**P** ET **R**)

P OU (**Q** ET **R**) est logiquement équivalent à (**P** OU **Q**) ET (**P** OU **R**)

Deux autres propriétés vont être utilisées dans l'activité qui suit, ce sont les lois de Morgan :
Soient **P** et **Q** deux propositions. On a :

NON(**P** OU **Q**) est logiquement équivalent à NON(**P**) ET NON(**Q**)

NON(**P** ET **Q**) est logiquement équivalent à NON(**P**) OU NON(**Q**)

Donner des propriétés des connecteurs aide à les considérer comme des objets du langage mathématique. Les lois de Morgan sont énoncées dans certains manuels, notamment de Terminale. Cela relève certes d'une certaine formalisation de ces notions de logique, mais cette formalisation ne nous semble pas plus difficile que celle qui accompagne d'autres notions du programme, et nous défendons qu'elle peut être bénéfique pour le travail sur le langage et le raisonnement.