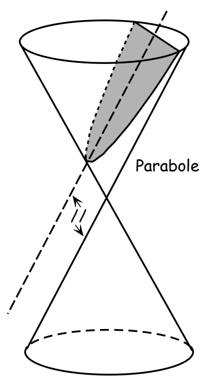
Très bref historique des coniques

Henry Plane

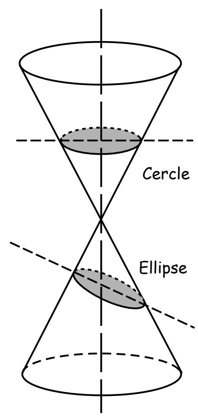
À l'heure à laquelle ce vocable ne semble plus guère désigner que des polynômes du 2ème degré à deux indéterminées, il nous a paru bon de résumer ce qui, pendant nombre de siècles, fut terre d'aventure de mathématiciens.

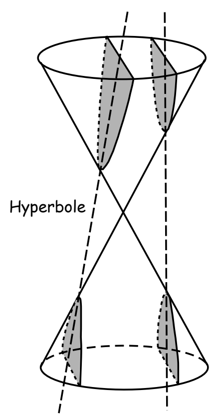
C'est en tant que section d'un cône que nous est connue la plus ancienne étude d'une conique. Ces sections coniques se présentent comme étude d'un cône de révolution coupé par un plan orthogonal à une génératrice. Selon que l'angle au sommet du cône est aigu, droit ou obtus, on obtient ce qu'on appelle maintenant une ellipse, une parabole, une hyperbole. Tel fut l'enseignement, vers -350, de Menechme, disciple de Platon.



L'étude de ces courbes semble avoir, ensuite, fort occupé les géomètres grecs. On ne sait exactement ce qu'en connaissait Euclide (vers -300) car l'ouvrage dans lequel ses successeurs disent qu'il en traite a été perdu. Les connaissances d'Archimède (mort en -212) sur le sujet semblent importantes. C'est à lui qu'on doit, en particulier, d'avoir calculé l'aire de la surface délimitée par un arc de parabole et sa corde – premier calcul d'une aire de surface curviligne.

Apollonius (vers -230) a laissé un traité « Coniques » dont on ne connaît qu'une partie. Il fait une étude très générale des trois types de coniques et leur donne les noms que nous leur connaissons[1]. Les coniques sont alors étudiées comme sections d'un même cône mais par des plans de directions différentes.





Apollonius connaît les propriétés de distance associées aux foyers[1] de l'ellipse et de l'hyperbole :

$MF + MF' = 2a$; $|MF - MF'| = 2a$

et les asymptotes de l'hyperbole.
Il est le premier à considérer la seconde branche de l'hyperbole, conséquence de sa définition de la surface conique ; mais il ne parle ni des directrices ni du foyer de la parabole. Il traite de propriétés projectives, d'analogie entre ellipse et cercle.

Il faut attendre Pappus et ses « collections » (vers 350 après J.C.) pour trouver ce qui a trait à la définition par foyer et directrice ($MF = e\,Mm$). Ce dernier donne également de nombreuses constructions à

[1] Sans utiliser le mot « foyer » introduit plus tard par Kepler.

la règle et au compas où interviennent les coniques.

Proclus (vers 450), qui clôt en quelque sorte l'apport de la géométrie grecque, nous a laissé la construction de l'ellipse avec « la bande de papier »[2].

Les auteurs arabes et islamiques ont apporté des commentaires à côté de leurs traductions des auteurs grecs. Ils appliquent l'étude des coniques à d'autres problèmes, comme l'optique, la théorie des astrolabes, la résolution des équations du troisième degré… Ce qui leur permet de découvrir de nouvelles propriétés. Ils tentent aussi de construire des instruments pour tracer ces courbes de façon continue. Par ailleurs, certains pensent que l'ellipse était alors connue en Inde. Mais on ne trouve pratiquement rien sur les coniques chez les Occidentaux au Moyen-âge.

Il faut attendre Maurolico (vers 1540) pour retrouver un ouvrage sur les coniques. Encore ne fut-il imprimé qu'en 1575 et il en fut de même pour sa première traduction d'Apollonius réalisée en 1548.

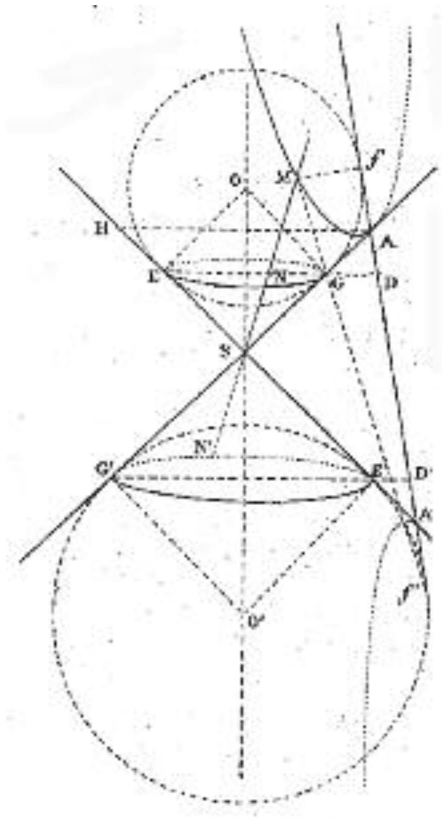
Par contre, Galilée (mort en 1642) étudia les trajectoires paraboliques des projectiles. Kepler (c.1630), en donnant aux planètes une orbite elliptique dont le soleil occupe un foyer, attira à nouveau l'attention sur les coniques pour des raisons mécaniques. On lui doit le terme de foyer et la notion d'anomalie excentrique.

C'est la perspective qui conduisit Desargues (c.1662) à replacer l'étude des coniques sur le cône. Le « théorème de Pascal » (1639) sur l'hexagone inscrit doit également aux projections sa généralisation aux coniques. La Hire (c.1718) travailla dans cette même voie. Grégoire de Saint-Vincent (c.1667) étudia la longueur de l'arc d'ellipse. Roberval (c.1675) apporta une solution originale au problème des tangentes aux coniques.

Aux XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles, les coniques offriront un terrain de prédilection à l'« application de l'algèbre à la géométrie » avec nombre de propriétés de celles-ci obtenues par calculs algébriques à partir de telles ou telles définitions. Les sections coniques de La Hire complétées par Maudhuit (1757) illustrent bien cette situation. Wallis est le premier à donner une définition analytique des coniques, sans référence à une section de surface conique. En 1655, il en fournit une classification complète en tant que courbes du second degré. Travail complété par Euler en 1748, qui est le premier à unifier l'étude des coniques à travers une équation algébrique générale du second degré. Newton (c.1727), Mac Laurin (c.1746), Simson (c.1768), L'Hospital (c.1704) apportèrent également leurs pierres à l'édifice.

Lambert (c.1777), avec Riccati, introduisit une sorte de trigonométrie adaptée à l'hyperbole avec l'étude de la fonction

[2] Pour cette construction, voir, par exemple, le remarquable site de Robert Ferréol www. mathcurve.com Choisir courbes 2D puis ellipse (construction n° 6).

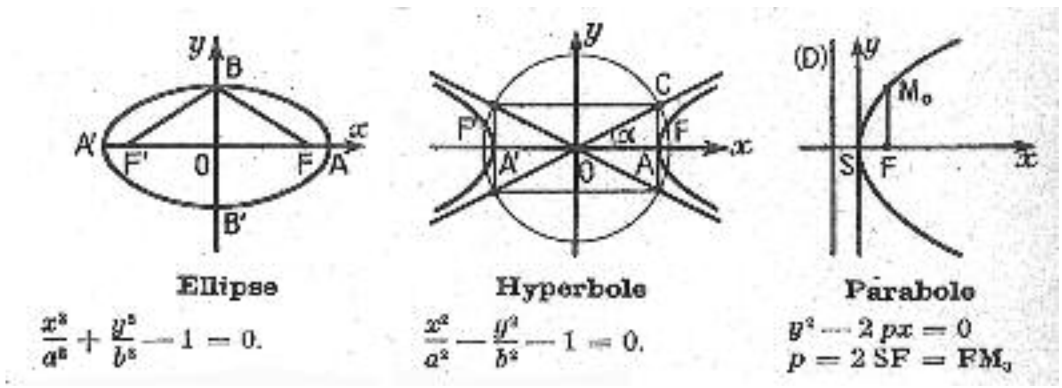


Illustrations tirées de manuels du siècle dernier…

$x \to \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Toutes les sciences font alors appel aux coniques (optique, mécanique, etc.).

Plus près de nous, de nombreuses propriétés des coniques, tant comme courbes planes que sections de cônes, sont révélées par Chasles (c.1880), Poncelet (c.1867), Steiner (c.1863), Quetelet (c.1874), Dandelin (c.1847).

Pendant longtemps, les trois coniques ont été enseignées de façon indépendante ; ce contre quoi s'est élevé Lebesgue (c.1941) qui a proposé d'unifier leur enseignement en s'appuyant notamment sur les travaux des années 1820 de Quetelet et Dandelin. Il a, en particulier, montré comment la définition par « foyer - directrice » permettait d'unifier l'étude par les seules propriétés planes.



À propos des termes parabole, ellipse, hyperbole

Ce sont des mots du vocabulaire grec usuel (ils sont donc utilisés en rhétorique mais dans beaucoup d'autres domaines). Dans le mot **parabole** il y a l'idée de comparaison ; dans celui **d'ellipse** : insuffisant ; dans celui d'**hyperbole** : jeté au dessus. Avec notre écriture, on peut expliquer ainsi ces trois qualificatifs :

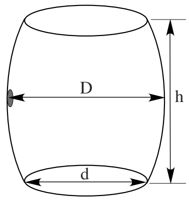
- la parabole correspond aux points dont les coordonnées sont liées par $y^2 = 2px$.
- pour une même valeur de x, ceux de l'ellipse seraient tels que $y^2 < 2px$ et ceux de l'hyperbole $y^2 > 2px$.

C'est ainsi que l'étude de Descartes se présente sous la forme $y^2 = 2px - x^2$ pour l'ellipse et $y^2 = 2px + x^2$ pour l'hyperbole.

Notre collègue Louis de Sagominard nous écrit suite à l'article paru dans PLOT : « Du pain, du vin, du boursin ».

Puisque « PLOT 36 » a évoqué la mesure de la capacité d'un tonneau, il n'est pas inutile de rappeler que cette problématique est ancienne. Kepler s'y intéressa à Graz en 1600.

On dispose de trois mesures :
D : diamètre du tonneau à la bonde,
d : diamètre au fond,
h : distance entre les fonds.



* Une première approche est d'assimiler le tonneau à un cylindre mais, quelle valeur pour son diamètre ? La moyenne arithmétique $\frac{D+d}{2}$ et alors $V_1 = \pi\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 h$, ou bien une moyenne pondérée ?

* Les anciennes arithmétiques donnent : $V_2 = \pi\left(\frac{5D+3d}{16}\right)^2 h$ attribuée à Diez, un mexicain du 16ème siècle et $V_3 = \pi\left(\frac{2D+d}{6}\right)^2 h$. Il s'agit ici de rechercher un cylindre médian dont on calcule le volume.

*Une autre approche est d'assimiler le fût à deux troncs de cône symétriques : on aura $V_4 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{D^2+Dd+d^2}{4}\right)h$ ou $V_5 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2D^2+d^2}{4}\right)h$, formule due à Oughtred (mathématicien anglais du début du 17ème siècle) que l'on retrouve dans un cours de Première du 20ème siècle…

* Avec $D = 60$ cm, $d = 50$ cm et $h = 87$ cm, on est en présence d'une « pièce de 220 litres » d'usage courant et les calculs donnent : V_1 = 206,7 L, V_2 = 216,2 L, V_3 = 219,4 L, V_4 = 207,3 L et V_5 = 220,9 L.

Enfin, il est à noter que, fin 19ème / début 20ème siècle, pour la perception du droit de transport des alcools (appelé congé), l'administration faisait usage de la formule $V_6 = 0{,}525\ l^3$, l mesurant la portion d'une tige entrée par la bonde et poussée jusqu'au fond, à la perce.
Notre « 220 litres » aurait payé un « congé » de 214 litres !