Autour des tétraèdres

Jean Couzineau

Si, à moment donné, nous doutions de la pertinence de notre investissement pour PLOT, voilà un collègue qui nous convainc de persévérer... lisez plutôt le préambule à sa proposition d'article !

Suite à un article de Jean Fromentin sur les Polydrons (2005 - PLOT n° 12, pages 22 à 25), j'avais acheté la panoplie complète des polygones ajourés car ils sont faciles à défaire et il y en a plus à l'achat. Ceci avec mes propres deniers puisqu'étant TZR, si je devais les utiliser, autant qu'ils me suivent. Dans le dernier PLOT (n° 40), un article du même auteur vantant la richesse des Polydrons accolé à celui de la « Gestation d'un numéro de PLOT » m'ont incité à proposer ma modeste contribution. Voici une activité que je propose aux secondes pendant une heure en groupe demi-classe lors du chapitre sur l'espace (2nd trimestre).

Jean Couzineau enseigne au lycée Fustel de Coulanges de Massy (91).

Déroulement de l'activité

Les élèves forment des groupes de quatre. J'évite les groupes de cinq élèves car la concentration et le travail me semblent moins efficaces dans de tels groupes. Comme les *Polydrons* ont 4 couleurs possibles (jaune, rouge, vert, bleu) et qu'il y a quatre sortes de triangles, on peut affecter une couleur pour chaque sorte de triangle dans chaque groupe ; cela peut faciliter le travail des élèves.

Matériel

Pour chaque groupe d'élève, prévoir 14 triangles de chaque sorte (équilatéral grand et petit, rectangle et isocèle). Donner le même nombre de triangles de chaque sorte évite de trop orienter les élèves lors de leur recherche. En fait, il suffit de 8 grands, 8 petits, 14 isocèles et 10 rectangles par groupe.

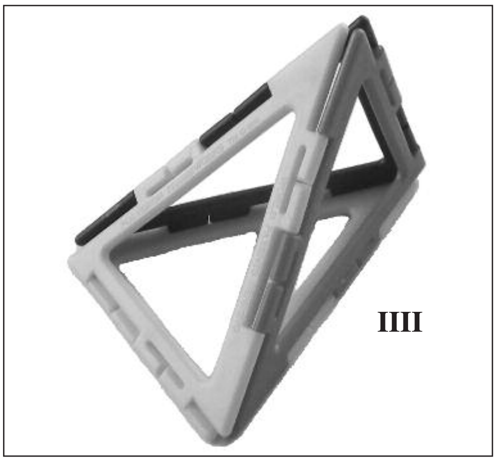
Il vaut mieux disposer d'un bac en carton (couvercle de carton de ramette, par exemple) pour chaque groupe afin d'éviter l'éparpillement du matériel et en faciliter le ramassage.

1ère partie (30 minutes maximum)

Consigne : construire tous les tétraèdres (non aplatis) possibles avec les 4 sortes de triangles.

Les élèves entrent, en général, dans une saine compétition pour trouver les dix tétraèdres possibles ; onze si l'on compte l'image chirale (dans un miroir) de l'un d'entre eux. Je n'ai pas trouvé d'argument satisfaisant pour expliquer qu'il n'y a en pas d'autres, d'ailleurs en aurais-je raté un ?

On peut identifier les tétraèdres selon leurs faces (triangle équilatéral **G**rand et **P**etit, **R**ectangle et **I**socèle), il y a : PPPP, GGGG, IIII, IIIP, RRRG, RRII (deux formes), RRPP, IIGG, RRIP, IIRG.



IIII

2ème partie (jusqu'à la fin de l'heure)

Consigne (au choix) : sur une feuille libre, dessiner le patron OU calculer le volume OU calculer l'aire.

On peut faire travailler tous les élèves en choisissant la difficulté du travail selon l'élève : le professeur passe dans chaque groupe, choisit un tétraèdre et une consigne pour chaque élève. Je ramasse les copies à la fin de l'heure pour que chaque élève fasse sérieusement le travail demandé, des éléments de correction sont donnés ultérieurement en classe entière.

Pour les patrons, il faut être vigilant car certains élèves utilisent l'intérieur des pièces ajourées comme « guide ligne ». Pour les calculs, l'avantage est que « les côtés de toutes les pièces n'ont que deux longueurs : celle du côté du carré et celle de sa diagonale » (Jean Fromentin, Le POLYDRON®, PLOT n° 40 page 11). Je donne $a = 6$ cm comme arête de base. Les longueurs des côtés sont donc 6 et $6\sqrt{2}$, cette seconde longueur pouvant être donnée aux élèves (on peut aussi leur faire facilement démontrer).

Il ne faut pas oublier qu'à la fin de l'heure, les élèves doivent défaire tous les tétraèdres pour le demi-groupe suivant.

Commentaires

Variantes

Selon les préférences de chacun, il y a plusieurs adaptations possibles, je ne les ai pas toutes testées.

- On peut commencer l'heure en corrigeant la question que les élèves avaient à préparer : si les longueurs des côtés sont 1 ou $\sqrt{2}$, combien de triangles différents peut-on construire ?
- Toujours en adaptant la difficulté selon l'élève (choix du tétraèdre), on peut donner la même consigne à tous les groupes.
- On peut évaluer le travail par groupe plutôt que par élève. Par exemple, on choisit un tétraèdre par groupe et on répartit les questions patron/volume/aire selon les élèves (je sais, il y a 3 questions et 4 élèves…)
- On peut étaler l'activité sur deux séances, en laissant les élèves finir le travail chez eux. Les élèves pourraient présenter leurs résultats pendant la deuxième séance.

Le professeur peut ensuite faire une correction ou un bilan sur les techniques de calcul.

Cette activité est sans doute déclinable avec d'autres solides, les prismes par exemple, mais je n'y ai pas encore réfléchi.

Calculs d'aires

Les calculs d'aires sont accessibles à tous les élèves de seconde par Pythagore (il y a plus simple pour le triangle rectangle mais on a besoin de la hauteur par la suite).

En notant b la base du triangle et h sa hauteur, l'aire est $A = \frac{1}{2} \times b \times h$.

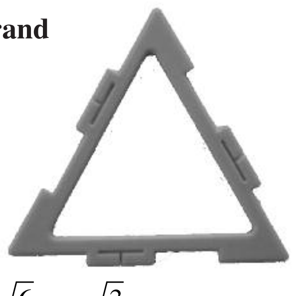
En notant a l'arête de base, on obtient les résultats suivants :

Équilatéral Petit

h = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

A = $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Équilatéral Grand



h = $\frac{\sqrt{6}}{2}a$

A = $\frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Rectangle

h = $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

A = $\frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{2}a^2$

Isocèle

h = $\frac{\sqrt{7}}{2}a$

A =
$\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{7}}{2}a = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2$

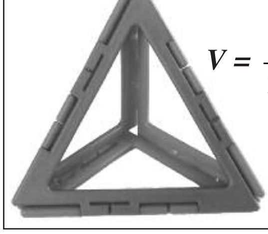
Calculs de volumes

Pour les volumes, les calculs nécessitent quelques étapes et tous les tétraèdres ne présentent pas le même niveau de difficulté. Je donne aux élèves les propriétés nécessaires pour effecteur le calcul des hauteurs des tétraèdres mais ces propriétés ne sont pas démontrées pendant la séance.

On note B l'aire de la base du tétraèdre et H la hauteur du tétraèdre pour avoir le volume $V = \frac{1}{3} \times B \times H$.

En admettant l'orthogonalité de certaines faces, on obtient :

RRRG Base R



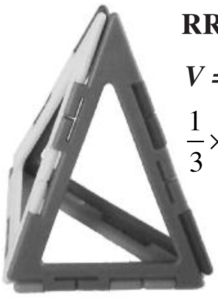
V = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a = \frac{1}{6}a^3$

RRIP Base P

V = $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

IIRG Base R

V = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$



RRPP Base R

$V =$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$$

Pour les tétraèdres ci-dessous, la hauteur H du tétraèdre a pour pied le centre de gravité de sa base (par des propriétés de symétrie du solide). Sachant que le centre de gravité d'un triangle est aux 2/3 de la médiane à partir du sommet, on obtient H par le théorème de Pythagore puis les résultats suivants :

PPPP

$$H = \sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

GGGG

$$H = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{3}a^3$$

IIIP Base P

$$H = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}a$$

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{15}}{3}a=\frac{\sqrt{5}}{12}a^3$$

On peut vérifier, au passage, la cohérence des résultats entre les triangles P et G et les tétraèdres PPPP et GGGG en utilisant le théorème k, k², k³ avec $k=\sqrt{2}$. J'écarte le calcul du volume des trois derniers tétraèdres (IIII, RRII et IIGG) car ils me semblent trop longs.

D'autres activités

À l'époque, j'ai aussi acheté le livre *Mathematics with POLYDRON* qui nécessite quelques efforts puisqu'il est en anglais. Je n'y ai pas vraiment trouvé d'activité directement utilisable en classe, mais certains exemples sont intéressants (construction d'un dodécagone, polyèdres tronqués…). Le livre a le mérite de regrouper des idées intéressantes, qui apparaissent naturellement après quelques manipulations avec les *Polydrons*, des recherches sur internet ou des lectures avisées.