Évaluer les prix

Frédéric De Ligt et Jean-Paul Guichard

« L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. » (Chevallard, Bosch, 2002)

Ce que nous avons à enseigner se présente dans le programme comme une myriade de compétences regroupées en quatre domaines. Cette présentation émiettée du savoir, sans aucune organisation, l'a coupé de ses racines, de ses raisons d'être. Or savoir d'où viennent ces outils et techniques que l'on étudie et pourquoi les hommes les ont inventés, c'est ce qui permet de comprendre ce que sont les mathématiques et l'intérêt de leur étude. Nous sommes donc allés enquêter du côté de l'histoire et avons aussi recherché où vivaient les mathématiques dans notre société. Ce qui nous a frappés, c'est que les mathématiques essayaient de répondre à quelques grandes questions enracinées dans la vie sociale : Comment dénombrer ? Comment mesurer ? Comment comparer ? Comment partager ? Comment calculer ?... Et que ces questions portaient sur l'étude des grandeurs. C'est à travers l'étude des grandeurs (longueurs, aires, volumes, quantités, valeurs…) que se sont construits les notions et outils de nombre, de figure géométrique, de fonction, d'équation, de propriété, de théorème, de démonstration. Nous avons réalisé alors qu'en choisissant d'étudier quelques grandeurs, nous pourrions parcourir tout le programme. Pour la classe de 6ème nous avons organisé l'année autour de l'étude de six grandeurs (angles, durées, aires, prix, volumes, longueurs), thèmes transversaux aux quatre grandes parties du programme, donc aux différents domaines des mathématiques, et qui constituent nos six chapitres. Dans chaque nouveau chapitre, l'élève retrouve les mêmes grandes questions mathématiques, retrouve ou enrichit les outils et méthodes qu'il a déjà vus. Il y rencontre les notions et savoir-faire au programme, ou vus antérieurement, comme outils de réponse à ces questions : le savoir qui se construit n'est plus muséal, mais fonctionnel.

Nous vous proposons un aperçu de ce que nous faisons dans le chapitre « Prix ».

Organisation

Notre chapitre sur les prix est conçu comme l'étude des réponses à trois grandes questions : Comment comparer des prix ? Comment partager des prix ? Comment calculer un prix ?

Comparer des prix

Quel est le prix le moins élevé ? Le plus élevé ? Le salaire le plus élevé ? La taxe la moins élevée ? Quel est l'écart de prix ?…

Dans cette première partie, nous allons apprendre à comparer des prix de façon absolue. Comparer, c'est dire combien j'ai d'argent en plus ou en moins. Mais comme les prix peuvent être donnés dans des formats d'écriture différents, il faut parallèlement travailler l'ensemble des formats concernés. Nous avons recensé :

- *l'écriture en toutes lettres* (pour les chèques, les actes notariés…)
- *l'écriture décimale* (nombre écrit avec la virgule et l'unité venant après, comme 13 € ou bien 3,5766 €)
- *l'écriture complexe* (avec les unités dans l'écriture du nombre, comme 3 € 5 c ou 3 € 50 c)
- *l'oralité fractionnaire*. On dit par exemple « un demi-euro » ou « un dixième d'euro », mais il n'apparaît pas de façon naturelle dans notre société une écriture fractionnaire des prix. Cette écriture fractionnaire répondait à un besoin lorsque les unités et les sous-unités n'étaient pas multiples de 10 (comme les livres, les sols et les deniers).

Cette partie concerne tout le travail sur la numération avec les différentes écritures en insistant sur la construction théorique du système décimal de position. C'est aussi dans cette partie que vivent l'addition et la soustraction pour connaître les différences entre deux prix. La multiplication et la division par des puissances de 10 nous permettent un changement pertinent d'unité afin de conclure une comparaison.

La comparaison absolue se fait par un retour au même format, mais les prix ne sont pas toujours donnés dans la même unité, c'est pour cela que nous aurons besoin de faire des comparaisons de prix en se ramenant à la même unité.

L'intérêt de cette partie est de consolider la construction et l'utilisation de l'écriture décimale d'un nombre. On retravaille le sens des techniques opératoires, plus spécialement pour l'addition et la soustraction, et la place des chiffres dans les écritures des nombres.

Partager des prix

Combien de fois plus cher ? Combien de fois moins cher ? Quel rapport entre deux prix, deux salaires ? Quel prix à l'unité ?

Nous savons désormais comparer des prix, des revenus, des sommes par différentes techniques. Nous allons maintenant nous atteler au problème des partages. Ainsi, quand on ne peut pas se ramener « facilement » à un prix référent en usant de la base 10 (il suffit de décaler la virgule ou le nombre), il va falloir user d'autres techniques.

Dans cette seconde partie, nous allons compléter le travail de comparaison des prix. Dans la partie précédente, nous avons comparé des prix de façon absolue ; ici, il sera question d'exprimer des prix en fonction l'un de l'autre *sous un certain rapport*. Nous continuons à comparer des prix mais c'est le type de réponse qui évolue : on devra être capable de répondre à des questions du type « Tel prix est combien de fois plus grand que tel autre (ou combien de fois moins) ». Cela permet de construire des références relatives et de donner des ordres de grandeur : par exemple en comparant le salaire d'un trader (1,5 milliard annuel pour les meilleurs) ou le salaire d'un footballeur (2 millions annuels) à un salaire moyen. La quantité « prix » s'affirme en tant que grandeur en montrant qu'en plus de la comparaison absolue, il existe une comparaison relative définie par la multiplication. C'est ici que va se définir « tel prix vaut le tiers de tel autre » en même temps que l'on définira « tel prix vaut le triple de tel autre » selon le point de vue que l'on adopte. C'est dans cette partie que se met en place la signification de l'écriture 1/3, 1/4, 1/7 comme un format d'écriture à connaître dorénavant en lien avec $\times 3$, $\times 4$, $\times 7$… permettant de définir les fractions comme rapport. À l'école primaire, la fraction était définie par un partage. Le champ d'application des fractions évolue au collège ; c'est bien ce que nous mettons en place ici.

Nous avions achevé la première partie sur la comparaison d'un prix par rapport au prix de référence ; dans cette partie, après avoir défini la comparaison relative, nous allons comparer des prix d'objets vendus en quantité différente, en lots. C'est le lieu du partage en parties égales, de la division des grandeurs. On travaille le sens de la division comme opération mathématique. Nous allons mettre en place deux techniques qui permettent de résoudre ce type de problème, l'efficacité de chacune d'elles dépendant des variables de la situation et du type de situation :

Le retour à l'unité : les lots étant donnés avec des effectifs différents, on calcule le prix d'un seul objet dans chaque lot. Ici intervient la linéarité : $f(1) = f(x)/x$ puisque $f(x) = x\,f(1)$.

- *L'utilisation des proportions* : on peut comparer le prix d'un même nombre (strictement supérieur à un) d'objets quand un premier lot contient un nombre d'objets multiple d'un second lot.

Ici intervient la règle de linéarité : $f(kx) = k\,f(x)$.

Les techniques reposent sur : le calcul mental, la calculette, le calcul posé, le tableur.

Dans cette partie intervient la gestion du problème de l'arrondi. C'est ici aussi le lieu des *fractions*, nouvel outil qui permet de résoudre ce type de problèmes.

Un exemple : comparer le prix de 8 pains pour 3,45 € avec celui de 3 pains pour 1 € 60.

L'écriture 3/8 doit être définie comme 3 fois 1/8, ce qui permet de donner du sens à 3/8. On pourra alors faire un inventaire des techniques qui permettent de calculer 3/8 de 3,45 € et comparer les prix.

L'intérêt de cette partie est de travailler les notions de quotient, rapport et fraction en interaction. La notion de proportionnalité est omniprésente, mais aussi celle de multiple et de diviseur. La division y joue un rôle fonctionnel. Les notions de valeur approchée et d'arrondi sont essentielles pour répondre aux questions.

Calculer des prix

Quelle remise ? Combien vaut ce lot ?
Quel prix vais-je payer ?

Dans cette troisième partie, nous distinguons trois temps correspondant à trois types de situations.

- Calculer un prix quand interviennent des pourcentages (partie d'une quantité, baisse et hausse de cette quantité). C'est le lieu de la multiplication, de la division avec l'utilisation des trois techniques vues dans la deuxième partie à propos de comparaisons relatives, et aussi des fractions égales comme 25 % = 1/4.
- Calculer le prix d'un lot quand on a le prix à l'unité : multiplication dont au plus un des facteurs a une partie décimale non nulle. C'est aussi le lieu de la division euclidienne quand on veut savoir combien on peut en acheter si on dispose de tant.
- Calculer le prix à la pesée : les deux nombres en jeu sont des décimaux quelconques. C'est le lieu de la multiplication généralisée aux décimaux et de la division non nécessairement euclidienne. Pour arriver à trouver le résultat de cette multiplication, on est amené à réutiliser des notions vues précédemment (décomposition d'un nombre, fraction décimale d'un nombre) et à utiliser la distributivité.

L'intérêt de cette dernière partie est de travailler le calcul du produit ou du quotient de nombres décimaux. Les problèmes d'approximation et d'arrondi sont omniprésents de façon fonctionnelle. C'est aussi l'occasion d'introduire et d'utiliser des formules littérales : fraction d'un nombre, prix de vente en fonction du prix d'achat, prix TTC en fonction du prix HT, prix à payer en fonction du poids…

La description que nous venons de faire de l'organisation de notre chapitre prix et de ses contenus mathématiques montre qu'on peut travailler dans ce chapitre la quasi-totalité des capacités des deux parties « Nombres et Calculs » et « Organisation et gestion de données. Fonctions ».

Mise en œuvre

Pour faire vivre ces trois grandes questions en classe, il nous faut choisir des situations à faire étudier, porteuses des grandes questions relatives aux prix pour lesquelles la recherche de réponses va permettre aux élèves de rencontrer et de faire fonctionner des savoirs et des techniques utiles faisant partie du programme. Ces situations, nous les avons voulues, autant que faire se peut, proches de la vie présente ou passée des hommes, pour montrer aux élèves qu'ils étudient une science vivante qui a aidé et aide les hommes à résoudre leurs problèmes. Pour en trouver, nous sommes allés interroger la vie quotidienne et l'histoire, et nous en avons fait une banque dans laquelle nous puisons la majeure partie de nos sujets d'étude, exercices et devoirs. À partir de cette banque, chacun de nous personnalise le parcours du chapitre qu'il va proposer à ses élèves, en conservant aussi l'organisation mathématique générale. Nous allons illustrer notre pratique sur la première partie du chapitre : comment comparer les prix ?

Pour aborder cette première question de notre parcours sur les prix et son étude, nous privilégions des situations où coexistent plusieurs prix pour un même produit.

Par exemple, comparer le prix du litre de gazole dans deux stations service affichant, l'une des prix au centime, l'autre au millime amène à la comparaison des nombres décimaux. Il faut connaître le lien entre écriture et unité, ce qui donne

1.Prix du gazole dans deux stations service

Voici des prix affichés du gazole dans deux stations service : 1,103 €/L dans la première et 1,21 €/L dans la seconde.

a. Quelle est la station la moins chère ? Quelle est la différence de prix entre les deux stations ?

b. Je dois mettre 10 L de gazole dans ma voiture, quelle sera la différence entre les prix à payer ? Si je donne 20 € au pompiste, calcule la monnaie rendue dans chaque station.

c. Je dois mettre 100 L de gazole dans mon utilitaire, quelle sera la différence entre les prix à payer ? Si je paye par chèque, remplis-les pour chaque station :

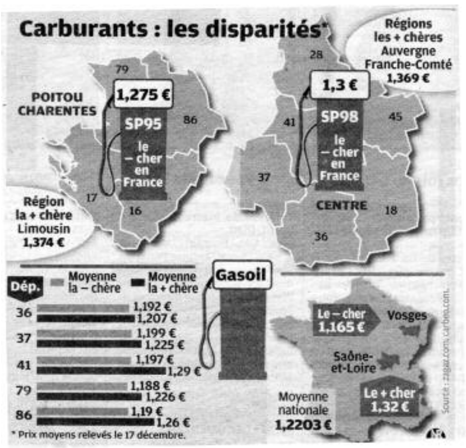
d. Le volume minimal vendu dans toutes les stations est 5L. Combien vais-je payer au minimum dans chaque station ?

aussi la technique pour comparer. Le calcul de la différence, l'écart entre les deux prix, qui est de 0,107 €, permet de bien faire fonctionner les algorithmes et le sens des retenues, en particulier de préciser l'unité de ce qu'on retient : dizaine d'euro ? dixième d'euro ?... Envisager quelle différence cela fait pour un achat de 10 L fait travailler le fonctionnement du système décimal : je paye 10 fois 1 € et 10 fois 1/10 d'euro etc. ; cela repose sur la décomposition des nombres dans le système décimal :

10 L × 1,107 €/L =

10 € + 1 € + 0/10 € + 7/100 €.

Par contre, remplir le chèque de paiement confronte à l'utilisation d'un autre format : « cent dix euros et trente centimes », c'est l'écriture complexe du prix, et non plus son écriture décimale. Le prix à payer pour un volume minimal de 5 L dans la première station, soit 5,515 €, sera l'occasion de parler des valeurs arrondies, des pièces de monnaie à notre disposition, d'utiliser les signes < ou > pour encadrer le prix final.



Le document « Carburants : les disparités » serait aussi un bon support d'étude incluant en plus lecture de document et de graphique, tout à fait dans l'esprit du socle de compétences au collège.

L'étude de la comparaison absolue des prix peut se poursuivre et s'approfondir à travers l'étude de nombreuses situations de la vie : salaires de diverses professions, prix de productions agricoles, prix de l'eau, de l'électricité, du gaz, du fuel, prix de gros… Pour réaliser qu'un écart minime peut devenir important pour de grandes quantités, il va falloir apprendre à maîtriser le système décimal et la multiplication par 10, 100, 1000, voire plus.

À partir d'un graphique, on peut tirer des informations sur l'évolution d'un prix dans le temps, se poser des questions sur ce qui est plus cher, moins cher, et quantifier ces variations : occasion d'apprendre à bien lire un graphique et à l'exploiter de façon finalisée. Se rendre compte que la réalisation d'un graphique peut être un bon outil de comparaison rend fonctionnelle cette réalisation, et enrichit les outils permettant de comparer.

Nous pensons aussi que l'étude de problèmes de prix dans des contextes historiques, par exemple à Rome ou en Grèce (civilisations étudiées en histoire en classe de sixième), ou en France sous l'Ancien Régime permet de bien faire prendre conscience aux élèves de la nécessité, pour comparer des prix et donc des nombres, qu'ils soient tous exprimés dans le même format. Et c'est aussi l'occasion de saisir tout l'intérêt du système décimal et d'en mieux comprendre le fonctionnement. Mais cette nécessité d'écrire tous les prix dans le même format se retrouve également dans notre quotidien avec l'utilisation d'écritures complexes (essentiellement euros-centimes), ou d'unités différentes (comme le k€). La nécessité de passer d'un format à un autre se présente quand on fait des chèques, quand on lit des actes notariés. Le choix des situations parcourues dans cette première partie doit permettre à l'élève d'avoir des outils pour comparer, et soustraire des prix écrits dans divers formats.

Le cours dans un cahier d'élève

La forme et les supports du cours peuvent être très variés : énoncés avec ou sans démonstration, manuscrit ou photocopié, rédigé à partir des propositions des élèves ou du texte conçu par le professeur, com-

Chapitre 2 : Les prix

I) Comparer des prix.

1 - La monnaie.

L'unité de base est l'euro (€), elle se divise en 10 décimes, le décime est divisé en 10 centimes, le centime se divise en 10 millimes.

1 décime = $\frac{1}{10}$ euro.

1 centime = $\frac{1}{10}$ décime.

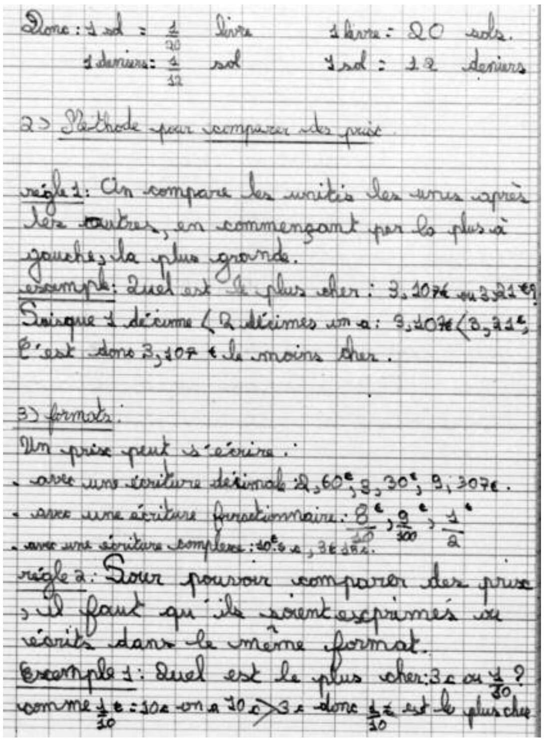
1 milimes = $\frac{1}{10}$ centime.

1 euro = 10 décimes.

1 décimes = 10 centimes.

1 centime 10 millimes.

En France, avant la Révolution, l'unité monétaire était la livre (≠), divisée en 20 sols (s), chaque sol était divisé en 12 deniers (J)



Donc : 1 sol = $\frac{1}{20}$ livre 1 livre = 20 sols.
1 deniers = $\frac{1}{12}$ sol 1 sol = 12 deniers

2) Méthode pour comparer des prix

règle 1 : On compare les unités les unes après les autres, en commençant par la plus à gauche, la plus grande.
exemple : Quel est le plus cher : 3,107€ ou 3,21€ ?
Puisque 1 dixième < 2 dixièmes on a : 3,107€ < 3,21€,
C'est donc 3,107 € le moins cher.

3) formats :
Un prix peut s'écrire :
- avec une écriture décimale : 2,60€ ; 3,30€ ; 9,307€.
- avec une écriture fractionnaire : $\frac{8}{10}$€ ; $\frac{9}{100}$€ ; $\frac{1}{2}$€
- avec une écriture complexe : 10€5c, 3€15c.

règle 2 : Pour pouvoir comparer des prix, il faut qu'ils soient exprimés ou écrits dans le même format.
Exemple 1 : Quel est le plus cher : 3c ou $\frac{1}{10}$?
comme $\frac{1}{10}$€ = 10c on a 10c > 3c donc $\frac{1}{10}$€ est le plus cher

Exemple 2 : Quel est le moins cher : 6€5c ou 6,5€ ?
6€5c = 6,05€
6,5€ = 6,50€
Puisque 6,05 < 6,50 on a 6€5c est moins cher que 6,5€

4) L'écriture décimale

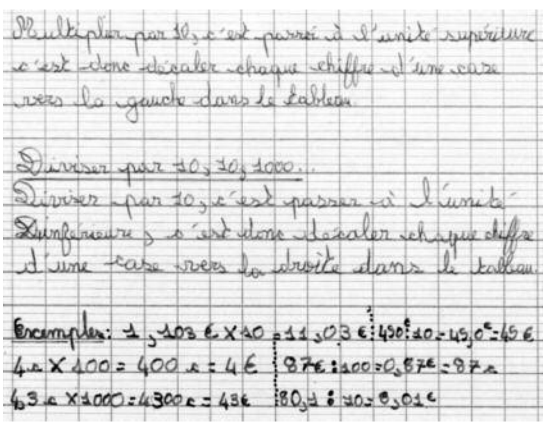
Préfixes	kilo	hecto	déca	NOM	déci	centi	milli
Abréviation	k	h	da	€	d	c	m
Valeur	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Nom	Millier	centaine	dizaine	unité	dixième	centième	millième

1,103€ = 1€ 1 d 0 c 3 m
1,103€ = 1€ + $\frac{1}{10}$€ + $\frac{0}{100}$€ + $\frac{3}{1000}$€

D'une façon générale, on a : $1{,}103 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000}$

On peut aussi écrire $1{,}103 = \frac{11}{10} + \frac{3}{1000}$

Multiplier par 10, 100, 1000...



Multiplier par 10, c'est passer à l'unité supérieure c'est donc décaler chaque chiffre d'une case vers la gauche dans le tableau

Diviser par 10, 100, 1000...
Diviser par 10, c'est passer à l'unité inférieure, c'est donc décaler chaque chiffre d'une case vers la droite dans le tableau

Exemples : 1,103 € × 10 = 11,03 € | 450c : 10 = 45,0c = 45c
4c × 100 = 400c = 4€ | 87€ : 100 = 0,87€ = 87c
43c × 1000 = 43000c = 43€ | 80,1 : 10 = 8,01€

plet ou à trous, à support spécifique (répertoire, cahier de cours) ou non (classeur, cahier unique, manuel)… Au niveau de l'équipe, les choix sont variés. Le cours donné en exemple, extrait d'un cahier d'élève, ainsi que les indications portées dans le déroulement précédent permettent de voir le type de contenu mathématique qui peut être institutionnalisé sur la première partie, en sachant que beaucoup plus de choses ont été vues et travaillées, ce qui est un des avantages de travailler par situations.

Devoirs

En devoir à la maison, nous utilisons le même type de situations que celles étudiées en classe, en sachant qu'il peut s'agir de rédiger une recherche faite en classe, ou de reprendre une situation analogue, ou d'en découvrir une nouvelle, ou de faire une enquête.

Pour nos contrôles, nous choisissons des situations du type des exercices proposés en classe en demandant le plus souvent à l'élève d'expliquer sa démarche, et en acceptant différents types d'explications pourvu qu'elles soient cohérentes.

Conclusion

Ainsi, avec l'étude des trois questions de notre chapitre sur les prix, l'intégralité du programme de sixième en calcul et gestion de données peut être travaillée dans un cadre naturel suscitant l'intérêt et l'intégration de l'élève dans son environnement en lui donnant des outils pour agir et comprendre.

Partir des grandeurs pour organiser l'enseignement des contenus au programme du collège, voilà quel est notre projet depuis plusieurs années : nous l'avons réalisé pour la sixième, et nous sommes en train d'y travailler pour les trois autres niveaux du collège.

Référence

Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les PRIX.
Groupe Collège, IREM de Poitiers (http://irem.univ-poitiers.fr/irem), 2011.