Une liaison 3ème/2nde par la voie des aires

Bénédicte Michel

Je suis enseignante au collège André Malraux, à La Farlède (06). Lors d'une première action de formation en 2010, j'ai rencontré Vanessa Galusinsky, enseignante au lycée du Coudon, à La Garde. Cette première rencontre avait été alors l'occasion de faire le point sur les programmes de 3ème et de 2nde, de les comparer, d'en lister les convergences et les divergences. Ces échanges étaient alors restés assez généralistes. À la rentrée 2012, nous avons choisi de les poursuivre de manière plus efficace pour faire le lien entre les attendus à l'entrée en 2nde et les acquis de fin de 3ème, l'objectif étant de mettre en relief les difficultés récurrentes de certains élèves à l'entrée au lycée et d'y proposer une remédiation.

Le principe : à partir d'un même sujet, travail simultané dans nos classes respectives (sans échange entre élèves) puis comparaison des acquis et difficultés rencontrées dans chaque classe.

1- Les sujets (page 14)

Les deux sujets ne comportent que peu de différences... mais les objectifs de chaque niveau sont différents :

En 3ème :

- Approche intuitive de la notion de fonction (fil rouge).
- Introduction de la notion de courbe représentative d'une fonction.
- Utilisation du logiciel GeoGebra.

En 2nde :

- Notion d'extremum d'une fonction (démonstration).
- Résolution d'équations.
    * À l'aide du graphique
    * Par le calcul.
    * Puis comparaison des résultats.

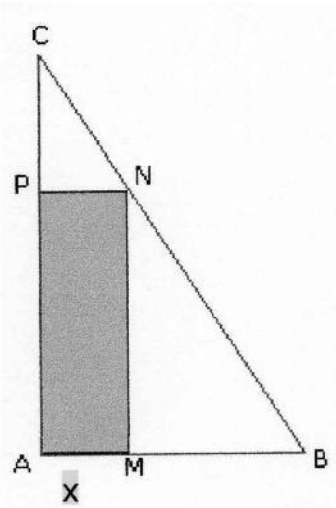
En 3ème, j'ai « aménagé » le sujet au niveau du vocabulaire (par exemple, mes élèves ne connaissent pas encore la notion de « courbe représentative ») et de certaines données (j'ai notamment donné la consigne : « AM = 4 cm (c'est-à-dire AM=2/3 AB) » pour éviter de rajouter une difficulté supplémentaire liée à la fraction). Ces aménagements ne modifient en rien les connaissances et aptitudes mises en jeu dans le travail.

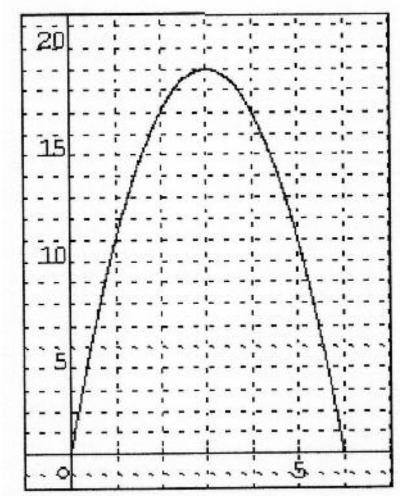
J'ai aussi fait le choix de ne pas demander aux élèves de justifier la conjecture émise dans la question 3, comme cela est fait en 2nde. En effet, l'objectif premier de la séance était une approche intuitive des notions de fonction et courbe représentative. La notion de fonction est un fil rouge de ma progression et, à cette période, n'a pas été abordée autrement que dans des mises en situation (le vocabulaire spécifique des fonctions tel que « image » ou « antécédent » ou encore « représentation graphique » n'a pas été étudié). J'ai donc choisi de me consacrer essentiellement à cet objectif. L'exercice était déjà ambitieux pour des classes très hétérogènes.

En 2nde, ma collègue a fait le choix de donner le graphique dans l'énoncé (ses élèves ayant déjà réalisé plusieurs constructions de ce type, accompagnées de courbes représentatives avec GeoGebra). Elle a par contre ajouté une question sur la recherche du maximum, avec deux vérifications : graphique et numérique.

En 3ème : FONCTION ET AIRE

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 12 cm. Le point M décrit le segment [AB]. Le nombre x désigne, en cm, la longueur AM. On construit le rectangle AMNP où N appartient à [BC] et P appartient à [AC]. On appelle f(x) l'aire, en cm², du rectangle AMNP. On admet que la courbe représente l'aire du rectangle en fonction de x.





1. Faire une figure, placer le point M tel que AM = 4 cm (c'est-à-dire AM = 2/3 AB), tracer le rectangle AMNP et calculer son aire. Retrouver ce résultat sur le graphique en laissant apparents les tracés utilisés.

2. Compléter le tableau suivant :

Longueur AM notée x	0	1	2	2,5	3	4	6
Aire du rectangle f(x)							

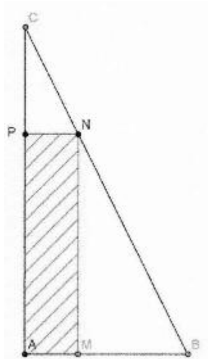
3. Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ? Qu'avez-vous utilisé pour répondre : le graphique, la figure ou le tableau ?

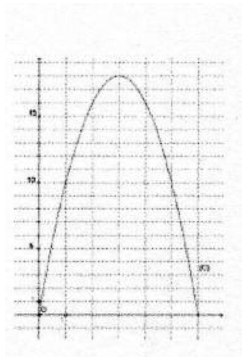
4. Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du rectangle AMNP.

5. Vérifier que f(x) = 18 – 2 (x – 3)². En déduire alors que f(x) ≤ 18.

En 2nde : FONCTION ET AIRE

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 12 cm. Le point M décrit le segment [AB]. Le réel x désigne, en cm, la longueur AM. On construit le rectangle AMNP où N appartient à [BC] et P appartient à [AC]. On appelle f(x) l'aire, en cm², du rectangle AMNP. On admet que (C) est la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).





1. Faire une figure, placer le point M tel que AM = 2/3 AB, tracer le rectangle AMNP et calculer son aire. Retrouver ce résultat sur le graphique en laissant apparents les tracés utilisés.

2. Compléter le tableau suivant : (même tableau que celui des troisièmes colonne précédente).

3. Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale? Qu'avez-vous utilisé pour répondre : le graphique, la figure ou le tableau ?

4. Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du rectangle AMNP.

5. a) Vérifier que f(x) =18 – 2 (x – 3)².

b) En déduire alors que pour tout x réel, f(x) ≤ 18.

c) Justifier la conjecture émise à la question 3).

6. a) Déterminer graphiquement s'il existe des positions du point M pour lesquelles l'aire du rectangle est égale à 27/2 cm². Expliquer la méthode utilisée.

b) Retrouver ces résultats par le calcul.

2- La mise en œuvre

Dans les deux niveaux, nous avons proposé la résolution du problème sous forme de travail en groupes de 3 ou 4 élèves d'une durée de 2 h pour les 2$^{\text{nde}}$, 2 h 30 pour les élèves de 3$^{\text{ème}}$ qui ont réalisé la construction en salle informatique (à raison d'un élève par poste pendant 25 minutes, avec un tutoriel détaillé). Jusque-là, les collégiens n'avaient pas utilisé la partie tableur de GeoGebra en déplaçant un point sur un segment. Ils connaissaient GeoGebra (comme outil de construction) et le tableur, mais indépendamment l'un de l'autre.

Notre aide durant la séance de travail en groupe s'est limitée à les guider à travers les différentes étapes après 15 minutes en autonomie. Notre intervention est restée orale ; nous avons essayé de les faire avancer dans leur raisonnement en exploitant leurs propres idées.

Le bilan de la séance a été tout d'abord fait entre les deux enseignantes, puis nous avons listé avec nos élèves respectifs les points sensibles à retravailler. Collégiens et lycéens ont beaucoup apprécié ce travail basé sur l'échange entre leurs enseignantes (certains lycéens étant ainsi « suivis » par leur ex-professeure de maths).

3- Les acquis et difficultés des élèves

En 3$^{\text{ème}}$

- Certains groupes ont eu beaucoup de mal à trouver la démarche à suivre. En effet, l'enchaînement des différentes notions est problématique. Les groupes n'ont pas su comment démarrer le travail.
- Le calcul littéral est encore difficile à ce stade de l'année pour bon nombre d'élèves :

$$18-2(x-3)^2 = 16(x-3)^2$$
$$= 16\times x - 2\times x\times 3 + 3^2$$
$$= 16x - 6x + 9$$
$$= 10x + 9$$

$$5)\ = 18-2(x-3)^2$$
$$= 18-2(x^2-2\times x\times 3+3^2)$$
$$= 18-2(x^2-6x+9)$$
$$= 18-2x^2-12x+18$$
$$= 2x^2-12x+36$$

- Si la consigne « exprimer en fonction de » n'a pas posé de problème, les élèves ont eu beaucoup plus de difficultés à comprendre que la longueur PA s'exprime aussi en fonction de x et ont donc introduit une deuxième lettre ! Mon rôle a été alors de les guider dans cette étape.

$\mathcal{A}_{AMNP} = x \times PA$
$\mathcal{A}_{AMNP} = PAx$

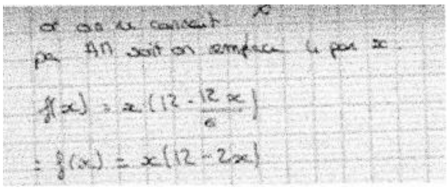
L'aire du rectangle AMNP, en fonction de x, est : PAx

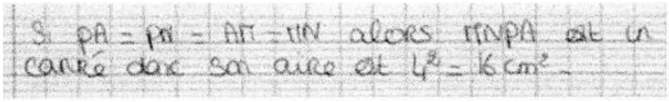
$4)\ f(x) = L \times l$
$f(x) = y \times x$

- Identifier la propriété de Thalès n'a pas posé problème. Nous venions de revoir cette notion ; c'était rassurant !
- La notion de « courbe représentative d'une fonction » avec lecture de x en abscisse et de f(x) en ordonnée est présentée assez naturellement et les élèves se la sont appropriée rapidement.
- La majoration par 18 étudiée à la question 5 n'a été traitée que par une minorité d'excellents élèves (les notions d'équations et d'inéquations n'ont pas été abordées avant ces séances). Je réinvestirai cette partie lors de l'étude des chapitres concernés.

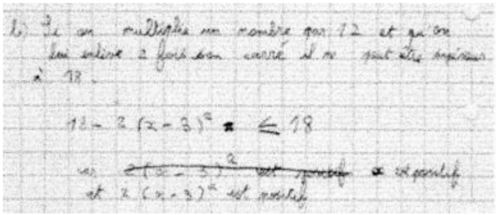
En 2$^{\text{nde}}$

- Certains élèves ont été lents sur la partie géométrique. Les notions géométriques sont maîtrisées, mais la mise en œuvre et la rédaction ont été longues. Comme en 3$^{\text{ème}}$, certains élèves de 2$^{\text{nde}}$ sont gênés davantage par l'enchaînement des notions à utiliser que par les notions elles-mêmes.
- Pour le calcul d'aire avec x quelconque, certains ont répondu dans un premier temps « par analogie ». Deux élèves ont calculé MN, puis l'aire du carré de côté MN.



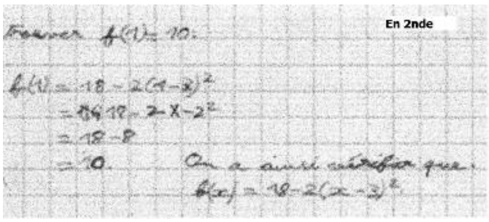


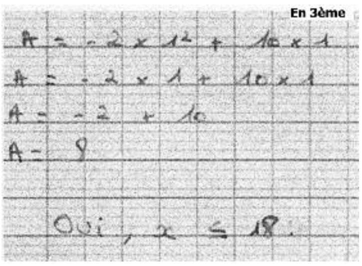
- La notion d'extremum est intuitive... la justification du maximum souvent maladroite (malgré une bonne intuition) !



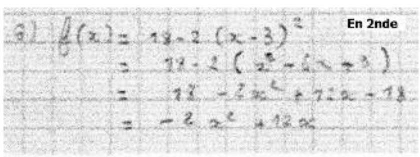
Dans les deux classes

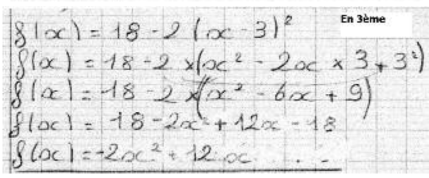
- Les élèves ont souvent utilisé une valeur test pour démontrer une généralité... une difficulté rencontrée chaque année par de nombreux élèves !





- Ils ont eu des difficultés de rédaction pour justifier l'égalité à la question 5.





4- Bilan et remédiation

Cet échange nous a permis de prendre conscience des divergences et convergences de nos attentes, d'anticiper et d'adapter l'enseignement de certaines notions en 3ème.

C'est aussi l'occasion de repérer rapidement les élèves en difficulté en début de 2nde. Un objectif de cet échange est d'essayer d'en limiter le nombre, la réussite de nos élèves, en 3ème puis en 2nde, étant évidemment une de nos premières préoccupations.

Ce type de travail nous a obligées à pointer les difficultés qui persistent à un an d'intervalle. Une fois celles-ci identifiées, il est alors temps de proposer des remédiations adaptées dès la 3ème.

En 3ème

- Proposer d'autres situations-problèmes nécessitant la mobilisation de plusieurs connaissances afin de rendre l'élève plus autonome (soit en travail individuel, soit en travail en groupe), une progression spiralée constituant un outil très précieux pour revenir souvent sur ces points difficiles.

- Retravailler le calcul littéral sous divers formats : calcul mental, tâches complexes…

En 2nde

- Travail individualisé proposé aux élèves en difficulté identifiés lors de cette séance. Comme au collège, ce travail peut être proposé sous forme de travail en groupes durant les heures de cours, en individualisant l'aide apportée aux élèves ainsi qu'en adaptant les attentes aux difficultés rencontrées.

- La notion d'extremum doit être consolidée.

- Résolution d'équation : ce travail a été l'occasion d'un retour sur les équations étudiées au collège, en particulier les équations produits puis les équations du type $x^2 = a$. L'enseignante a pu constater que bon nombre d'élèves de 2nde ne maîtrisaient pas cette résolution.

Dans les deux classes

- Rappeler le plus souvent la différence entre valeur(s) test et preuve d'une généralité. Depuis ce travail, la notion a été rencontrée à nouveau, avec une attention particulière de notre part à tous, élèves et enseignantes.

- Travailler la rigueur de la rédaction dès le collège. Ce travail commence par la rigueur à l'oral : je suis toujours très attentive à ce que les élèves disent et je vérifie qu'ils mettent du sens aux notions évoquées. J'attends d'eux de la rigueur dans l'écriture des calculs mais aussi dans la rédaction des démonstrations, dans la plupart de mes activités. Cependant, j'y suis parfois moins attachée lors de recherche de tâches complexes où je privilégie la prise d'initiative (qui est aussi très souvent problématique).

5- Les perspectives

Depuis cette expérimentation, un autre exercice a été réalisé dans les mêmes conditions ayant pour thème la géométrie plane. Nous envisageons d'élargir ce travail à d'autres notions mathématiques comme les probabilités ou les résolutions d'équations.

Les échanges entre enseignantes sont fréquents, parfois pour préciser les notions indispensables à l'entrée en 2nde (l'utilisation de GeoGebra par exemple) ou pour fixer les attentes concernant la rigueur attendue suivant les notions en début de 2nde (par exemple, les attentes en ce qui concerne la résolution des systèmes d'équations).

Enfin, une rencontre entre nos élèves est prévue au printemps. Elle sera articulée en deux temps : un atelier-débat sur la vie du lycée suivi d'un atelier mathématique basé sur du travail en groupes ou sur l'utilisation d'un logiciel.

Il sera aussi intéressant de voir l'évolution de mes élèves actuels de 3ème lors de leur entrée en 2nde. Cela nous permettra de voir l'efficacité du dispositif, de l'améliorer si nécessaire et de mobiliser nos équipes afin d'étendre cet échange au plus grand nombre d'élèves.