

Calculs et gros sous

Agnès Monfront

Les articles que vous lisez sont très souvent le fruit d'échanges au sein de l'équipe PLOT. « Calculs et gros sous » est au départ une proposition d'article d'Henry Plane à partir de problèmes figurant dans des manuels dits d'arithmétique du début du 20^{ème} siècle. C'est devenu un article d'Agnès Monfront avec l'usage du tableur pour calculer le capital amorti et celui restant en fin de mois...

Ce type d'exercice permet aux lycéens, voire à chacun de nous, de mieux comprendre les calculs des banquiers, quoique, en ces temps troublés, tout évolue très vite !

Une situation d'aujourd'hui : acheter dès maintenant et rembourser ensuite

Un bien est vendu au comptant 1200 euros ou, à crédit, en 12 mensualités de 103 euros. Vous avez certainement vu cette offre et même peut-être présenté cette situation à vos élèves.

Premier calcul : $103 \times 12 = 1236$, soit 36 euros d'intérêts pour 1200 euros prêtés sur un an, voilà un honnête 3 %. Qu'en pensez-vous ?

Attention ! Le montant du prêt n'est pas de 1200 euros sur l'année car le montant restant à rembourser diminue chaque mois.

Entrons dans le détail des opérations en supposant que, sur les 103 euros versés chaque mois, 100 euros permettent de rembourser le capital emprunté et 3 euros correspondent aux intérêts dus. Chaque mois, le capital restant dû, noté C_i , diminue de 100 euros : s'il est bien de 1200 euros le premier mois, il n'est plus que de 1100 euros le deuxième mois, puis 1000 euros le troisième et ainsi de suite jusqu'à 100 euros lors du dernier versement.

Soit x un taux annuel en %, le taux mensuel proportionnel est alors de $\frac{x}{12 \times 100}$

soit $\frac{x}{1200}$.

Calculons x_1, x_2, \dots, x_i les taux annuels correspondant au taux appliqué le 1^{er}, 2^{ème}... et i ^{ème} mois.

Pour le premier mois, on a $1200 \times \frac{x_1}{1200} = 3$, soit $x_1 = 3$.

Le taux est de 3 %.

Mais pour le deuxième mois, on a déjà remboursé, avec le premier versement, 100 euros sur les 1200 euros prêtés au départ. Les intérêts s'appliquent donc sur les 1100 euros qui restent à rembourser.

On a $1100 \times \frac{x_2}{1200} = 3$,

soit $x_2 = 3 \times \frac{12}{11} = 3,27$.

Le taux est alors de 3,27 %.

En utilisant le tableur, on peut rapidement dresser la table des x_i présentée page suivante.

Sortons des sentiers battus

Mois	Capital restant dû	Taux x_i %
1	1 200	3
2	1 100	3,27
3	1 000	3,60
4	900	4
5	800	4,50
6	700	5,14
7	600	6
8	500	7,20
9	400	9
10	300	12
11	200	18
12	100	36

À partir des taux calculés pour chaque mois, on peut en déduire le « taux moyen » de ce prêt :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} (C_i \times x_i)}{\sum_{i=1}^{12} C_i} = \frac{1}{12} (1200 \times 3 +$$

$$1100 \times 3,27 + \dots + 100 \times 36) = 5,54.$$

On a donc un taux de crédit de 5,54 % et non de 3 %.

En oubliant le tableur et en raisonnant un peu, on peut trouver ce taux moyen en considérant que le capital à rembourser est en moyenne sur les 12 mois de $\frac{1200 + \dots + 100}{12} = 650$.

On a donc 36 euros d'intérêt pour une somme de 650 euros prêtée sur un an soit un taux annuel de $\frac{36}{650} \times 100 = 5,54$ %.

Raisonnons autrement et établissons le tableau d'amortissement d'un capital de 1200 euros emprunté au taux de 3 % annuel. On suppose que la mensualité est de 103 euros. On pourra se référer à l'article du numéro 33 de Plot (p. 23-25) pour retrouver la construction du tableau d'amortissement.

Au bout du 11^{ème} mois, il ne reste que 86,15 euros à rembourser. En versant une douzième mensualité de 103 euros, on rembourse donc 16,64 euros de « trop » par rapport à un prêt à 3 %.

N° de la mensualité	Capital restant dû en début de mois	Montant de la mensualité	Montant des intérêts	Capital amorti	Capital restant dû en fin de mois
1	1200,00	103,00	3,00	100,00	1100,00
2	1100,00	103,00	2,75	100,25	999,75
3	999,75	103,00	2,50	100,50	899,25
4	899,25	103,00	2,25	100,75	798,50
5	798,50	103,00	2,00	101,00	697,49
6	697,49	103,00	1,74	101,26	596,24
7	596,24	103,00	1,49	101,51	494,73
8	494,73	103,00	1,24	101,76	392,96
9	392,96	103,00	0,98	102,02	290,95
10	290,95	103,00	0,73	102,27	188,67
11	188,67	103,00	0,47	102,53	86,15
12	86,15	103,00	0,22	102,78	-16,64

À l'école d'antan : épargner pour pouvoir acheter

De tels calculs figuraient dans les livres d'arithmétiques scolaires de la première partie du 20^{ème} siècle mais sous un tout autre aspect.

S'il s'agit aujourd'hui d'une consommation immédiate engendrant une dette à compenser avec ses intérêts, il s'agissait autrefois d'épargner en vue d'un achat ultérieur ou, plus généralement, de disposer au bout d'un certain temps d'un capital fixé.

Reprenons notre histoire de bien et déterminons combien il faut épargner pour disposer dans 12 mois des 1200 euros nécessaires. On suppose que le placement est au taux 3 % annuel. On place chaque mois, pendant 12 mois, une somme mensuelle constante, notée m . Le premier versement s'effectue à la fin du premier mois comme dans le cas du remboursement d'emprunt.

Au bout de 12 mois, il y a le capital de $12m$ plus les intérêts. La période étant courte, on raisonne avec des intérêts simples au taux mensuel de $\frac{3}{100 \times 12}$ proportionnel au taux annuel de 3 %.

Pour le versement à la fin du premier mois, la somme reste placée 11 mois, elle rapporte : $m \times \frac{3}{100 \times 12} \times 11$.

Pour le versement à la fin du deuxième mois, la somme est placée 10 mois, elle rapporte : $m \times \frac{3}{100 \times 12} \times 10$.

Et ainsi de suite, jusqu'au dernier versement à la fin du 12^{ème} mois, qui ne rapportera pas d'intérêts.

Le total des intérêts sur l'année est :

$$m \times \frac{3}{1200} \times \sum_{i=1}^{11} i = m \times \frac{1}{400} \times 11 \times \frac{11+1}{2}$$

$$= m \times \frac{33}{200}.$$

Au bout d'un an, on dispose donc de $12m + \frac{33}{200}m$. On veut avoir un capital de 1200 euros, m est donc la solution de l'équation $12m + \frac{33}{200}m = 1200$. Sur un an, il faut donc placer 98,64 euros par mois.

Alors, cigale ou fourmi ?

Au lieu de rembourser 103 euros mensuels, on place 98,64 euros chaque mois. Sur la période d'un an, on économise 52,32 euros mais on ne dispose pas immédiatement du bien convoité...

On suppose ici que le prix du bien reste stable et surtout on oublie la course à la technologie... car, dans un an, le produit risque fort d'être « has been » et il n'attirera plus la convoitise.

Autre temps, autre mentalité... que nous véhiculons nous aussi au travers des exercices dits concrets que les manuels scolaires proposent.