En marche vers la potence

Éric Mounier et Annie Bonnet

L'apprentissage de la division (sens et technique) est un processus long qui s'étale du primaire au collège. Cet article se penche sur la nature des problèmes menant à des divisions (nature à laquelle les professeurs des écoles sont davantage habitués que les enseignants de collège) ; il propose une matérialisation de l'algorithme de division à base de jetons (qui peut être utile au début de l'apprentissage comme dans les cas où cet apprentissage s'est mal fait) et trace pour nous des ponts entre le sens et la technique.

Éric Mounier est enseignant-chercheur (didactique des mathématiques) à l'IUFM de l'académie de Créteil, Université Paris-Est-Créteil (UPEC), Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Paris-Diderot.

Annie Bonnet est formatrice en mathématiques à la retraite, IUFM de l'académie de Créteil.

Cet article prolonge l'atelier éponyme des Journées Nationales de l'APMEP à Grenoble en octobre 2011. Il propose des éléments de réflexion sur la division afin de mieux comprendre les difficultés des élèves et d'envisager des outils pour élaborer des séances. Il s'adresse à tous ceux qui se posent des questions sur ce thème, et en particulier aux enseignants qui sont amenés à le traiter en classe.

Actuellement, l'enseignement de la division débute au CM1 et se prolonge jusqu'en cinquième. Il peut parfois procurer un certain désarroi aux professeurs de collège à qui échoit la part finale de cet apprentissage et qui se sentent démunis.

Les questions abordées dans cet article sont tout d'abord présentées à travers deux problèmes.

Les deux problèmes et l'opération

Problème 1 : Pirates et trésor 1

5 pirates se partagent 634 lingots. Combien chaque pirate aura-t-il de lingots ?

Problème 2 : Pirate et trésor 2

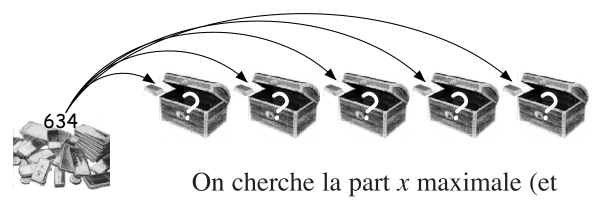
Un pirate veut ranger ses 634 lingots dans des caissettes qui en contiennent 5. De combien de caissettes a-t-il besoin ?

Les deux problèmes peuvent se résoudre grâce à la division euclidienne de 634 par 5.

Partition et quotition

Ces deux problèmes se ressemblent et font appel à la même opération, mais sont pourtant subtilement différents. Le premier problème est du type dit « partition ». Le nombre de parts est connu (ici, c'est 5) et on cherche le montant de la part maximale (identique pour chaque part).

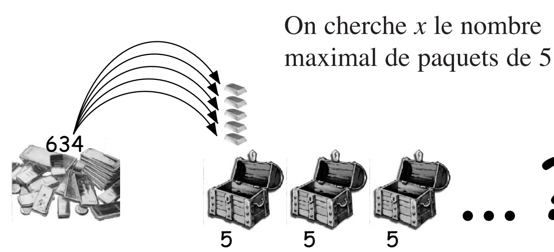
Le résultat peut être obtenu par une distribution d'objets dans des boites (ici 5).



On cherche la part x maximale (et identique) de chacun des 5.

Le deuxième est de type « quotition ». Le montant de la part est connu (ici 5) et on cherche le nombre (maximum) de parts qu'il est possible de faire.

On cherche x le nombre maximal de paquets de 5.



Ce n'est pas une évidence que le nombre x soit le même dans les deux catégories de problème.

Sens et technique

Les deux problèmes précédents peuvent se résoudre en posant une division à l'aide d'une potence.

$$\begin{array}{r|l} 634 & 5 \\ \cline{2-2} 13 & 126 \\ 34 & \\ 4 & \end{array}$$

Avant d'aborder la technique elle-même et son intérêt dans l'apprentissage, une première question se pose : peut-on donner du sens à la division sans maîtriser une technique ? Pour tenter de répondre à cette question, prenons l'exemple d'un problème à une seule étape, sans données inutiles, dans un contexte usuel : cent objets à partager en deux parts égales. Voici trois procédures parmi d'autres :

- convoquer un résultat mémorisé, « cinquante »,
- chercher à répondre à la question « deux fois combien » en faisant des essais de double ou des additions en utilisant les mêmes termes,
- utiliser une calculatrice.

On peut donc résoudre le problème en faisant l'« impasse » de l'utilisation d'une technique opératoire. Plus précisément, selon Gérard Vergnaud, donner du sens à la division, c'est être capable de reconnaître et traiter tous les problèmes qui peuvent être résolus avec une division, mais aussi reconnaître ceux qui ne le peuvent pas. Vergnaud envisage un champ conceptuel, celui de la structure multiplicative, qui englobe les problèmes qui sont susceptibles d'être résolus par une division ou une multiplication. Il donne une classification de ceux-ci à travers une description des classes de problèmes. De ce fait ils englobent aussi les problèmes de proportionnalité.

Quelle place accorder alors à une technique ? Pour donner des éléments de réponse à cette question, nous allons étudier un algorithme de la division effectuée à l'aide d'une potence communément enseigné dans la scolarité. Nous proposons une justification mathématique puis nous envisageons ses liens avec les deux problèmes du début de l'article. Nous contextualisons notre analyse en utilisant l'exemple donné au début de l'article, soit 634 : 5.

Un algorithme et sa justification

634 est vu comme 6 centaines, 3 dizaines et 4 unités. On répartit tout d'abord les 6 centaines en 5. On obtient 1 et il reste 1 (centaine) qu'on transforme en 10 dizaines. On a donc 13 dizaines à répartir en 5 parts égales. On obtient 2 dizaines et il reste 3 (dizaines) que l'on transforme en 30 unités. On a donc 34 unités à répartir en 5 parts égales. On obtient alors 6 unités avec un reste de 4 (unités). L'algorithme ainsi explicité peut justifier la présentation « classique » de la division avec une potence.

$$\begin{array}{r|l} 634 & 5 \\ \cline{2-2} 13 & 126 \\ 34 & \\ 4 & \end{array}$$

Des manipulations simples permettent aux élèves de se l'approprier. En voici un exemple.

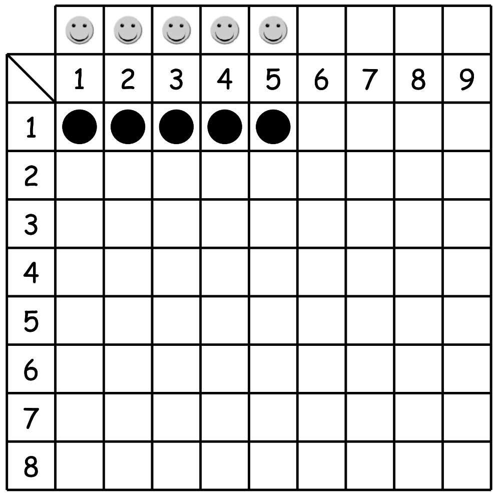
La justification matérialisée pour les élèves

La manipulation ci-après est issue des pratiques de classes « Montessori »*. Elle utilise comme matériel de base un tableau cartonné à 9 colonnes et des jetons de couleur.

* voir note en fin d'article, page 11.

Étape 1 : on distribue les centaines.

On a 6 centaines, on peut en donner une à chacun et il en reste une. 



Au fur et à mesure des actions, on note le résultat pour en garder une trace car le tableau sera nettoyé à chaque fois.

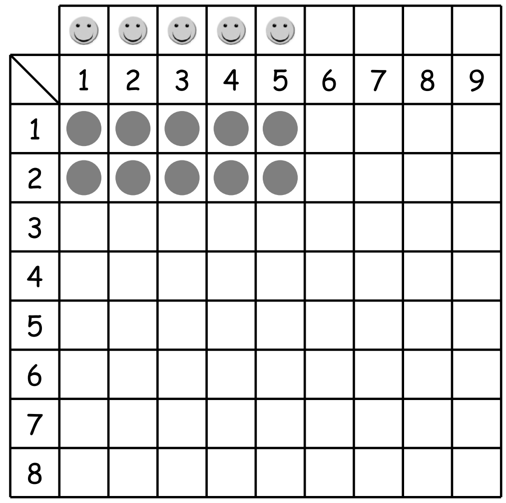
$$\begin{array}{l|l} 6\ 3\ 4 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

Ici les soustractions ne sont pas nécessairement posées, elles le seront par contre quand on ne manipulera plus.

Étape 2 : On vide le plateau. On échange le jeton centaine restant contre 10 jetons dizaines, on en a donc 13 en tout, on le note dans la division, cela explique l'abaissement du 3.

$$\begin{array}{l|l} 6\ 3\ 4 & 5 \\ \cline{2-2} 1\ 3 & 1 \end{array}$$

Étape 3 : On distribue les dizaines. On a donné 2 dizaines à chacun et il en reste 3.

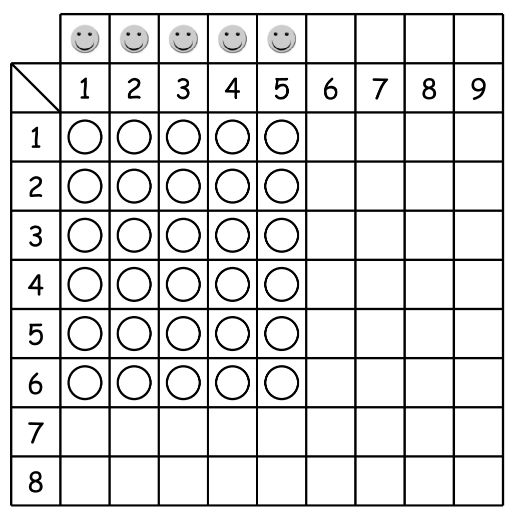


$$\begin{array}{l|l} 6\ 3\ 4 & 5 \\ \cline{2-2} 1\ 3 & 1\ 2 \\ \ \ \ 3 & \end{array}$$

Étape 4 : On vide le plateau. On échange les 3 dizaines contre 30 unités, cela en fait 34 en tout. On le note.

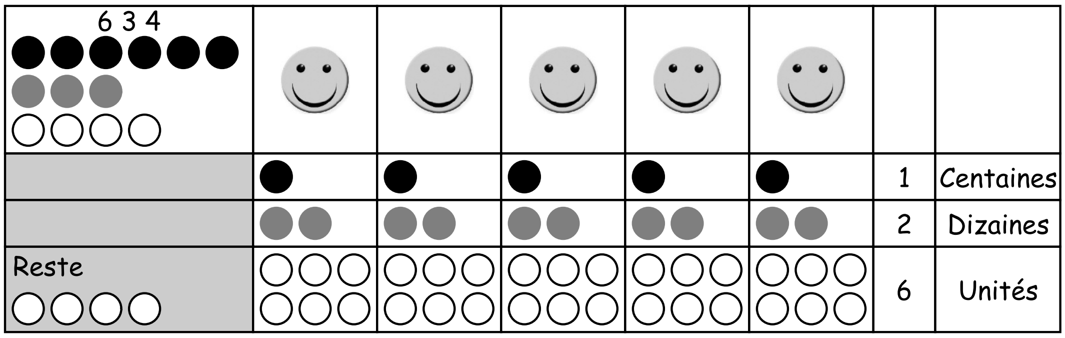
$$\begin{array}{l|l} 6\ 3\ 4 & 5 \\ \cline{2-2} 1\ 3 & 1\ 2 \\ \ \ \ 3\ 4 & \end{array}$$

Étape 5 : On distribue les unités. On a donné 6 unités à chacun et il en reste 4. On termine la division.

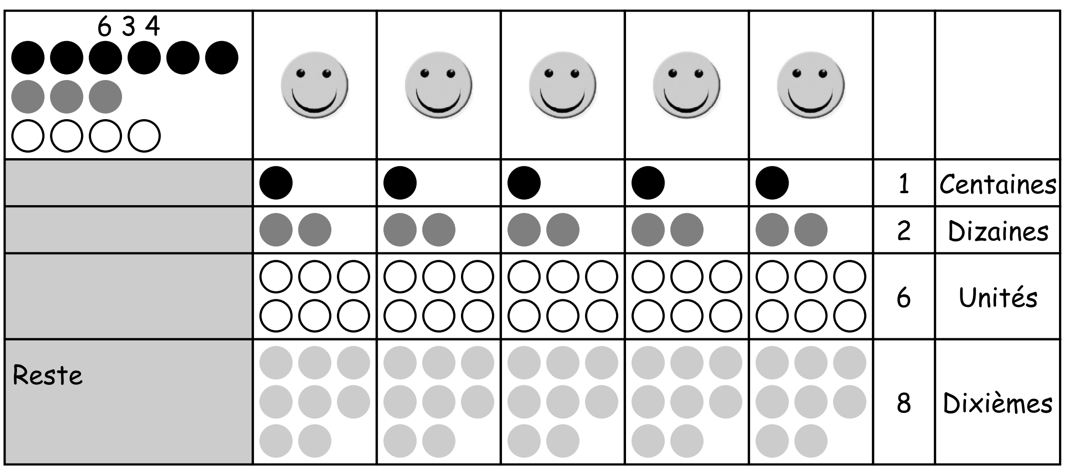


$$\begin{array}{l|l} 6\ 3\ 4 & 5 \\ \cline{2-2} 1\ 3 & 1\ 2\ 6 \\ \ \ \ 3\ 4 & \\ \ \ \ \ \ \ 4 & \end{array}$$

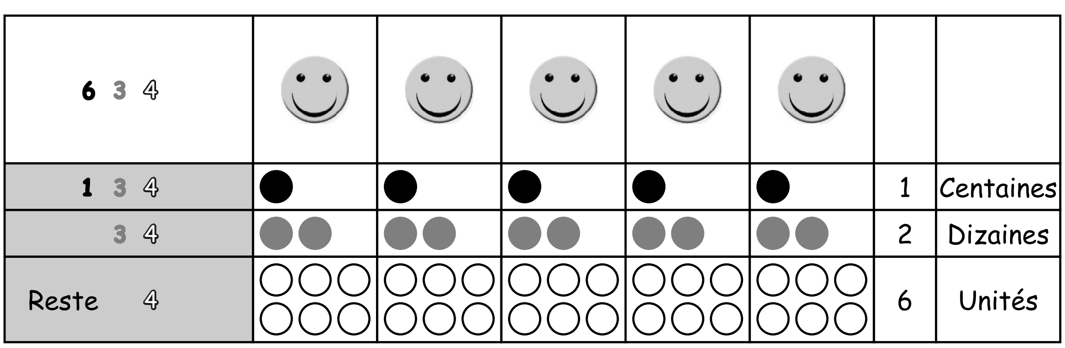
Nous avons imaginé une variante pour matérialiser l'ensemble de la division sur un même plateau, que l'on a séparé en lignes correspondant aux différents ordres de la numération décimale. Avec une telle disposition, l'ensemble des actions est visible simultanément.



Dans ce tableau obtenu à la fin de la manipulation, la zone grisée a pu être utilisée au fur et à mesure pour disposer la quantité qui restait à partager. Des échanges « un pour dix » (par exemple une centaine pour dix dizaines) y ont été effectués.
Une extension est envisageable au quotient décimal et permet de prolonger la présentation au collège.



Par ailleurs, le tableau peut évoluer en remplaçant progressivement les quantités par des écritures chiffrées et ainsi permettre d'introduire au fur et à mesure la présentation en potence.



6 3 4	5	
1 3 4	1	Centaines
3 4	2	Dizaines
Reste 4	6	Unités

$$\begin{array}{r|l} 6\,3\,4 & 5 \\ \cline{2-2} 1\,3 & 1\,2\,6 \\ 3\,4 & \\ 4 & \end{array}$$

Relier l'algorithme aux problèmes

L'algorithme exposé ainsi peut directement être relié au problème n°1, celui de type partition. Il est donc possible de travailler à la fois la numération et ce type de problème. En effet, l'action physique effectuée est une répartition dans des cases dont le nombre est connu *a priori*.
Est-il possible de donner une justification de la « division-potence » en lien avec un problème de type quotition ? Nous présentons une réponse qui peut faire l'objet de débats.

On cherche à savoir en 634 combien de fois 5. Il est possible de procéder par essais successifs en recherchant des multiples de 5 qui permettent d'approcher 634. Par exemple 120 x 5 approche 634.
Comme 120 x 5 = 600 et 634 - 600 = 34, on cherche à approcher 34 par un multiple de 5. On a 6 x 5 = 30 et 34 - 30 = 4. Comme 4 < 5, la réponse est donc 120 + 6 soit 126 et il reste 4.
On peut envisager un autre procédé de recherche de multiples, plus « pratique » et systématique dans le sens où il s'appuie sur la prise en compte des chiffres du nombre à diviser. Ainsi pour « 634 », on approche 6 (centaines) par le multiple de 5 qui lui est juste inférieur, puis on fait de même pour 13 (dizaines) et enfin pour 34 (unités). Ce procédé combine la recherche de multiples de 5 avec les potentialités offertes par la numération écrite chiffrée. Il permet de justifier la présentation de la division avec la potence suivante :

$$
\begin{array}{rccc|ccc}
 & 6 & 3 & 4 & 5 & & \\ \cline{5-7}
- & 5 & & & 1 & 0 & 0 \\ \cline{2-2}
 & 1 & 3 & & & 2 & 0 \\
- & 1 & 0 & & & & 6 \\ \cline{2-3} \cline{5-7}
 & & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
- & & 3 & 0 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 & & &
\end{array}
$$

Ce qui précède ne nous paraît pas facile à expliquer en classe, peut-être car nous n'avons pas trouvé de manipulations simples qui pourraient l'accompagner, telle celles présentées ci-avant. Il y a donc un certain « coût » à l'enseigner. Si le seul objectif est de justifier une technique, on ne gagnerait guère à la proposer aux élèves alors que l'autre justification, en lien avec la numération, suffit à être éclairante.

Conclusion

Nous avons distingué sens et technique de la division. La division peut avoir du sens sans nécessairement qu'une technique ne soit justifiée voire même qu'elle ne soit maîtrisée. Nous avons mis en exergue deux catégories de problème pour la division, quotition et partition. Nous avons montré des liens possibles entre les justifications des algorithmes qu'on peut enseigner et ces deux catégories.

Nous pensons, quant à nous, que le plus important est d'insister sur le sens de la division à travers la diversité des problèmes proposés aux élèves. La justification de la technique peut aussi permettre de donner du sens à la division. Cependant, une seule justification d'une technique de la division posée nous semble suffisante, au moins dans un premier temps. Comparer deux justifications peut cependant constituer un objet d'étude intéressant qui enrichirait le travail sur la division. Quoi qu'il en soit, il est utile au professeur de savoir qu'une justification de la technique peut se rapporter plus facilement à une catégorie de problème qu'à une autre. Nous espérons que ces réflexions amèneront les lecteurs de cet article à réagir, en apportant leur regard sur la façon dont ils abordent la division.

NDLR d'après le site http://www.montessori-france.asso.fr

Maria Montessori est née en 1870. Elle est issue d'une famille bourgeoise et son père était un militaire. Bien qu'élevée avec des règles de discipline très strictes, sa mère, très proche d'elle, respecte sa liberté. Elle devient une des premières femmes médecin en Italie à 26 ans.

Durant son travail dans les services de psychiatrie, elle découvre les enfants dits « débiles » (au sens médical) au sujet desquels elle dit : « *J'eus l'intuition que le problème de ces déficients était moins d'ordre médical que pédagogique...* ». Peu de temps après, elle crée une école d'orthophrénie (art de bien diriger les facultés intellectuelles). Elle y forme des enseignants et leur fait prendre conscience de l'importance de l'observation : « observer et non juger ».

Elle représente son pays dans des congrès féministes et dénonce le travail des enfants. En 1907, Maria Montessori inaugure son premier établissement : la Casa dei Bambini (Maison des Enfants) à San-Lorenzo dans un immeuble d'un quartier populaire. La Casa dei Bambini devient une base de recherche, un laboratoire d'expérimentation où Maria Montessori construit et éprouve sa méthode, très novatrice pour son époque. En une année, plusieurs autres « Maisons des Enfants » sont ouvertes en Italie dans lesquelles Maria Montessori est amenée à former des enseignants. À Londres se dérouleront des stages internationaux accueillant jusqu'à 40 nationalités différentes. Maria Montessori y formera personnellement quatre à cinq mille éducateurs.

Fuyant le fascisme, elle quitte l'Italie pour l'Espagne en 1934. La guerre civile espagnole éclate. Maria Montessori est accueillie en Angleterre puis en Hollande. De 1939 à 1945, pour fuir la Seconde Guerre mondiale, elle part vivre en Inde, où elle est assignée à résidence en tant que ressortissante italienne jusqu'en 1946. En 1952, elle retourne en Europe, tout d'abord en Italie qui la réhabilite, mais elle préfère s'installer aux Pays-Bas, où elle décède la même année à l'âge de 82 ans.

Lorsqu'on parle de la pédagogie Montessori, on évoque une méthode d'éducation dite ouverte, basée sur la mutualisation, la manipulation de matériel, l'éducation sensorielle et l'épanouissement de l'enfant.